报考研究生复习丛书

YAN
JIU
SHENG

理论力学复习纲要

中国质量出版社

理论力学复习纲要

中国展望出版社

编 辑 说 明

《报考研究生复习丛书》是为了帮助广大青年复习有关课程，应考硕士研究生，约请有丰富教学经验的教师，根据部颁教学大纲和报考研究生的要求而编写的。力求使同学们通过学习，进一步掌握基本原理，明确基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。本丛书可作为在校学生和社会青年的辅导读物，也可供有关教师和工程技术人员参考。

本丛书包括：《大学政治理论课纲要》、《大学英语复习指导》、《高等数学复习纲要》、《大学物理复习纲要》、《物理化学复习纲要》、《化工原理复习纲要》、《理论力学复习纲要》、《材料力学复习纲要》、《结构力学复习纲要》、《电工基础复习纲要》。

本套丛书由宋权、席庆义主编。

理论力学复习纲要

高鹏鹄　主编

中国展望出版社 出版

（北京西城区太平桥大街4号）

南京京新印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本787×1092毫米1/32　印张8.125

128千字　1985年11月　北京第1版

第1次印刷　1—10,000册

统一书号：7271·085　定价：1.70元

前　言

《理论力学复习纲要》是宋权、席庆义主编的《报考研究生复习丛书》之一、根据教学大纲和报考硕士研究生的要求而编写成的。全书每章包括提要、例题、习题三个部分，力求内容精炼,例题丰富,有一题多解,有分析比较,有正误对比。力图通过有一定难度的典型例题剖析,总结出解题的思路和方法,以帮助读者加深对理论力学内容的理解和分析问题能力的提高,掌握解题的要领。

全书共十一章，第一、四、十章由刘元懿编写，第二、六、七章由刘会川编写，第三、五、八、九章由江礼斌编写，第十一章由高鹏鹄编写。全书由高鹏鹄主编，中国科学技术大学徐燕侯副教授审稿。

本书可作为工科大学学生报考研究生的参考书，也可供力学教师和工程技术人员参考，对于夜大、电大和函大的学生，也有一定的参考价值。

限于编者的水平，书中难免有缺点与错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

一九八五年八月

目　录

第一章　力系的简化与平衡

力系的简化与平衡是静力学研究的两个基本问题，力系的简化实质上就是力系的等效替换，这种处理方法对于建立力系的平衡条件（静力学）和明确力系对物体的作用效果（动力学）都具有重要意义。按照力系的平衡条件，讨论物体系统（组合体）的平衡问题是本章的重点。

Ⅰ　提　　要

（一）力系的简化

1．力系的主矢和主矩

力系向一点的简化理论依据是力线平移定理。

力系向空间任一点O简化，一般情况下可得到一个力$\mathbf{R}'$及一个力偶矩矢为$\mathbf{M}_0$的力偶。该力$\mathbf{R}'$的力矢，称为原力系的主矢，它等于原力系所有各力的矢量和，即

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$$

主矢的大小和方向分别为

$$R' = \sqrt{\left(R'_x\right)^2 + \left(R'_y\right)^2 + \left(R'_z\right)^2}$$

$$\cos(\mathbf{R}',\mathbf{i}) = \cos\alpha = \frac{R'_x}{R'}$$

$$\cos(\mathbf{R}',\mathbf{j}) = \cos\beta = \frac{R'_y}{R'}$$

$$\cos(\mathbf{R}', \mathbf{k}) = \cos\gamma = \frac{R'_z}{R'}$$

该力偶的矩矢$\mathbf{M}_0$称为原力系对简化中心O的主矩，它等于原力系中所有力对简化中心O的力矩的矢量和，即

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{m}_0(\mathbf{F}_i)$$

主矩的大小及方向分别是

$$M_0 = \sqrt{[\sum m_x(\mathbf{F})]^2 + [\sum m_y(\mathbf{F})]^2 + [\sum m_z(\mathbf{F})]^2}$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{i}) = \cos\alpha' = \frac{\sum m_x(\mathbf{F})}{M_0}$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{j}) = \cos\beta' = \frac{\sum m_y(\mathbf{F})}{M_0}$$

$$\cos(\mathbf{M}_0, \mathbf{K}) = \cos\gamma' = \frac{\sum m_z(\mathbf{F})}{M_0}$$

在力系简化的过程中，简化中心可以任意选择。一般情况下，主矢与简化中心的选择无关，但主矩将随所选的不同的简化中心而改变其大小及方向。

2.力系简化的最终结果

力系简化的最终结果，可根据向一点简化的初步结果来判别，一般情况下，可能会出现合力、合力偶，力螺旋及平衡四种结果如下表所示

<table>
<tr><th colspan="3">力系向一点简化结果</th><th colspan="2">力系简化的最终结果</th></tr>
<tr><td colspan="3">$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{M}_0 \neq 0$</td><td colspan="2">力螺旋</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{M}_0 = 0$</td><td rowspan="2">$\mathbf{R}' \neq 0$</td><td>$\mathbf{M}_0 = 0$</td><td rowspan="2">合力</td><td>作用线通过矩心O</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{M}_0 \neq 0$</td><td>作用线过O' $\left(OO' = \frac{|M_0|}{R'}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbf{R}' = 0$</td><td>$\mathbf{M}_0 = 0$</td><td colspan="2">平　衡</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{M}_0 \neq 0$</td><td colspan="2">合力偶</td></tr>
</table>

（二）力系的平衡方程式

1.空间一般力系的平衡方程式

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma m_x(\mathbf{F}) = 0$$
$$\Sigma Y = 0, \quad \Sigma m_y(\mathbf{F}) = 0$$
$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma m_z(\mathbf{F}) = 0$$

该方程组为三投影三力矩式，是最基本形式，除此还有二投影四力矩式，一投影五力矩式及六力矩式。

2.平面一般力系的平衡方程式

$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma m_A(\mathbf{F}) = 0$$

或
$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma m_A(\mathbf{F}) = 0$$
$$\Sigma m_B(\mathbf{F}) = 0$$

其中A、B两点连线不可垂直于x轴；

或　　$\Sigma m_A(\mathbf{F}) = 0$

$$\sum m_B(\mathbf{F}) = 0$$
$$\sum m_C(\mathbf{F}) = 0$$

其中A、B、C三点不可共线。

（三）力在轴上的投影、力对轴的矩和力对点的矩

1.力在轴上的投影

（1）已知力F与坐标轴x、y、z正向夹角是α、β、γ，则力F在各坐标轴上的投影

$$F_x = F\cos\alpha, \qquad F_y = F\cos\beta, \qquad F_z = F\cos\gamma$$

（2）已知力F对坐标平面oxy的夹角θ以及力F在该面上的投影$\mathbf{F}_{xy}$与轴x的夹角φ，则力F在各坐标轴上的投影

$$F_x = F_{xy}\cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi$$
$$F_y = F_{xy}\sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi$$
$$F_z = F\sin\theta$$

2.力对轴的矩

（1）力F对任一轴Z的矩是代数量，它等于此力在该轴的垂面上的投影$\mathbf{F}_{xy}$对该面与轴Z交点O的矩，即

$$m_z(\mathbf{F}) = m_0(\mathbf{F}_{xy})$$

力F对轴x、y、z的矩的解析表达式

$$m_x(\mathbf{F}) = yZ - zY$$
$$m_y(\mathbf{F}) = zX - xZ$$
$$m_z(\mathbf{F}) = xY - yX$$

其中x、y、z是力F作用点的坐标，X_x、Y_y、Z_z是力F在轴x、y、z上的投影

3.力F对点O的矩是矢量，它等于

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{K} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yZ - zY)\mathbf{i} + (zX - xZ)\mathbf{j} + $$
$$+ (xY - yX)\mathbf{K}$$

4.力对点的矩与力对通过该点的轴的矩的关系

力对点的矩矢在通过该点的某轴上的投影，等于此力对该轴的矩，即

$$[\mathbf{m}_0(\mathbf{F})]_z = m_z(\mathbf{F})$$

5.合力矩定理

对于任何具有合力的力系，合力对任一点（或轴）的矩等于力系中各力对同一点（或轴）的矩的矢量和（或代数和），即

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{R}) = \sum \mathbf{m}_0(\mathbf{F})$$

或
$$m_z(\mathbf{R}) = \sum m_z(\mathbf{F})$$

（四）关于受力分析

受力分析在静力学和动力学问题中占有重要位置，它是正确处理上述问题的前题，必须认真对待。

受力分析的理论依据是力和约束的基本性质。

1.力的基本性质

（1）力是物体间的相互机械作用，即引起物体间的机械运动变化或阻碍这种变化的作用。受力分析要抓住一个受字，即找出与研究对象有关连的周围物体对它的机械作用，画上所受到的力，同时要明确其对应的施力物体。

（2）作用与反作用：两物体间相互作用时所产生的作用力与反作用力，它们是等值、反向、共线且分别作用在两

个物体上的。是研究组合物体平衡问题的一个重要桥梁。

（3）简单力系的平衡条件

(a) 二力平衡条件是二力构件受力分析的依据，而组合物体的受力分析往往是从二力构件开始再进行各构件的受力分析。

(b) 作用在刚体上的三个互不平行的力平衡的必要条件是此三力作用线必汇交于一点。它为受三力而平衡的构件确定约束反力的方位提供了依据，尤其是用图解法进行运算时应用此条件更为广泛，但用解析法运算时，不一定采用此条件进行受力分析，因为有时会使运算繁琐。

2. 约束性质

（1）柔性约束反力沿柔索中心线，背离研究对象（拉力）。

（2）光滑接触约束（光滑的接触面、线及点；中间铰；铰链支座；各种类型的轴承等）。约束反力方位为过接触点（切点）沿公法线，指向为朝向研究对象。若接触点位置无法预先确定时，可用通过铰链中心或轴心的两个互相垂直分力或三个互相垂直分力表示。

（3）固定端约束　约束反力为作用于固定端截面处的一个力和一个力偶，在平面力系中往往用两个互相垂直的分力和一力偶表示，在空力系中则用三个互相垂直的分力和三个分力偶表示，在受力分析时，往往由于疏忽而将力偶丢掉而导致解题错误，应引起注意。

（五）静定问题与否的判断

静定结构的特点是系统中全部未知量的数目等于独立平衡方程式的数目。以平面一般力系为例，首先计算系统中所有

单个物体的数目n，因此可知有$3n$个独立平衡方程，再计算当系统每个物体都被拆开以后的全部未知量数目N，若$N=3n$，则可判定系统为平面静定结构，若$N>3n$则不是静定结构。

（六）解题要点

静力学解题的难点大部分集中于组合物体的平衡问题和有摩擦存在时的平衡问题，后者将在下章进行专题讨论，现就组合物体平衡问题的解题要点介绍如下：

1.正确判定系统静定与否，若不是静定系统，已超出范围，不予讨论。

2.适当选取分离体：组合物体的平衡问题一般情况仅仅以整体为研究对象往往解不出全部未知量的确定值，因此必须还要择优选取单个物体或部分物体作为分离体，直到能够解出全部未知量为止。选取分离体时一般从受力最少的构件如二力杆等开始，分离体中一般应包含已知条件和待求量，尽量使不需求的未知力少出现在分离体中。

3.正确画出分离体的受力图，以受力分析作为依据，慎重、正确地画出分离体所受到的每一个力，对所画出的每一个力必须明确其施力物体和分析的依据。受力图对解题的正确与否有重要意义，作受力图时“一着不慎”，有导致“满盘皆输”的后果。

4.熟练应用力在坐标轴上的投影、力对点（或对轴）的矩的计算方法，列出正确的平衡方程。为使计算尽可能简单，可选取与较多的力的作用线相平行或相垂直的轴作为坐标轴；选取较多的力的作用线相交的点作为矩心；在空间力系中选取与较多的力的作用线相平行或相交的轴为矩轴。

5.为保证答案正确，最后将计算结果进行总校核。

Ⅱ 例　　题

例1-1 试求图示中的二力$\mathbf{F}_1$和$\mathbf{F}_2$向xoy平面内的C点简化的结果。已知$F_1=100\text{N}$，$F_2=200\text{N}$，A、B、C三点的坐标分别为(3，0，4)；(5，5，6)和(3，5，0)，长度单位为m。

解 本题为空间一般力系向一点简化的计算，一般情况可得一力和一力偶，力的大小和方向等于原力系的主矢$\mathbf{R}'$，主矢$\mathbf{R}'$与简化中心位置无关。力偶矩矢等于原力系对C点的主矩$\mathbf{M}_C$，主矩$\mathbf{M}_C$与简化中心位置有关。本题的简化中心C点与坐标原点O不重合，计算时要特别引起注意。

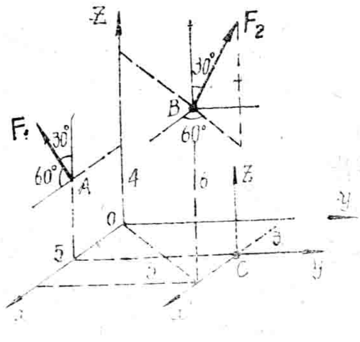

图 1-1

（一）主矢$\mathbf{R}'$的计算

$$R'_x=F_1\cos60^\circ+F_2\cos60^\circ\cos60^\circ=100\text{N}$$

$$R'_y=0+F_2\cos60^\circ\cos30^\circ=50\sqrt{3}\text{N}$$

$$R'_z=F_1\cos30^\circ+F_2\cos30^\circ=150\sqrt{3}\text{N}$$

$$\therefore\ R'=\sqrt{\left(R'_x\right)^2+\left(R'_y\right)^2+\left(R'_z\right)^2}=291.5\text{N}$$

主矢$\mathbf{R}'$的方向用其与$x'y'z'$轴的方向余弦表示，即

$$\cos(\mathbf{R}',\mathbf{i}')=\frac{R'_x}{R'}=\frac{100}{291.5}=0.343$$

$$\cos(\mathbf{R}',\mathbf{j}')=\frac{R'_y}{R'}=\frac{50\sqrt{3}}{291.5}=0.297$$

$$\cos(\mathbf{R}',\mathbf{k}')=\frac{R'_z}{R'}=\frac{150\sqrt{3}}{291.5}=0.891$$

（二）主矩$\mathbf{M}_C$的计算

根据力系简化理论，主矩$\mathbf{M}_C$的大小为

$$M_C=\sqrt{M_{Cx'}^2+M_{Cy'}^2+M_{Cz'}^2}$$

其中

$$\begin{aligned}
M_{Cx'}&=[\Sigma \mathbf{m}_C(\mathbf{F})]_{x'}=\Sigma m_{x'}(\mathbf{F})\\
&=\Sigma y'Z'-\Sigma z'Y'\\
M_{Cy'}&=[\Sigma \mathbf{m}_C(\mathbf{F})]_{y'}=\Sigma m_{y'}(\mathbf{F})\\
&=\Sigma z'X'-\Sigma x'Z'\\
M_{Cz'}&=[\Sigma \mathbf{m}_C(\mathbf{F})]_{z}=\Sigma m_{z'}(\mathbf{F})\\
&=\Sigma x'Y'-\Sigma y'X'
\end{aligned}$$

由于题中所给的x、y、z，是指各力的作用点在以简化中心O为原点的直角坐标系中的坐标，而在上式中应是A、B两点在$x'y'z'$坐标系中的坐标，为此必须首先进行坐标变换，参看图1-1

$x'_A=3-3=0$，　　$x'_B=5-3=2$

$y'_A=0-5=-5$，　　$y'_B=5-5=0$

$$z'_A=4-0=4,\qquad z'_B=6-0=6$$

$$M_{cx'}=\Sigma y'Z'-\Sigma z'Y'=\left[y'_AF'_{1z}+y'_BF'_{2z}\right]$$

$$-\left[z'_AF'_{1y}+z'_BF'_{2y}\right]=\left[(-5)(50\sqrt{3})\right.$$

$$\left.+(0)(100\sqrt{3})\right]-\left[(4)(0)+(6)(50\sqrt{3})\right]$$

$$=-550\sqrt{3}\,\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{cy'}=\Sigma z'X'-\Sigma x'Z'$$

$$=[(4)(50)+(6)(50)]-[(0)(50\sqrt{3})$$

$$+(2)(100\sqrt{3})]=(500-200\sqrt{3})\mathrm{N\cdot m}$$

$$M_{cz'}=\Sigma x'Y'-\Sigma y'X'$$

$$=[(0)(0)+(2)(50\sqrt{3})]-[(-5)(50)$$

$$+(0)(50)]=(100\sqrt{3}+250)\mathrm{N\cdot m}$$

$$\therefore\ M_C=\sqrt{M_{Cx'}^2+M_{Cy'}^2+M_{Cz'}^2}=1053.66\mathrm{N\cdot m}$$

主矩$\mathbf{M}_C$的方向用其与$x'y'z'$的方向余弦表示，即

$$\cos(\mathbf{M}_c,\mathbf{i}')=\frac{M_{cx'}}{M_c}=\frac{-550\sqrt{3}}{1053.66}=-0.904$$

$$\cos(\mathbf{M}_c,\mathbf{j}')=\frac{M_{cy'}}{M_c}=\frac{500-200\sqrt{3}}{1053.66}=0.146$$

$$\cos(\mathbf{M}_c,\mathbf{k}')=\frac{M_{cz'}}{M_c}=\frac{100\sqrt{3}+250}{1053.66}=0.402$$

通过以上的运算可知，要正确地进行力系的简化必须明确主矢、主矩的概念，熟练掌握力在坐标轴上的投影以及力

对点的矩的计算方法。

例1-2 图1-2a、b所示为两个组合体，其中A为固定端，B分别为可动和固定铰链支座，C及D为中间铰，E为光滑接触，**P**作用于C铰上，力偶M作用于DE杆上，试判断两结构静定与否，并计算出静定结构的A、B两处的约束反力。

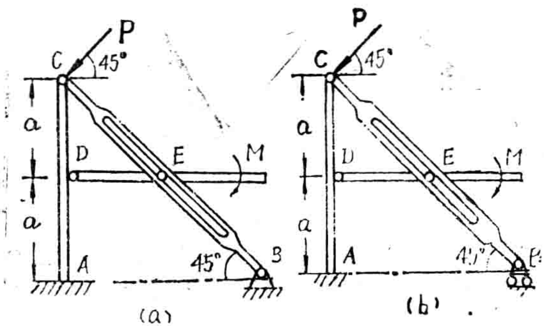

图 1-2

解 1.静定与否的判定：先计算组成系统的单个物体的数目n，再计算当系统全部拆开后的全部未知量数目N，并比较之，在本题中要注意C铰上作用一力**P**，铰C对AC作用力和铰C对BC的作用力，并非等值，反向，所以折开铰C出现四个未知量，而铰C受汇交力系而平衡，只有两个独立方程。

图a：未知量$N=12$，而独立方程数为$3\times3+2\times1=11$，所以不是静定结构。

图b：未知量$N=11$，而独立方程数亦为11，故结构是静定的。

2.求图b结构中的A、B约束反力

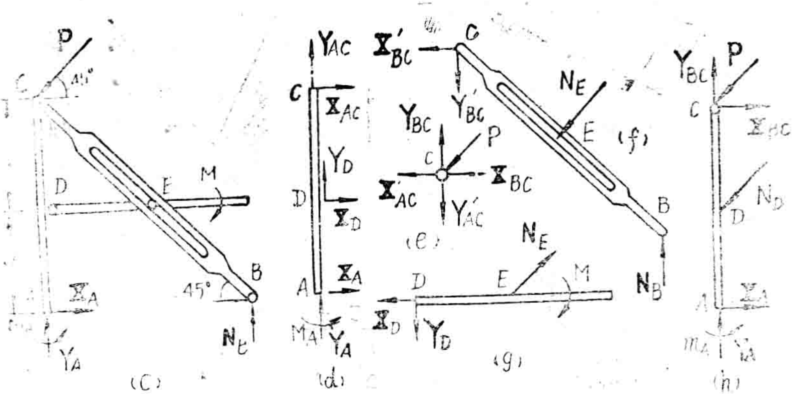

图 1-2

（1）以整体为研究对象，作受力图如图c所示，共有四个待求未知量，不能解出全部未知量的确定值，必须拆开整体，另选分离体。

（2）以AC为分离体，受力分析如图d所示，其中X_{AC}，Y_{AC}为铰C对AC的作用力

$$\Sigma X=0,\quad X_A+X_D+X_{AC}=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad Y_A+Y_D+Y_{AC}=0$$

$$\Sigma m_A(F)=0,\quad -X_D\cdot a-X_{AC}\cdot 2a+M_A=0$$

（3）再以铰C为分离体，受力如图e所示

$$\Sigma X=0,\quad -X'_{AC}+X_{BC}-P\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\Sigma Y=0,\quad -Y'_{AC}+Y_{BC}-P\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

（4）再以BC为分离体，受力如图f所示