21世纪普通高等教育规划教材 · 公共基础课系列

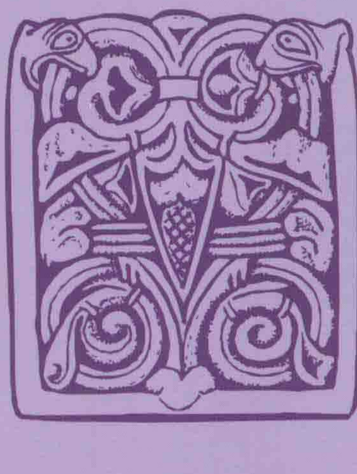
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI · GONGGONG JICHUKE XILIE

Differential and Integral Calculus (3rd Edition)

# 微积分

（第三版）

冉兆平 主编



上海财经大学出版社

21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列

# 微 积 分

（第三版）

冉兆平 主 编
张军好 程 斌 副主编
樊 艮 江小琴 参 编

上海财经大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/冉兆平主编.—3版.—上海:上海财经大学出版社,2013.8
(21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列)
ISBN 978-7-5642-1620-7/F·1620

Ⅰ.①微… Ⅱ.①冉… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第074021号

□责任编辑 温 涌
□封面设计 上艺设计
□责任校对 卓 妍 胡 芸

WEI JI FEN
**微积分**
(第三版)
冉兆平 主 编
张军好 程 斌 副主编
樊 艮 江小琴 参 编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)
全国新华书店经销
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster@sufep.com
全国新华书店经销
上海华业装璜印刷厂印刷装订
2013年8月第3版 2013年8月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 13印张 332千字
(习题集 9印张 230千字)
印数:33 001—38 000 定价:39.00元
(本教材免费赠送配套学习指导,请查接向售书单位索取)

21世纪普通高等教育规划教材

21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI

# 编委会

BIAN WEI HUI

# 第三版前言

从我国的国情和高等教育发展的形势需求看，独立学院在扩大高等教育规模、提高本科高等教育资源供给等方面起到了积极的作用。但独立学院自身的教材建设却相对滞后，通常采用国家普通高等院校的教材；而独立学院不同于国家普通高等院校，也不同于一般的高职高专学校，所用教材具有一定的针对性与实用性。

针对教材缺乏的实际情况，我们在选用普通院校的教材的同时，对其结构进行大量的调整，经过几年的尝试、摸索，我们积累了大量的教学经验，根据独立学院的实际，整理出了适合独立学院学生的教材。为此，由中南民族大学工商学院数学教研室编写了《微积分》教材，该教材具有如下特点：

(1)通俗易懂、直观形象

本书在不违反数学严谨结构的情况下，尽量做到通俗易懂，大量略去一些抽象的证明与推导，尽量用形象的语言给以叙述，对抽象的概念，尽量给以描述性的定义，使得“讲起来好讲，学起来好学”。

(2)增加例题与练习

实践是掌握知识的最有效的途径，为了使同学们更好地掌握微积分的内容与方法，本书加大了例题的讲解，同时在每章的最后配有大量的练习，同学们通过练习加深对数学知识的理解，巩固基本概念，提高解题技能。

(3)在每章后附有小结

本书的每一章都附有小结，对每章的内容进行梳理，把重要的概念、定理、公式都罗列在一起，便于学生复习；同时，我们还编写了与教材配套使用的《微积分学习指导》，对每个知识点都给以系统归纳，对课后的练习给以详细解答。

本教材自初版以来，因为浅显易懂、内容简洁、易教易学，所以很受广大师生的喜爱。但教材建设是一项长期的、艰巨的工作，一部好的教材必须经过师生反复施教、施学，不断探索、精益求精、集思广益、长期积累、不断完善，才能达到我们追求的目标。所以，编者在长期的教学中不断发现教材的一些不足之处，现在把它再次进行修改、删减、补充。

对一些叙述不当、可有可无的内容坚决删减，使之更为简洁；对一些错别字、错误符号进行了修改；另外加了一些小提示、小技巧，便于学生更好地掌握数学的计算与应用。

由于本教材是针对三本院校、高职高专而编写的，所以内容由简到深，不需要过多地依赖中学数学知识，如果有需要的公式等，在使用时都会提及。而且为了避免很多繁琐的中学数学公式，编者从自己教学多年的实际出发，尽量不涉及。比如，中学数学中有大量的三角函数公式，本教材只要大家掌握 $\sin(\alpha\pm\beta)$，$\cos(\alpha\pm\beta)$ 和 $\cos2\alpha$ 即可，这足以解决高等数学中关于三角函数的所有计算问题。让大家记住：在计算项中不是 $\sin x$，$\cos x$ 的，一律转化为 $\sin x$，$\cos x$；对

于反三角函数，一律逆向操作即可（即若 $\arcsin x$，令 $y=\arcsin x$，则 $x=\sin y$）。这样，大家学高等数学就不会感觉那么深奥难懂了，从而感知高等数学是什么及其有什么用处。

当然，编者把很多问题简单化，同时也可能降低了数学的严谨性，这样避免了学究式的呆板。这样处理教材，肯定有不足之处，毕竟我们是在探索，尝试如何更好地使大多数学生接受高等数学。

参加编写本教材的有冉兆平、张军好、程斌、樊艮、江小琴。上海财经大学出版社编辑认真审读了此书，并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。在本书的编写过程中，教学秘书刘爽给了很大的帮助，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促，加之经验不足，教材中难免有不妥之处，希望广大师生提出宝贵的意见和建议。

**编者**

2013 年 6 月 19 日

# 目　录

# 第1章 函数 极限 连续

## §1.1 函 数

在微积分中经常要用到区间和函数的一些基础知识，为此，我们在学习微积分之前，先复习有关函数等概念.

### 1.1.1 区间与邻域

**一、区间**

两个实数间的全体实数称为区间，这两个实数称为区间的端点.

设 $a,b$ 为实数，且 $a<b$，满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数的集合，称为以 $a,b$ 为端点的开区间，记为$(a,b)$；满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数的集合，称为以 $a,b$ 为端点的闭区间，记为$[a,b]$；满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数的集合，称为以 $a,b$ 为端点的半开半闭区间，记为$(a,b]$(或$[a,b)$).

此外还有无限区间：$(a,+\infty)$；$(-\infty,b)$；$(-\infty,+\infty)$.

**二、邻域**

设 $a,\delta$ 为实数且 $\delta>0$，将满足不等式$|x-a|<\delta$ 的全体实数的集合称为以 $a$ 为中心、$\delta$ 为半径的邻域，记作 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$.

如果把邻域 $U(a,\delta)$的中心点 $a$ 去掉，所得到的集合称为点 $a$ 的去心邻域，记作 $U^0(a,\delta)$. 这种邻域通常表示为：$0<|x-a|<\delta$.

### 1.1.2 函数

函数是微积分中研究的基本对象之一. 本节主要介绍常量和变量、函数概念等.

**一、常量和变量**

在研究客观事物的数量特征时，我们经常遇到两种不同本质的量：一种是在研究过程中只取一个固定数值的量，称为常量，如两地间的距离、某商品的单价(在某段时间内)等；另一种是在同一研究过程中可以取不同数值的量，称为变量，如工厂的月产量、销售某商品的收入、一天内的气温等. 我们今后主要讨论变量，而且是讨论诸变量之间的变化关系，要用变化的观点来分析和解决问题.

**二、函数概念**

1. 函数的定义

**定义 1** 设 $D$ 是非空实数集，设有一个对应法则 $f$，使得任给一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 $y$ 与之对应，则称这个对应法则 $f$ 为定义在 $D$ 上的一元函数，记作 $y=f(x), x\in D$. 其中，$x$ 称为自变量，$y$ 称为因变量，$D$ 称为定义域.

应该注意，函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 值域由此而唯一确定，值域 $Z(f)=\{y|y=f(x),x\in D\}$. 所以，两个函数的相等就是指：两个函数的对应法则和定义域完全相等.

**例 1** 研究 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系.

**解** $y=x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$；而 $y=\frac{x^2}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 所以，这两个函数是对应法则相同而定义域不同的两个函数.

2. 函数的对应法则

在函数式 $y=f(x)$ 中，$f$ 是对应法则，它表示变量变化所依从的规律. 根据这种规律，对于自变量 $x$ 所取的每一个值，就可以确定因变量 $y$ 的对应值 $f(x)$. 因此，函数的对应关系实际上表示由自变量确定函数值的过程.

如 $f(x)=2x^2+3x-5$，其对应关系为：$f: x\to 2x^2+3x-5$.

**例 2** 若 $f(x)=3x^2+x+1$，试求 $f(1), f(a), f\left(\frac{1}{x}\right), f(\sin x)$.

**解** $f(1)=3\times 1^2+1+1=5$

$f(a)=3\cdot a^2+a+1$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{x}+1$

$f(\sin x)=3(\sin x)^2+\sin x+1$

3. 函数的定义域

习惯上，我们只给出函数的对应法则，而未指明其定义域，这时定义域是指使该表达式有意义的所有 $x$ 值的集合.

函数的定义域问题，通常从以下几个角度去分析：

(1)在实际问题中，必须考虑变量的实际意义；

(2)在函数的数学表达式的研究中，必须考虑计算是否可行.

①表达式中含分母，要求分母不为零.

②表达式中含偶次根式，要求被开方数非负.

③表达式中含对数运算，要求真数为正，底数为正且不等于1.

④表达式中含正切、正割，要求角不等于 $\frac{2k+1}{2}\pi(k\in Z)$；表达式中含余切、余割，要求角不等于 $k\pi(k\in Z)$.

⑤表达式中含反正弦、反余弦，要求在 $[-1,1]$ 上取值.

**例 3** 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2x}{x^2-2x-3}$

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

**解** (1)要使$\dfrac{2x}{x^2-2x-3}$有意义,当且仅当 $x^2-2x-3\neq 0$

即 $x\neq -1$ 且 $x\neq 3$ $\therefore D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$

(2)要使$\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$有意义,当且仅当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$

即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$ $\therefore D(f)=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$

(3)要使 $\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 有意义,当且仅当$\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$

即$-4\leqslant x\leqslant 6$ 且$-5<x<5$ $\therefore D(f)=[-4,5)$

**例4** 求函数 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<-1\\ x+1 & -1<x<3\\ x^2 & x=3\\ 2x & 3<x\leqslant 5\end{cases}$ 的定义域.

**解** 要使 $f(x)$有意义,当且仅当 $x<-1$ 或 $-1<x<3$ 或 $x=3$ 或 $3<x\leqslant 5$,即$D(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,5]$,由此可见,分段函数的定义域是各区间的并集.

4. 函数的表示法

函数通常可以用三种方法表示:解析法、图示法与表格法.

(1)解析法. 用数学表达式(也叫解析表达式)来表示两个变量之间的关系. 这种方法便于应用数学分析的方法加以研究,但抽象而不直观.

(2)图示法($xOy$ 平面上的曲线). 借助于坐标系,把变量之间的关系用图形来描绘,其优点是直观但不够精确.

(3)表格法. 用一个表格来表示变量之间的关系,其优点是可以用来表示还不知道公式的函数.

## 三、初等函数

在中学,我们已经学过一些基本初等函数及其常用公式:

1. 常数函数:$y=c$($c$ 为常数)

2. 幂函数:$y=x^\alpha$($\alpha$ 为实数)

幂函数的运算法则为:(1) $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$,(2) $\dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$,(3) $(x^n)^m=x^{nm}$,(4) $(xy)^n=x^ny^n$,(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n=x^{-n}$.

3. 指数函数:$y=a^x$($a>0,a\neq 1$)

4. 对数函数:$y=\log_a x$($a>0,a\neq 1$)

常用的对数公式:

(1) $N=a^{\log_a N}$(对数恒等式)

幂指函数可用它变形:$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$

(2) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$（换底公式）

(3) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

(4) $\log_a \dfrac{y}{x}=\log_a y-\log_a x$

5. 三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$

常用的三角函数公式有：

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

(3) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

6. 反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\text{arccot} x$

以上五类函数是构成较复杂函数的基本单元，称为基本初等函数. 它们的图像和性质在高等数学中占有重要地位，请大家认真复习领会.

**小技巧**：在高等数学中，为了摆脱一些繁杂三角公式及便于计算，凡是遇到三角函数不是 $\sin x,\cos x$ 的，一律转化为 $\sin x,\cos x$ 的形式；凡是遇到反三角函数的，一律转化为三角函数处理，如 $\arcsin x$，令 $y=\arcsin x$，这样 $x=\sin y$. 掌握了这些技巧，可以使以后的高等数学运算大为简化.

**定义 2** 若函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合运算构成的，且用一个数学表达式表示，则称这样的函数为初等函数.

除了初等函数外，还有分段函数.

**定义 3** 已知函数定义域被分成有限个区间，若在各个区间上表示对应规则的数学表达式一样，但单独定义各个区间公共端点处的函数值；或者在各个区间上表示对应规则的数学表达式不完全一样，则称这样的函数为分段函数.

下面举几个分段函数的例子.

**例 5** 符号函数

$$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

这个函数通常记作 $\text{sgn}x$，它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$. 如图 1－1 所示.

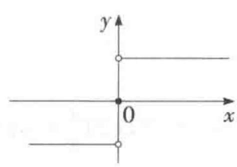



**图 1－1**

**例 6** 取整函数 $f(x)=[x]$.

对任意实数 $x$，记 $[x]$ 为不超过 $x$ 的最大整数，称 $f(x)=[x]$ 为取整函数.

如：$[-6.5]=-7,[0.6]=0,[1.3]=1,[3.5]=3$.

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域是由全体整数组成. 如图 1－2 所示.

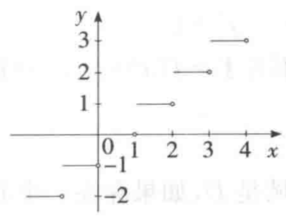



图 1-2

**例 7** 函数 $y=\begin{cases}x^3 & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{x} & x\geqslant 1\end{cases}$

这是一个分段函数,它的定义域为$[0,+\infty)$;当$x\in[0,1)$时,对应的函数是$y=x^3$,当$x\in[1,+\infty)$时,对应的函数是$y=\dfrac{1}{x}$.

### 1.1.3 函数的特性

**一、函数的单调性**

**定义 4** 设函数$f(x)$的定义域是$D$,区间$I\subseteq D$,若对任意的$x_1,x_2\in I$且$x_1<x_2$,总有$f(x_1)<f(x_2)$(或$f(x_1)>f(x_2)$),则称$f(x)$在区间$I$上为单调递增(或递减)函数.

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数.

从几何图像上来看,单调增(减)函数的图像沿$x$轴正向逐渐上升(下降).

应该注意:单调性与单调区间密切相关,上述情况下$I$称为单调区间.

例如:函数$y=x^2$在区间$(-\infty,0)$上是单调递减的,在区间$(0,+\infty)$上是单调递增的,但在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调的. 如图 1-3 所示.

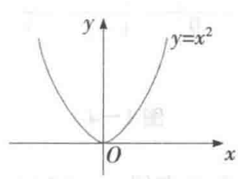



图 1-3

**二、奇偶性**

**定义 5** 设函数$f(x)$的定义域$D$为关于原点对称的区间,若对任意的$x\in D$,总有$f(-x)=f(x)$(或$f(-x)=-f(x)$),则称$f(x)$是偶函数(或奇函数).

从几何图像上来看,偶函数的图形关于$y$轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

**例 8** 判断下列函数的奇偶性:

(1)$y=x^4-2x^2$

(2)$y=x^3+1$

**解** (1)因为$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$

所以 $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

(2)因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$

它既不等于 $f(x)=x^3+1$,也不等于 $-f(x)=-x^3-1$,所以 $y=x^3+1$ 既非奇函数,也非偶函数.

**三、周期性**

**定义 6** 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $D$,如果存在一个非零常数 $T$,使得对每一个 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$,且总有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,$T$ 称为 $f(x)$ 的周期.

通常我们所说的周期是指最小正周期.

例如:函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数,$y=\tan x$ 是周期为 $\pi$ 的周期函数.

周期函数的图形具有在每一个周期长度的区间内形状相同的特点,所以只要画出一个周期长度区间的图形,再通过图形的左右平移可得到整个图形.

**四、有界性**

**定义 7** 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $D$,区间 $I\subseteq D$,如果存在正数 $M$,使对任一 $x\in I$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上有界. 若这样的数 $M$ 不存在,则称 $f(x)$ 在 $I$ 上无界.

应该注意:(1)函数的有界性也与所考虑的区间密切相关.

(2)函数的上界或下界不一定是函数的最大值或最小值.

例如:函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,因为对任意实数 $x\in R$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界,在 $[1,+\infty)$ 上有界. 如图 1—4 所示.

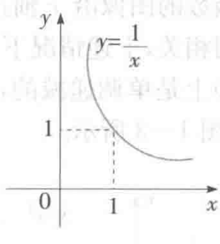



图 1—4

有界函数的几何特征是它的图像介于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

**定理 1** 函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界的充要条件是:它在区间 $I$ 上既有上界又有下界.

### 1.1.4 反函数与复合函数

**一、反函数**

**定义 8** 设给定函数 $y=f(x)$,若把 $y$ 当作自变量,$x$ 当作因变量,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$,叫做 $y=f(x)$ 的反函数,记作函数 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上,我们用 $x$ 表示自变量,用 $y$ 表示因变量. 因此,通常将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$,此时我们说 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

函数 $y=f(x)$ 的自变量 $x$ 和因变量 $y$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的自变量 $y$ 和因变量 $x$ 正好互换,它们的定义域和值域也正好互换.

函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一个坐标系中的图像关于直线 $y=x$ 对称. 而 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 在同一个坐标系中表示同一条曲线.

**例 9** 求 $y=2x-3$ 的反函数.

**解** 由 $y=2x-3$ 得 $x=\dfrac{y+3}{2}$

将其改写为 $y=\dfrac{x+3}{2}$

此即为原函数的反函数.

应该注意：一个函数如果有反函数，则它必定是一一对应的函数关系.

例如：函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内没有反函数；在 $(-\infty,0)$ 内有反函数 $y=-\sqrt{x}$；在 $(0,+\infty)$ 内有反函数 $y=\sqrt{x}$.

**二、复合函数**

**定义 9** 设函数 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 $Z(\varphi)$，若 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数，其中 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量，$u$ 为中间变量.

应该注意：

(1) 关于函数的复合，条件"函数 $u=\varphi(x)$ 的值域 $Z(\varphi)$ 与 $y=f(u)$ 的定义域 $D(f)$ 有非空交集"必须成立.

(2) 将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$ 的过程叫复合运算. 反之，由复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 计算 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的过程叫分解运算.

(3) 复合函数可以由两个以上的函数复合而成；反过来，一个较复杂的函数，根据需要也可以分解为若干简单函数.

**例 10** 将下列函数分解为较简单的函数：

(1) $y=\arcsin\left(\ln\dfrac{x}{10}\right)$

(2) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$

**解** (1) 函数 $y=\arcsin\left(\ln\dfrac{x}{10}\right)$ 由下列基本初等函数复合而成：

$$y=\arcsin u,\ u=\ln v,\ v=\frac{x}{10}$$

(2) 函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 由下列基本初等函数复合而成：

$$y=e^u,\ u=\sin v,\ v=\frac{1}{x}$$

**例 11** 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{e^{\frac{1-x}{x}}-1}$

(2) $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$

**解** (1) 在函数 $y=\sqrt{e^{\frac{1-x}{x}}-1}$ 中，被开方数 $e^{\frac{1-x}{x}}-1\geqslant 0$

即 $e^{\frac{1-x}{x}}\geqslant 1$，亦即 $e^{\frac{1-x}{x}}\geqslant e^0$

所以 $\dfrac{1-x}{x}\geqslant 0$

解不等式得 $0<x\leqslant 1$

所以函数 $y=\sqrt{e^{\frac{1-x}{x}}-1}$ 的定义域为$(0,1]$.

(2)在函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 中,当 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$ 时有意义

所以有 $-1\leqslant x\leqslant 2$

于是得出 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域为$[-1,2]$.

## §1.2 极 限

极限概念是微积分中极为重要的基本概念. 因为它贯穿于微积分始终. 从极限本身到连续、导数、微分、积分、级数等,均具备极限的思想. 因此,掌握极限的理论和计算方法是学习微积分的基础.

本章首先介绍一种特殊形式的函数——数列的极限,并在此基础上介绍函数极限的一般概念与性质,之后着重分析两种特殊的变量:无穷小量与无穷大量.

### 1.2.1 数列的极限

本节先介绍数列的概念,再讨论数列的极限.

**一、数列的概念**

**定义 1** 按一定的次序排列的无穷多个数:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

称为无穷数列,简称数列. 记为$\{x_n\}$. 其中每一个数称为数列的项,$x_1$ 叫首项,$x_n$ 叫一般项或通项.

例如:$1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots$

$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$

$-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$

都是数列,它们的通项依次为:$\dfrac{1}{n}$,$2n$,$(-1)^n$.

所以,数列是一种特殊的函数,是定义在自然数集上的函数,它由函数 $x_n=f(n)$的函数值构成.

**二、数列的极限**

1. 数列极限的定义

**定义 2** 设有数列$\{x_n\}$与常数 $a$,若对于任意给定的正数 $\varepsilon$(不论它多么小),总存在正整数 $N$,使得对于 $n>N$ 时的一切 $x_n$,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,则称常数 $a$ 是数列$\{x_n\}$的极限,或称为数列$\{x_n\}$收敛于 $a$,记作:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或者 $x_n\to a(n\to\infty)$.

从定义可以看出:当 $n$ 无限地增大时,数列$\{x_n\}$与某一常数 $a$ 无限接近,即$|x_n-a|$无限趋于 0。

**例 1** 考察以下四个数列:

(1)$x_n=1+\dfrac{1}{n}$ 即数列:$2,\dfrac{3}{2},\dfrac{4}{3},\cdots$

(2)$x_n=2n$ 即数列:$2,4,6,\cdots$

(3) $x_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$ 即数列：0,1,0,1,…

(4) $x_n=\frac{1}{2^n}$ 即数列：$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$

从这几个数列可以看出，随着 $n$ 的无限增大，数列的值也在变化：(1)中数列的值无限趋近于1，(2)中数列的值则无限增大，(3)中数列的值在0与1之间振荡，(4)中数列的值无限趋于0.

当数列$\{x_n\}$以 $a$ 为极限时，称数列$\{x_n\}$收敛于 $a$，此时称$\{x_n\}$为收敛数列；如果数列$\{x_n\}$不趋于某一常数，即$\{x_n\}$没有极限，则称$\{x_n\}$发散.

**例2** 用数列极限定义讨论下列数列的极限：

(1) $y_n=\frac{n}{2n+1}$；(2) $y_n=\frac{n-1}{n+1}$.

**解** (1)考察数列通项与常数$\frac{1}{2}$的差的绝对值

$$\left|y_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4n+2}$$

当 $n$ 无限增大时，$\frac{1}{4n+2}$无限变小趋于0，所以 $y_n=\frac{n}{2n+1}$无限趋近于$\frac{1}{2}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

(2)考察数列通项与常数1的差的绝对值

$$|y_n-1|=\left|\frac{n-1}{n+1}-1\right|=\frac{2}{n+1}$$

当 $n$ 无限增大时，$\frac{2}{n+1}$无限变小趋于0，所以 $y_n=\frac{n-1}{n+1}$无限趋近于1，因此$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+1}=1$.

**例3** 求$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

**解** 
$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

当 $n$ 无限增大时，$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$无限趋于0，所以有

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=0$$

2. 收敛数列的性质

**性质1**(有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$必有界.

**证** 因为$\{x_n\}$收敛，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对于$\varepsilon=1$，存在正整数 $N$，当 $n>N$ 时，不等式$|x_n-a|<1$恒成立，于是当 $n>N$ 时，有

$$|x_n|=|x_n-a+a|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则数列$\{x_n\}$中的一切 $x_n$ 都满足不等式$|x_n|<M$，所以数列$\{x_n\}$是有界的.

**性质2**(保号性) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，且 $a>0$(或 $a<0$)，则存在正整数 $N$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).