

权威 实用 经典




2016年

考研数学

最新精选600题 (理工类)

主编 / 黄先开 曹显兵

- ✓ 权威名家精选配套习题，复习全程使用
- ✓ 全书分三部分，精编精选典型习题，难度适中，数量适当
- ✓ 解答详细精准，循序渐进，提供多种解法



 中国人民大学出版社

2016

年

考研数学

最新精选600题(理工类)

主 编 黄先开 曹显兵
副主编 李晋明 刘喜波

中国人民大学出版社

· 北京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

2016 年考研数学最新精选 600 题: 理工类/黄先开, 曹显兵主编. —北京: 中国人民大学出版社, 2015. 1

ISBN 978-7-300-20770-4

I. ①2… II. ①黄… ②曹… III. ①高等数学-研究生-入学考试-习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 022316 号

2016 年考研数学最新精选 600 题 (理工类)

主 编 黄先开 曹显兵

2016 Nian Kaoyan Shuxue Zuixin Jingxuan 600 Ti (Ligonglei)

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室)

010-62511770 (质管部)

010-82501766 (邮购部)

010-62514148 (门市部)

010-62515195 (发行公司)

010-62515275 (盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.1kao.com.cn> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京市鑫霸印务有限公司

规 格 185 mm×260 mm 16 开本

版 次 2015 年 1 月第 1 版

印 张 24.5

印 次 2015 年 1 月第 1 次印刷

字 数 564 000

定 价 46.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

前言

要想学好数学，必须做一定数量的习题。做习题可以帮助考生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与解题方法。只有通过做习题，才能发现自己的问题所在，才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与解题方法，才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。因此，很多经过第一轮复习（主要指对教材的复习）和第二轮复习（主要指有针对性地用考研复习参考书的复习，如《考研数学高分复习全书》）的同学，都会问在哪儿可找到好的习题做进一步的练习？根据我们考研辅导的体会，在辅导班上也经常有一些很好的典型例题因时间关系而不能讲授，但这些题在复习中又是绝对应该掌握的。因此根据广大考生的现实需要，也是为了对我们课堂讲授做一个重要补充，作者在查阅大量相关辅导资料的基础上经过反复比较、筛选和重新编制，最后汇编成这本习题精选，相信能较好地满足广大考生第三轮复习的需要。

研究生入学考试是一种具有选拔性的水平考试，除了考查考生对数学的基本概念、基本理论和基本方法的掌握情况外，更注重考查考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力。本书偏重于能力训练，特别适合于有一定基础的考生作为进一步提高之用。需要提醒考生注意的是，在考研数学复习的过程中，个别考生眼高手低，没养成良好的做题习惯，在没有经过深入思考的情况下就匆忙翻看解答，这样是很难取得理想成绩的。特别是本书精选习题涉及知识点多、题型新颖、难度较高、综合性强，往往需要灵活运用所学知识才能作答。因此希望考生在做题时，如果遇到困难，千万不要急于看解答，一定要多思考。要注意，这正是搞清概念、弄清原理、熟悉方法、培养思维能力的重要训练过程。只有这样才能真正全面系统地掌握所学知识，才能真正提高应试水平，才能真正取得好成绩。

值得提出的是，本书作者基础理论扎实，研究水平较高，具有丰富的考研辅导经验，所编选习题代表了考研数学未来命题的趋势，相信本书是一本具有重要参考价值的复习用书。由于成书比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请大家批评指正。

编者

2015年1月于北京

目 录

第一部分 高等数学	1	第八章 多元函数积分学——重积分	121
第一章 函数、极限与连续	3	精选习题	121
精选习题	3	分析解答	124
分析解答	6	* 第九章 多元函数积分学——曲线、 曲面积分及其场论初步	143
第二章 导数与微分	23	精选习题	143
精选习题	23	分析解答	147
分析解答	25	* 第十章 无穷级数	170
第三章 中值定理	40	精选习题	170
精选习题	40	分析解答	173
分析解答	42	第十一章 常微分方程	188
第四章 一元函数积分学	56	精选习题	188
精选习题	56	分析解答	191
分析解答	59	第二部分 线性代数	209
第五章 一元函数微积分的应用	78	精选习题	211
精选习题	78	分析解答	232
分析解答	81	* 第三部分 概率论与数理统计	305
* 第六章 向量代数和空间解析几何	96	精选习题	307
精选习题	96	分析解答	323
分析解答	97		
第七章 多元函数微分学	106		
精选习题	106		
分析解答	108		

第一部分

PART ONE



高等数学

函数、极限与连续

精选习题

一 填空题

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ 1+x^2, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ -x^3, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 2x + 1} + x + 2}{\sqrt{x^2 + \cos x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{3}{x} \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设 $f(x)$ 连续, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) = \int_0^x (x^2 + 1 - \cos t) f(t) dt$ 是与 x^3 等价的无穷小量, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

二 选择题

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中阶数最高的是().

(A) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

(B) $3x^3 - 4x^4 + 5x^5$

(C) $e^{x^2} - \cos x$

(D) $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且 $f(x) < g(x)$, 则必有().

(A) $f(-x) > g(-x)$

(B) $f'(x) < g'(x)$

(C) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(D) $\int_0^x f(t) dt < \int_0^x g(t) dt$

3. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \sin \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 有().

(A) 两个第一类间断点

(B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点和一个第二类间断点

(D) 一个第一类间断点和一个第二类间断点

4. 下列函数:① $\frac{\sin x}{x^2}$;② $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{1-x}}$;③ $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$. 在 $(0,1)$ 内有界的有

() 个.

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

5. 设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^4} = -2$, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处().

(A) 不可导

(B) 可导且 $f'(a) \neq 0$

(C) 有极大值

(D) 有极小值

三 解答题

1. 讨论函数 $f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界性.

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 以 T 为周期, 令 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 求证:

(1) $F(x) = kx + \varphi(x)$, 其中 k 为某常数, $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$.

3. 设 $f(x)$ 具有连续导数, 且满足 $f(x) = x + \int_0^x tf'(x-t) dt$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

4. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{\sqrt{1+x^4} - 1}$.

5. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\sin x)^x}{x^2 \arctan x}$.

6. 已知曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \ln \cos x} \int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt.$$

7. 设 $f(x) = nx(1-x)^n (n=1, 2, \dots)$, M_n 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$.

8. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{|\sin x|}{\ln(1+x)} \right]$.

9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^{2x}) - \cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

10. 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 \ln \frac{x+1}{x-1} - 2x^2 \right)$.

11. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内可导, 且 $f(a) \neq 0, a \neq 0$, 求极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{1}{(x-a)f(a)} - \frac{1}{\int_a^x f(t) dt} + \frac{1}{2x-a} \right].$$

12. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

13. 设 $1 \leq x < +\infty$ 时, $0 < f'(x) < \frac{1}{x^2}$, 且 $f'(x)$ 连续, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ 存在.

14. 设 $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 证明: 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限值.

15. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2 + 1}$ (用定积分求极限).

16. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

17. 设 $f(x)$ 是满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = -1$ 的连续函数, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) dt$ 是与 x^n 同阶的无穷小量, 求正整数 n .

18. 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^3$. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}$.

19. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{1}{n} - \arctan \frac{1}{n+1} \right)$.

20. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^3 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$.

21. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, f''(0) \neq 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^\alpha - \sin x} = \beta (\beta \neq 0)$, 求 α, β (其中 $\beta \neq 0$).

22. 设 $f(x)$ 在 $(-a, a)$ 内连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 求证: 对任给的 $0 < x < a$, 存在 $0 < \theta < 1$, 使 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$.

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.

23. 已知抛物线 $y = px^2 (p > 0)$.

(1) 计算抛物线在直线 $y = 1$ 下方的弧长 l .

(2) 求极限 $\lim_{p \rightarrow \infty} l$.

24. 设 $f(1) = 0, f'(1) = a$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2f(e^{x^2})} - \sqrt{1 + f(1 + \sin^2 x)}}{\ln \cos x}$.

25. 设 $g(x)$ 是微分方程 $g'(x) + g(x) \sin x = \cos x$ 满足条件 $g(0) = 0$ 的解, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

26. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{x} = a$,

$$\text{已知 } f(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^1 g(x^2 t) dt - 1}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ \frac{a + b \cos x}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \text{ 在 } x = 0 \text{ 处连续, 求 } a, b.$$

$$27. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} (x+2) \arctan \frac{1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2 \\ 0, & x = \pm 2 \end{cases} \text{, 讨论函数 } f(x) \text{ 的连续性, 若有间断点,}$$

指明其类型.

分析解答

一 填空题

1. 应填 1.

$$\text{解 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 - g(x), & g(x) \leq 0 \\ 1 + g^2(x), & g(x) > 0 \end{cases}$$

$$\text{而 } g(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0, \quad g(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0,$$

$$\text{所以 } f[g(x)] = \begin{cases} 1 + x^4, & x < 0 \\ 1 + x^3, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{又因为 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3) = 1.$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1.$$

评注: 此题可不必求出 $f[g(x)]$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^4) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f[g(x)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(-x^3) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^3) = 1.$$

$$\text{因此 } \lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] = 1.$$

2. 应填 $\frac{9}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + f(x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - \sin 3x}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 3x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

3. 应填 2.

解 分子分母同除以 x , 须注意 x 为负.

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{9 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{\cos x}{x^2}}} = \frac{-3 + 1}{-1} = 2.$$

评注:应注意 x 的符号,若改为 $x \rightarrow \infty$,则此极限不存在.

4. 应填 3.

解 因为 $\frac{3}{x} - 1 < \left[\frac{3}{x}\right] \leq \frac{3}{x}$,

当 $x > 0$ 时, $3 - x < x\left[\frac{3}{x}\right] \leq 3$,

当 $x < 0$ 时, $3 \leq x\left[\frac{3}{x}\right] < 3 - x$.

由夹逼准则,有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x\left[\frac{3}{x}\right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x\left[\frac{3}{x}\right] = 3$.

所以, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{x}\right] = 3$.

评注:利用夹逼定理求极限是一种重要的方法,关键是找出两个特殊的函数(或数列).

5. 应填 $\frac{6}{7}$.

解 由等价无穷小量的定义及洛必塔法则,可得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[x^2 \int_0^x f(t) dt + \int_0^x (1 - \cos t) f(t) dt \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2} \left[2x \int_0^x f(t) dt + (x^2 + 1 - \cos x) f(x) \right] \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x} + \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - \cos x}{x^2} f(x) \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot f(0) \\ &= \frac{7}{6} f(0). \end{aligned}$$

所以, $f(0) = \frac{6}{7}$.

评注:含参数的变限积分,不能直接求导,必须经变量替换将参变量提至积分号外再求导.

二 选择题

1. 应选(D).

解 当 $x \rightarrow 0$ 时

$$\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \sim x^2,$$

$$3x^3 - 4x^4 + 5x^5 = x^3(3 - 4x + 5x^2) \sim 3x^3,$$

$$e^{x^2} - \cos x = 1 + x^2 + \theta(x^2) - \left[1 - \frac{1}{2}x^2 + \theta(x^2) \right] = \frac{3}{2}x^2 + \theta(x^2) \sim \frac{3}{2}x^2$$

$\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$ 由 $\int_0^u \frac{\sin t^2}{t} dt$ 与 $u = 1 - \cos x$ 复合而成. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\sin x^2}{x} \sim x$, $\int_0^x \frac{\sin t^2}{t} dt$ 与 x^2 同阶, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$. 所以, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{1-\cos x} \frac{\sin t^2}{t} dt$ 是 x 的 $2 \times 2 = 4$ 阶无穷小. 故选(D).

2. 应选(C).

解 由 $f(x)$ 、 $g(x)$ 可导知, $f(x)$ 、 $g(x)$ 连续. 于是有: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

又 $f(x_0) < g(x_0)$, 所以有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. 故选(C).

评注: 本题也可用排除法. 取 $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$, 则 $f(x) < g(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$. 但(A), (B), (D) 不成立, 故选(C).

3. 应选(C).

解 注意到当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$, 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$, 易求得

$$f(x) = \begin{cases} -3\sin \frac{1}{x}, & 0 < |x| < 1 \\ -\frac{1}{2}\sin \frac{1}{x}, & |x| = 1 \\ 2\sin \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases},$$

可见, $x = -1$ 和 $x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点, 而 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, 故选(C).

评注: 函数 $f(x)$ 的间断点 x_0 分为两类: $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限存在的间断点称为第一类间断点, 其中左、右极限相等的间断点称为可去间断点. $f(x)$ 在 x_0 的左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 应选(B).

解 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty$,

而 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = -\frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{\ln(1-x)} = 0.$$

所以, 只有函数 $\arctan \frac{|x|}{x \ln(1-x)}$ 在 $(0, 1)$ 内有界. 故选(B).

评注: 判断函数的有界性除了用定义及已知函数的有界性外, 下列结论也是很有用的: 设 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 若 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

5. 应选(C).

解 由局部保号性定理, 存在 a 的去心邻域 $\dot{U}(a)$, 使得

当 $x \in \dot{U}(a)$ 时, $\frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^4} < 0$, 即 $f(x) < f(a)$,

而由 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^4} (x - a)^3 = (-2) \times 0 = 0$,

知 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 当然在 $x = a$ 处连续.

所以, $f(x)$ 在 $x = a$ 处有极大值. 故选(C).

评注: 注意极限表达式中隐含的连续、可导等条件及结论.

三 解答题

1. 分析 因为 $f(x)$ 为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 要证 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界, 只要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

解 由 $f(-x) = (-x)e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt$ 及 $\int_0^{-x} e^{t^2} dt \xrightarrow{t=-u} -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt$ 可知:
 $f(-x) = f(x)$.

所以, $f(x)$ 是偶函数. 只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

于是, 对于 $\epsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $A > 0$, 当 $x > A$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

即当 $x > A$ 时, 有 $0 < f(x) < 1$.

因为 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上连续, 因此, $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上有界, 注意到在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \geq 0$. 故, $\exists M_1 > 0$, 使得 $\forall x \in [0, A]$, 有 $0 \leq f(x) \leq M_1$. 取 $M = \max\{1, M_1\}$, 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 从而可知, 对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$.

评注:

(1) 要判断函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界性, 需考察 $f(x)$ 在间断点 x_0 及在无穷远点的极限. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 附近有界, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的左邻域内有界, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的右邻域内有界. 若 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 又 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 均存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

在闭区间上连续函数一定有界, 但在开区间上不连续的函数也可能有界. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续, 但 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有界.

(2) 在本题的证明中取 $\epsilon = \frac{1}{2}$ (或取其他一个确定的正数) 是非常必要的. 如果用 “ $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0$, 当 $x > A$ 时, 有 $|f(x) - \frac{1}{2}| < \epsilon$ ” 来证明 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有界就是错误的, 因为此时的“界”不确定.

(3) 用变量替换可证明 $f(x)$ 与其原函数 $\int_0^x f(t) dt$ 的奇偶性有着密切的联系:

若 $f(x)$ 连续, 则

1) $\int_0^x f(t) dt$ 为奇(偶) 函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为偶(奇) 函数.

2) $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^x f(t) dt$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数.

2. 分析 只要确定常数 k , 使得 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 以 T 为周期.

解 (1) 由 $\varphi(x+T) = F(x+T) - k(x+T)$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x f(t) dt - kx + \int_x^{x+T} f(t) dt - kT \\ &= \varphi(x) + \int_0^T f(t) dt - kT \quad \left(\int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt \right) \end{aligned}$$

令 $k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$, 则 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 是以 T 为周期的周期函数. 从而有 $F(x) = kx + \varphi(x)$.

(2) 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\int_0^x f(t) dt)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不一定存在, 所以不能用洛必塔法则求该极限.

但 $\int_0^x f(t) dt$ 可写成:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{x}{T} \int_0^T f(t) dt + \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续且以 T 为周期. 于是 $\varphi(x)$ 在 $[0, T]$ 上有界, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 所以,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (\text{无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量}) \end{aligned}$$

评注:

(1) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数, 则有如下结论:

1) $f(x)$ 的原函数 $\int_a^x f(t) dt$ 是以 T 为周期的函数的充分必要条件是 $\int_0^T f(t) dt = 0$.

2) $\forall a \in \mathbf{R}, \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$.

3) $\int_0^{nT} f(x) dx = n \int_0^T f(x) dx$.

(2) 对“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型极限, 当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大量时, 可由洛必塔法则得知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

但当 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且不为无穷大量时, 不能断定 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 不存在.

3. 分析 $f(x)$ 的表达式中含有参变量的积分, 应经变量替换将参变量移至积分号外或积分限上, 再求极限.

$$\int_0^x t f'(x-t) dt \xrightarrow{x-t=u} \int_0^x (x-u) f'(u) du$$

$$= x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

将参变量 x 提到积分号外后, 已知条件可化为:

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

解 由已知条件 $f(x) = x + \int_0^x t f'(x-t) dt$ 可化为

$$f(x) = x + x \int_0^x f'(u) du - \int_0^x u f'(u) du.$$

两边对 x 求导, 得:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \int_0^x f'(u) du + x f'(x) - x f'(x) \\ &= 1 + f(x) - f(0) \\ &= 1 + f(x) \quad (f(0) = 0). \end{aligned}$$

于是, $f(x) = e^x - 1$. 所以 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$.

评注:

(1) 本题的关键是求出 $f(x)$ 的表达式. 当已知条件是由积分方程给出时, 通过求导可得出 $f(x)$ 所满足的微分方程:

$$f'(x) - f(x) = 1, \quad f(0) = 0.$$

由通解公式, 可得通解为:

$$f(x) = e^{-\int (-1) dx} \left[\int 1 \cdot e^{\int (-1) dx} dx + c \right] = ce^x - 1.$$

由 $f(0) = 0$, 得 $f(x) = e^x - 1$.

一般地, 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为:

$$y = e^{-\int p(x) dx} \left[\int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + c \right].$$

(2) 在计算含参变量的积分时, 应通过变量替换将参变量提至积分号外或积分限上, 再作计算.

4. **分析** 是“ $\frac{0}{0}$ ”型, 用洛必塔法则, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1+x^4} - 1 \sim \frac{1}{2}x^4$, $\ln(1+x) \sim x$, $\sin^2 x \sim x^2$.

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{x^4} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x) \cdot 2 \sin x \cos x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{x^2} \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

5. **分析** 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $x^x = e^{x \ln x} \rightarrow 1$, $\arctan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1 \rightarrow 0$.

$$\text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^x \left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1 \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x \ln \left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) + 1\right]}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
 &= \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

评注:洛必塔法则是求“ $\frac{0}{0}$ ”和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式的重要工具,为了避免复杂的计算,减少错误,在使用该工具之前,应尽可能综合运用四则运算、连续性、恒等变形、等价无穷小替换和变量代换等方法进行简化.

在本题中我们分离出极限为 1 的因子 x^x ,使函数中“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式部分 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^x - 1}{x^3}$ 更为突出,并利用恒等变形,简化了后面的计算. 否则,如果直接用洛必塔法则,就会很麻烦.

6. 分析 由已知, $f(1) = 0, f'(1) = 1$, 有 $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u)}{u-1} = 1$.

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\ln \cos x = \ln[1 + (\cos x - 1)] \sim \cos x - 1 \sim -\frac{1}{2}x^2$.

令 $1 + e^{x^2} - e^t = u$, $\int_0^{x^2} e^t f(1 + e^{x^2} - e^t) dt = \int_1^{e^{x^2}} f(u) du$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^2\right)} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_1^{e^{x^2}} f(u) du}{x^4} \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) \cdot e^{x^2} \cdot 2x}{4x^3} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{x^2} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2})}{e^{x^2} - 1} \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = -f'(1) \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

评注:在求极限时要注意重要条件的应用. 例如:

(1) $f(x_0) = 0, f'(x_0) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A$ ($f(x)$ 在 x_0 连续).

(2) 若 $f'(x_0)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = x_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f[g(x)] - f[h(x)]}{x - x_0} = f'(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - h(x)}{x - x_0}.$$

7. 分析 先求 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值 M_n , 再求极限.

解 $f'(x) = n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1}$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $n^2 x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^n$, 即 $nx = 1-x$. 于是得驻点 $x = \frac{1}{n+1}$.

又 $f''\left(\frac{1}{n+1}\right) < 0$, 所以 $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n$ 为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内的极大值.

比较 $f(0) = 0, f(1) = 0$ 和 M_n 可知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $M_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) =$