◎ 臧涛成 马春兰 潘涛

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

高等教育出版社

◎ 臧涛成 马春兰 潘涛

数学物理方法

Shuxue Wuli Fangfa

Methods of Mathematical Physics

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是作者在结合多年教学经验基础上，根据教育部物理学与天文学教学指导委员会制定的《高等学校物理学本科指导性专业规范》（2010 年版）编写而成。全书由复变函数论和数学物理方程两部分组成，以常见物理问题中三类偏微分方程定解问题的建立和求解为中心内容。本书数学部分紧密联系物理原理、行文流畅、深入浅出。

本书可作为高等学校物理类专业的教材或参考书，亦可作其他专业读者的辅助参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法／臧涛成，马春兰，潘涛主编. -- 北京：高等教育出版社，2014.9

ISBN 978 - 7 - 04 - 040603 - 0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①臧… ②马… ③潘… Ⅲ.①数学物理方法 - 高等学校 - 教材 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 162418 号

策划编辑 忻 蓓　　责任编辑 忻 蓓　　封面设计 张申申　　版式设计 童 丹
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 殷 然　　责任印制 刘思涵

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京明月印务有限责任公司
开　　本 787mm × 1092mm 1/16
印　　张 12.25
字　　数 260 千字
购书热线 010 - 58581118
咨询电话 400 - 810 - 0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2014 年 9 月第 1 版
印　　次 2014 年 9 月第 1 次印刷
定　　价 22.70 元

物 料 号 40603 - 00

数学物理方法 数字课程

◎ 臧涛成 马春兰 潘涛

与本书配套的数字课程资源发布在高等教育出版社易课程网站，请登录网站后开始课程学习。

账号自登录之日起一年内有效，过期作废。使用本账号如有任何问题，请发邮件至：ecourse@pub.hep.cn。

一、登录网站

1. 访问 http://abook.hep.com.cn/1248231/
2. 输入数字课程账号（见封底明码）、密码、验证码
3. 点击“进入课程”
4. 开始课程学习

二、资源使用

本书配套的数字资源包括参考例题、知识小结、习题解答、人物简介、扩充阅读等，这些资源在书中的对应知识点处均有明显标示，读者可以通过登录本书配套的课程网站使用以上资源。

http://abook.hep.com.cn/1248231/

◎ 前言

数学物理方法是物理类各专业的重要基础课之一，是解决数学物理各种具体问题的重要工具之一，在物理学、工程技术和其他科学领域都有十分广泛的应用。本书是作者根据十余年教学实践经验，在原有授课讲义基础上总结修改而成的。本书分上、下两篇，共十一章，上篇复变函数论、下篇数学物理方程，基本涵盖了教育部高等学校物理学与天文学教学指导委员会制定的《高等学校物理学本科指导性专业规范》(2010 年版)。为方便使用，全书十一章不分篇统一排序。本书适合普通院校数学物理方法课程学时数较少的物理、电子及通信类专业使用。

数学物理方法课程涉及高等数学和普通物理基础知识，是一门公认的难教、难学课程，而且课程学时数也在普遍缩减，同时，考虑到一般院校学生的实际情况以及学习数学物理方法的主要目的在于应用，因此，编写选材时的宗旨是强调重点、强化基础，注重思路和方法介绍，不苛求面面俱到和严格的数学证明。

上篇复变函数论共五章，对复变函数基础理论进行了简明阐述；下篇数学物理方程共六章，第七章至第十章是本书的重点，结构上以两变量、三变量偏微分方程为顺序，以分离变量法为核心编排。具体地讲，第七章为直角坐标或极坐标系下的两变量波动、热传导及拉普拉斯方程的求解，第八章为球坐标系下的三变量拉普拉斯方程的求解，第九章为柱坐标系下的三变量拉普拉斯方程的求解，第十章则为三变量波动、热传导方程 (实为亥姆霍兹方程) 在球柱坐标系下的求解。积分变换 (傅里叶变换和拉普拉斯变换) 和格林函数方法作为求解定解问题的其他方法一起作为第十一章，冲量定理法作为一维格林函数方法也放在此章。对于如贝塞尔方程、亥姆霍兹方程等较复杂的解，为便于使用，均以表格形式给出解的清晰结构。

在本书即将付梓之际，作者特别要感谢的是北京师范大学彭芳麟教授，本书每一章节的编写都得到了彭老师的悉心指导，他斟字酌句、推敲再三，为本书倾注了许多心血，让我们深受感动。彭老师的深厚功底、做事态度以及平易近人的品行都给我们留下深深的印记，在此对彭老师表示衷心的感谢！

本书的出版得到了高等教育出版社理工出版事业部物理分社，特别是高建分社长和忻蓓编辑的关心支持。此外，也得益于作者所在单位苏州科技学院的支持，尤其是数理学院领导的鼎力相助，在此一并表示深深的谢意！

由于编者水平有限，书中错误、不妥之处在所难免，敬请读者、同行和专家们批评指正。

编　者

2013 年 10 月于苏州石湖

◎ 目　录

上篇　复变函数论

下篇　数学物理方程

上　篇

复变函数论

数学分析是在实数域上研究变量、函数、连续与极限、微分、积分以及级数等概念，这些概念能推广到复数域吗？应该怎样推广？得到了什么结论？它们有什么用处？本篇将介绍这些知识．换句话说，本篇是在复数域上研究变量、函数、连续与极限、微分、积分以及级数，因此注意两者的联系与区别对学习很有帮助．

第一章　复数及复变函数

本章将首先引入虚数和复数，介绍复数的四种不同表达方式、几何解释及运算规则，之后定义初等复变函数，并对其性质和图示方法进行讨论.

1.1　复数

◎　虚数的引入

虚数的引入与在实数域解方程有关，例如在解方程 $x^2=-1$ 时，就会遇到负数开平方的问题. 如果定义 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$(即 $\mathrm{i}^2=-1$)，则形式上可以把方程解表示为 $x=\mathrm{i}$. 同时任意负数的开方也都有了形如 $\mathrm{i}y$(或 $y\mathrm{i}$，式中 y 是任意实数) 这样的形式，但这个结果显然已经不是我们所熟悉的实数. 如果把这种形式的结果也叫“数”，或者说为使负数开平方有意义而需要特别引入这样的“数”，自然需要扩充数系的概念，由此引入了虚数 $\mathrm{i}y$. 虚数是独立于实数之外的另一套数系，有时候叫**纯虚数**以突出它与实数的不同，其中 i 只是一个用来标志虚数的符号，叫 **虚数单位**.

◎　复数的引入

既然实数与虚数是相互独立的，将实数与虚数相加颇有些不可思议，那么表达式 $x+\mathrm{i}y$ 该如何去理解呢？考查这个式子会发现：当 $y=0$ 时它是实数，当 $x=0$ 时它是虚数，当 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 时，它既不是实数也不是虚数. 同样道理，若把它也称之为“数”，只能再扩大数的概念，这样就引入了复数 $x+\mathrm{i}y$. 由此形成的复数体系除了包含实数和虚数外，还有无穷个未知的新“数”. 实际上，该表达式的出现并非某个天才的臆造，而是数学家在解方程 $x^3-15x-4=0$ 中的发现. 在利用当时已知的求三次方程根的公式来求解这个方程时，得到的结果是

$$x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=(2+\mathrm{i})+(2-\mathrm{i})=4$$

虽然所得结果 $x=4$ 确实是原方程的根，当时却无人能解释这个求解过程的意义. 因为求解过程中不仅出现了对负数的开方，即得出了虚数，而且出现了形如 $x+\mathrm{i}y$ 的表达式以及对它所进行的运算. 此后又经过长期的研究才解决了对复数的理解与应用，一门新的数学理论应运而生，这就是复数分析. 复数理论的形成与完善跨越了 200 多年，尤其令人惊讶的是，它解决了一些在实数分析中难以解决甚至不能解决的问题，这正是学习复数分析的价值所在.

◎　复平面

为了理解复数 $x+\mathrm{i}y$，可以引入复数的几何表示. 既然实数的几何表示是数轴上的点，不妨引入可以表示虚数的数轴“虚轴”，也就是在平面坐标系 xOy 中，以 x 轴

表示实数, 以 y 轴表示虚数, 则平面上坐标为 (x, y) 的一个点就对应一个复数 $x+\mathrm{i}y$, 如图 1.1 所示. 例如, 平面上点 $(4,-3)$ 就表示复数 $4+(-3)\mathrm{i}=4-3\mathrm{i}$.

这样引入的平面坐标系称为**复数平面 (复平面)**, 它为复数提供了一个几何图像, 也启示了研究的方向. 更明确地说, 实数分析是研究数轴上的点, 而复数分析将研究复平面上的点. 显然, 复数 $x+\mathrm{i}y$ 中的加号并不代表实数与虚数之间发生了运算, 它的作用只是在一个实数和一个虚数之间建立了联系. 后来的研究表明, 复数也可以用遵循一定运算规则的二元数组 (x, y) 来表示, 于是复数的理论与代数理论也有了联系. 从这点说, 实数分析研究的是一元数, 复数分析研究的是二元数组, 而高等数学中的矢量分析研究的是三元数组.

◎　复数的四种表达式

1　**代数表达式**　以 z 代表任意复数, $z=x+\mathrm{i}y$ 称为复数的代数表达式, x 与 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**, 记作 $x=\mathrm{Re}\ z$, $y=\mathrm{Im}\ z$.

2　**三角表达式**　在复平面内, 以原点 O 为起点, 以点 $z(x, y)$ 为终点画矢量 $\overrightarrow{Oz}$, 矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 称为**复矢量**. 这样每个复数都对应平面内的一个复矢量, 如图 1.2 所示.

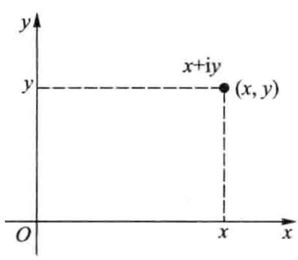


图 1.1

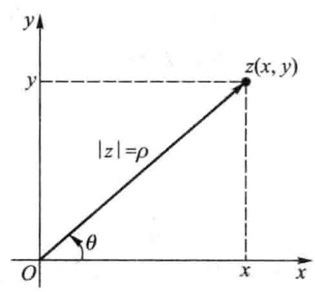


图 1.2

复矢量的长度称为复数 z 的**模或绝对值**, 记为 ρ, 实轴正向到复矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 间的夹角称为 **辐角**, 记为 $\theta=\mathrm{Arg}\ z$, 则有

$$|z|=\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

由于三角函数的周期性, 辐角的取值不是唯一的, 可任意增加 2π 的整数倍. 它的几何意义是指复矢量绕原点转一圈所得的矢量仍然是原来的矢量. 辐角的不确定性带来了复数表示的多值性 (包括后面产生的函数多值性), 为此定义辐角的**主值**, 它只取 0 到 2π 之间的值, 并记为 $\arg z$, 即

$$0 \leqslant \arg z < 2\pi$$

因此

$$\theta=\mathrm{Arg}\ z=\arg z+2k\pi, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

特别地, $z=0$(即复平面的原点, 对应复矢量为零矢量), 也就是原来的实数 0, 它的实部、虚部都为零, 按辐角定义为不确定的 0/0 型, 因此我们不讨论 $z=0$ 的辐角, 或者说 $z=0$ 的辐角无意义.

容易理解, 只要复矢量的模和辐角主值一样, 则这些复矢量都表示同一个复数.

利用三角函数关系 $x=\rho\cos\theta$、 $y=\rho\sin\theta$, 复数 z 可以表示成

$$z=\rho\cos\theta+\mathrm{i}\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.1}$$

称为复数的**三角表示式**.

至此, "复数"、"点"、"复矢量"之间建立了一一对应关系. "点"可以指它所代表的"复数", "复数"也可以指它所代表的"点".

3 **指数表达式** 将欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 代入复数的三角表示式, 可得复数的指数表示式为

$$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.2}$$

4 **二元数组 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 表示法** 一个复数 $x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数 x、 y 唯一确定, 所以二元数组 (x,y) 可定义一个复数 z, 记为

$$z=(x,y)=x\,(1,0)+\mathrm{i}y\,(0,1) \tag{1.3}$$

复数的上述四种表示方法, 可以互相转换, 例如,

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\left(1,\sqrt{3}\right)$$

前三种是复数表示的最常用方法.

◎ 无穷远点

在实轴上, 正无穷远和负无穷远是两个方向不同的极限点, 所以在实数中会使用 $+\infty$ 和 $-\infty$. 在复平面上, 当复数的模趋于无穷大时, 复数也会沿着不同的方向趋于极限点. 但在复数理论中并不是有无穷多个这样的极限点, 而是根据理论的需要, 将所有模趋于无穷大的极限点视为一个复数或一个点, 叫**无穷远点**, 统一记为 ∞. 这样的规定能使 0 与 ∞ 在变换 $1/t$ 下保持一一对应的关系, 同时还能将一些对有限远点所建立的概念如邻域、本性奇点、留数等推广到无穷远点. **重申一下**, 在复数理论中, 无穷远点是模为正无穷大的一个复数, 不要与实数中的无穷大或正、负无穷大混为一谈, 这是复数理论与实数理论的重要差别.

对无穷远点也不讨论其辐角, 因为按辐角定义得到的是无意义的 ∞/∞ 等形式. 通常说的"复平面"是不包含无穷远点的"开平面", 而"全平面"或"闭平面"才包括了无穷远点.

1.2 复数的运算

对复平面上任意两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2=\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 它们的运算法则规定如下

1 **相等** 两复数相等是指它们实部与实部相等, 虚部与虚部相等. 即

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2 \tag{1.4}$$

使用三角表达式和指数表达式时, 两复数相等是指模相等、辐角相差 $2k\pi$(k 为整数), 即

$$\rho_1=\rho_2,\quad \theta_2=\theta_1+2k\pi$$

需要特别注意的是复数无大小, 因为没有规定复数比较大小的方法, 实际上也找不到这种方法, 所以不知道实数是不是比虚数大, 也不知道 i 是大于零还是小于零, 但是复数的模是实数, 可以比较模的大小.

2 **加减法** 两复数进行加减是将它们的实部和虚部分别相加减, 即

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2) \tag{1.5}$$

从图 1.3 可以看出, 复数的加法对应于复矢量的平行四边形加法, 而复数的减法可以用于计算两点之间的距离. 实际上, 因为复数 z_1、 z_2 对应着矢量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$, 那么 z_1-z_2 自然就对应着 $\overrightarrow{Oz_1}-\overrightarrow{Oz_2}=\overrightarrow{z_2z_1}$, 因此 $|z_1-z_2|=|\overrightarrow{z_2z_1}|$ 就表示点 z_1、z_2 间的距离.

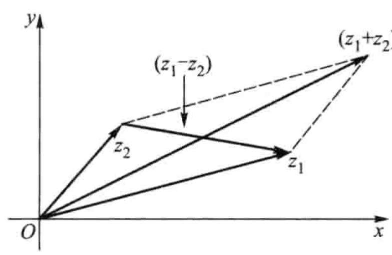


图 1.3

3 **乘法** 复数的乘法运算与多项式的乘法运算相似, 即

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2) \tag{1.6}$$

复数的乘法也可以用指数式来计算

$$z_1z_2=\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

它表示两个复数相乘是模相乘, 辐角相加, 如图 1.4(a) 所示.

4 **共轭复数** 表达式 $x-\mathrm{i}y$, 它所表示的复数仍然包含在 $x+\mathrm{i}y$ 表示的复数之中, 似乎没有什么用处. 但是, 在计算中发现, 经常需要成对使用 $x+\mathrm{i}y$ 与 $x-\mathrm{i}y$. 为了表述方便, 称复数 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 互为**共轭复数**, 并将 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$. 显然一对共轭复数在复平面上关于实轴对称.

共轭运算或者说取“共轭”是将复数改变为其共轭复数, 通常用星号表示这种运算, 例如取 z 的共轭, 即 $z^*=\bar{z}$. 再如

$$z\bar{z}=zz^*=(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=x^2+y^2$$

利用复数的四种表示方法, 可得共轭复数的四种表达式如下:

$$z^*=x-\mathrm{i}y=\rho\,(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=\rho\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=(x,-y)$$

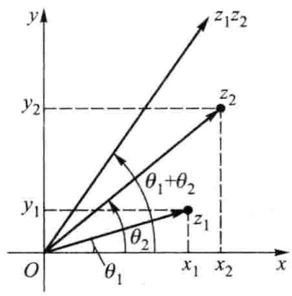
5 **除法** 复数的除法是用分母的共轭复数同乘以分子分母, 这使分母变成了实数, 即

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.7}$$

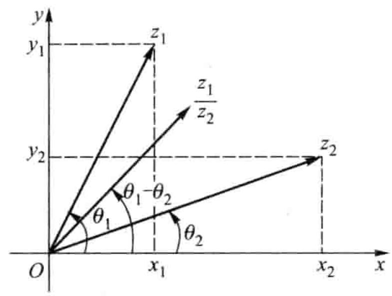
除法用指数式计算更方便些

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

它表示复数相除是模相除, 辐角相减, 如图 1.4(b) 所示.



(a)



(b)

图 1.4

乘除法的几何意义: 如果 $\rho_2=1$ 即单位复数 $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 乘法 z_1z_2 是将复矢量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 逆时针旋转 θ_2 角度; 除法是将 $\overrightarrow{Oz_1}$ 顺时针旋转 θ_2 角度. 如果 $\rho_2\neq1$, 则旋转后的矢量的模还要乘以或除以 ρ_2, 即作相应的伸长或缩短.

6 **求 n 次幂** 将复数自乘 n 次, 即

$$z^n=\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{1.8}$$

7 **n 次方根** 这是求幂的逆运算. 就是说, $w=z^{\frac{1}{n}}$ 的含义是 $w^n=z$, 计算方法如下:

$$z^{\frac{1}{n}}=\left[\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}\right]^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}\qquad(k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.9}$$

由于辐角的多值性, 会出现 n 个不同的根. 从几何上看, $z^{\frac{1}{n}}$ 的 n 个根就是以 $\rho^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点 (参见例 2).

例 1 已知 $z_1=\dfrac{1}{2}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})$, $z_2=\sin\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{3}$, 求 $z_1z_2+\dfrac{z_1}{z_2}$.

解 因为要作乘除运算, 所以用三角或指数表示式比较方便.

$$z_1=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

由乘除运算和加法运算法则就有

$$z_1z_2=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=-\mathrm{i}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$z_1z_2+\frac{z_1}{z_2}=-\mathrm{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$$

例 2 计算 $w=\sqrt[4]{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}$ 的值.

解 因为求四次根式, 所以用三角或指数表示式比较方便. 因为

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

所以由根式运算法则得

$$w=\sqrt[4]{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0,1,2,3)$$

四个根分别为

$$w_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{12}\right),\quad w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{13\pi}{12}\right),\quad w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$

这四个根是中心在原点、半径为 $\sqrt[4]{2}$ 的圆的内接正方形的四个顶点, 如图 1.5 所示.

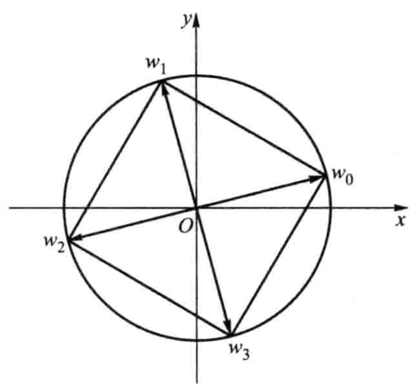


图 1.5

1.3 复变函数

复平面上点的集合称为**点集**, 可记为 E. 因为曲线和面积都可看作由无穷多个点组成, 因此点集 E 既可以是孤立的一些点, 也可以是复平面上的曲线, 或者是复平面上某条闭合曲线所包围的面积.

◎ 复变函数

若对点集 E 内任何一点 z, 按照一定规律有确定的一个 (或多个) 复数 w 与之对应, 则称在 E 上确定了一个单值 (或多值) 复变函数 $w=f(z)$, z 称为宗量. E 称为函数 $w=f(z)$ 定义域, w 全体构成的点集称为函数值域.

因为 $z=x+\mathrm{i}y$, 所以

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y) \tag{1.10}$$

例如, 若 $f(z)=z^2+z$, 则 $f(x+\mathrm{i}y)=(x+\mathrm{i}y)^2+x+\mathrm{i}y=x^2-y^2+x+\mathrm{i}(2x+1)y$, 即 $u(x,y)=x^2-y^2+x, v(x,y)=(2x+1)y$.

可见, 复变函数 $w=f(z)$ 的许多性质都可以通过对实变二元函数 $u(x,y)$、$v(x,y)$ 的讨论而得到.

◎ 初等复变函数

下面给出初等复变函数定义式.

1 幂函数定义

$$w=z^n \quad (n\text{为整数}) \tag{1.11}$$

性质: 定义域为复平面, 单值函数.

2 多项式定义

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n \tag{1.12}$$

性质: 定义域为复平面, 单值函数.

3 有理分式函数定义

$$\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\cdots+b_mz^m} \tag{1.13}$$

性质: 定义域为复平面上分母不为零的点的集合, 单值函数.

上式中 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,b_0,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为复常数, m,n 为正整数.

4 根式函数定义

$$\sqrt[n]{z-a} \tag{1.14}$$

性质: 定义域为复平面, 多值函数.

5 指数函数定义

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y) \tag{1.15}$$

性质:

(1) 定义域为复平面, 单值函数, 且 $\mathrm{e}^z\neq 0$.

(2) $|\mathrm{e}^z|=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^z)=y+2k\pi$($k$ 为任何整数).

(3) $\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}$.

(4) $\mathrm{e}^{z+\mathrm{i}2k\pi}=\mathrm{e}^z\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi}=\mathrm{e}^z$, 即 e^z 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$.

6 三角函数定义

$$\sin z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \quad \cos z=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \tag{1.16}$$

性质:

(1) 定义域为复平面, 单值函数.

(2) $\sin z$ 是奇函数, $\cos z$ 是偶函数.