几何中的逻辑推理
概念
命题 四种命题之间的关系
定理及其证明、反证法
几何变换
轴对称与中心对称
平移、轴对称和旋转变换
等积变换面积方法
几个重要的定理及其应用
三角形的“四心”及其性质
三角形的“四心”的概念及其性质
有关三角形“四心”的几组常用的定理
三角形“四心”的性质在解题中的应用

初中数学选修课导引

吕学江 孙洋◎编著

整数
整数的表示法 进位制
整数的整除性
奇数与偶数 质数与合数
最大公约数与最小公倍数
实数的整数部分和小数部分
简单的一次不定方程
代数式的恒等变换
恒等变换的基本方法
因式分解
方程与不等式
一元方程和它的根
构造二次方程解数学问题
方程的特殊解法
不等式
函数及其图象
函数图象的交点
函数的极值与条件极值
函数$y=|ax+b|$与$y=|ax^2+bx+c|$的图象
抽屉原理及其应用
抽屉原理
涂色问题

山东教育出版社

初中数学选修课导引

吕学江 孙洋◎编著

山东教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

初中数学选修课导引/吕学江,孙洋编著. —济南：山东教育出版社,2002
ISBN 7-5328-3558-8

Ⅰ.初... Ⅱ.①吕...②孙... Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 024905 号

初中数学选修课导引

编著 吕学江 孙 洋

出 版 者：山东教育出版社
（济南市纬一路 321 号 邮编：250001）
电 话：(0531)2092663 传真：(0531)2092661
网 址：http://www.sjs.com.cn
发 行 者：山东教育出版社
印 刷：山东新华印刷厂潍坊厂
版 次：2002 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印 数：1—6000
规 格：850mm×1168mm 32 开本
印 张：8.375 印张
插 页：3 插页
字 数：185 千字
书 号：ISBN 7-5328-3558-8/G·3195
定 价：12.00 元

前　　言

2001 年 7 月，国家教育部颁布了全日制义务教育《数学课程标准》，规定了学生在各学段应该达到的基本水平和目标．同时提出，内容设计要有一定的弹性，教材编写应满足学生的不同学习要求，为学有余力的学生提供更大的学习和发展空间．为适应新《课程标准》对初中学生数学学习的要求，我们编写了这本《初中数学选修课导引》．

本书内容覆盖了国家数学会普及委员会制订的《初中数学竞赛大纲》规定的知识，包括代数部分：整数、代数式的恒等变换、方程与不等式、函数及其图象、抽屉原理及其应用，几何部分：几何中的逻辑推理、几何变换、几个重要的定理及其应用、三角形的“四心”及性质共九章．内容既保持系统性和完整性，又不与课本知识重复．本书文字简洁，用笔精炼，注重解题思路的分析和解题方法的总结，每章节精选有代表性的例题进行分析详解，配有相应练习题及其简答，大部分题目选自国内外省级以上竞赛试题，适合初中学生课外学习，也可做为教师的辅导教程．

尽管我们反复推敲，几易其稿，但毕竟水平和经验有限，书中难免有欠缺之处，敬请专家和读者批评指正．

吕学江

孙　洋

2002 年 2 月

目　录

代　数

几 何

代数

第一章　整　　数

§1.1　整数的表示法　进位制

一、十进制整数的多项式表示

记数的方法叫做记数法.我们通常采用的是十进制记数法,它用0,1,2,3,4,5,6,7,8,9共十个数码记数,逢十进一,退一当十.一个整数从右向左分成个位,十位,百位…….

一个多位的整数应如何表示呢?例如从左到右以 a_3,a_2,a_1,a_0 为数码组成的四位数,为了区别于 $a_3a_2a_1a_0$,可表示为 $\overline{a_3a_2a_1a_0}$,其和式为:

$$a_3\times10^3+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$$

一般地,正整数 $\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$ 的和式:

$$a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0$$

称为十进制整数的多项式表示.其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是0到9的整数,且 $a_n\neq0$,a 是自然数.例如:

$$2998=2\times10^3+9\times10^2+9\times10+8$$

二、二进制整数的表示法

10叫做十进制记数法的基数.其实,任何一个大于1的自然数 P 都可以作为进位数记数法的基数,称为 P 进位制记数

法. P 进位制记数法采用 $0,1,2,\cdots,P-1$ 共 P 个数码记数,任何一个 P 进制正整数 N 都可以表示为:

$$N=a_n\times P^n+a_{n-1}\times P^{n-1}+\cdots+a_2\times P^2+a_1\times P+a_0$$

简记为 N_p,其中 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 是 $0,1,2,\cdots,P-1$ 的整数,且 $a_n\neq0$.

如 1011_2 是一个二进位制数,表示 $1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1$.

例 1 已知 $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+\overline{a}=1991$,求 a,b,c,d.

解:由题意,$a=1$,原式变为:$\overline{1bcd}+\overline{1bc}+\overline{1b}+1=1991$

因 $b\neq0$,否则左端之和百位上的数不可能为 9.

$\therefore(1000+\overline{bcd})+(100+\overline{bc})+(10+b)+1=1991$,

即 $\overline{bcd}+\overline{bc}+b=880$.

由右边 880 可知,$b=7$,

$\therefore\overline{7cd}+\overline{7c}+7=880$.

同理,$c\neq0$,得 $(700+\overline{cd})+(70+c)+7=880$,

$\therefore\overline{cd}+c=103$,

此时,c 只能等于 9,

$\therefore90+d+9=103$,

解得　$d=4$,

$\therefore a=1,b=7,c=9,d=4$.

例 2 整数 N 的首位数是 6,若将首位数去掉,新整数等于 $1/25N$,求整数 N 的最小值.

解:设 $N=6\times10^n+y$,其中 y 是一个 n 位数.

由题意,$6\times10^n+y=25y$,

$\therefore y=1/4\times10^n$

$\therefore N=6\times10^n+1/4\times10^n(n\geqslant2)$

当 $n=2$ 时,得 N 的最小值为 625.

三、十进制整数与二进制整数的互化

把十进制整数化成二进制整数，采用“2 除取余法”.

例 3 把 26_{10}化为二进制表示

解: 余数

2	26	……	0——2^0 的余数
2	13	……	1——2^1 的余数
2	6	……	0——2^2 的余数
2	3	……	1——2^3 的余数
2	1	……	1——2^4 的余数
	0		

利用上面的短除法，把每步的余数写出后，按箭头方向从下向上把各步余数排列出来，即得到它的二进制整数 11010.

$\therefore 26_{10} = 11010_2$

把二进制整数化为十进制整数，可直接用 P 进制整数的表示法写出.

例 4 把下列二进制整数表示为十进制整数.

① 1101_2，②$10001_2$.

解:(1)$1101_2 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2 + 1 = 13$.

(2)$10001_2 = 1\times 2^4 + 1 = 17$.

练习 1.1

1. 一个六位数，个位数字是 6，如果将 6 移至第一位前面，新六位数是原数的 4 倍，求这个六位数.

2. $\overline{abcd}$是一个四位自然数，已知$\overline{abcd} = 1995 + \overline{abc} + \overline{ab} + a$，那么$\overline{abcd} =$

3. 把十进制整数 34 化成二进制数，把二进制整数 101101 化成十进制数.

4. 求满足 $2^x \cdot 9^y = \overline{2x9y}$ 的 x, y 的值.

5. 求完全平方的四位数 $\overline{abcd}$，使 $\overline{ab} = \overline{cd} + 1$.

答案:

1. 解：设原六位数为 x，则

$$6 \times 10^5 + (x-6)/10 = 4x$$

解得：$x = 153846$.

2. 2243

3. 100010；45.

4. 解：由 x、y 为小于 10 的数码，2^x 为偶数，

$\therefore y$ 为偶数.

又 $9^4 = 6561 > \overline{2x94}$，$y = 0$ 时，$2^x = \overline{2x90}$ 不成立，

$\therefore y = 2$，这时 $2^x \cdot 81 = \overline{2x92}$，则 2^x 末位数是 2.

$\therefore x = 1, 5$.

但 $x = 1$ 不成立，故 $x = 5$.

5. 解：设 $\overline{cd} = x$，$\overline{abcd} = y^2$，则

$$100(x+1) + x = y^2$$

$\therefore (y+10)(y-10) = 101x$.

因 101 是质数，则 $y+10$，$y-10$ 中必有一个是 101 的倍数，而 y 是大于 30 的两位数.

$\therefore y - 10$ 不可能是 101 的倍数，故 $y + 10$ 是 101 的倍数.

又 $y + 10 \leqslant 109$，

$\therefore y + 10 = 101$，于是 $y = 91$，

$\therefore$ 所求的四位数是 $91^2 = 8281$.

§1.2 整数的整除性

一、整除的定义及性质

1. 定义:设两个整数 a、$b(b\neq0)$,若存在一整数 c 满足 $a=bc$,则称 b 整除 a 或 a 被 b 整除. 记作 $b|a$.

2. 性质:

(1)若 $b|a$,m 为非零整数,则 $bm|am$.

(2)若 $b|a$,$c|b$,则 $c|a$.

(3)若 $b|ac$,且 a、b 互质,则 $b|c$.

(4)若 $c|a$,$c|b$,m、n 为整数,则 $c|(ma+mb)$.

(5)若多项式 $a_1+a_2+\dots\dots a_n$ 能被 c 整除,又除了某一项外其余各项都能被 c 整除,则该项也能被 c 整除.

二、带余除法及其性质

任意整数 a 除以 b 都可以表示为 $a=bc+r(0\leqslant r<|b|)$ 的形式,c 是 a 除以 b 的不完全商,r 是余数.

特别地,$r=0$ 时,a 能被 b 整除. 此时,a 叫做 b 的倍数,b 叫做 a 的约数.

若两数 a_1、a_2 除以某数 b 的余数是 r_1、r_2,则 a_1+a_2、a_1-a_2、a_1a_2 除以 b 的余数分别等于 r_1+r_2、r_1-r_2、r_1r_2 除以 b 的余数.

三、同余数及其应用

设 m 为一正整数,若两整数 a、b 除以 m 有相同的余数,则称 a 与 b 对 m 同余.

对于给定的正整数 m,可以把全部整数按除以 m 的余数的不同(分别为 $0,1,2,\cdots,m-1$.)分成 m 类. 同类中的整数对 m

同余. 例如取 $m=4$,则全部整数可以分成 $4k$、$4k+1$、$4k+2$、$4k+3$(k 为整数)四类.

显然,任意 m 个连续整数必定分别在这个 m 个类中,因此,至少有一个能被 m 整除.

例 1 证明:任意整数的平方除以 3,余数不能为 2.

证明:一切整数可表示为 $3n$、$3n+1$、$3n+2$(n 为整数)三类.

$\because (3n)^2=9n^2$,

$(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1$,

$(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1$,

$\therefore$ 整数的平方除以 3 的余数是 0,1,不能为 2.

由上可知:任意 m 个连续整数之积 $a_1a_2\cdots a_m$ 必能被 $m(m-1)\cdots3\times2\times1$ 整除.

这是因为,任意两个连续整数 a_1,a_2 中,必有一个被 2 整除,则 $a_1\cdot a_2$ 能被 $2\times1=2$ 整除;任意三个数 a_1,a_2,a_3 中必有一个被 3 整除,又至少有一个被 2 整除,则 $a_1\cdot a_2\cdot a_3$ 能被 $3\times2\times1=6$ 整除.

依次类推,任意 m 个连续整数之积 $a_1a_2\cdots a_m$ 能被 $m(m-1)(m-2)\times\cdots\times2\times1$ 整除.

例 2 证明:$n(n+1)(2n+1)$能被 6 整除.

证明:$\because n(n+1)(2n+1)=n(n+1)[(n+2)+(n-1)]$

$=n(n+1)(n+2)+(n-1)n(n+1)$.

由 $n(n+1)(n+2)$是三个连续整数之积,能被 6 整除,$(n-1)n(n+1)$也是三个连续整数之积,能被 6 整除.

$\therefore n(n+1)(2n+1)$能被 6 整除.

例 3 证明:方程 $x^3-x-1988=0$ 没有整数根.

证明:原方程可变形为 $x(x+1)(x-1)=1988$,

若方程有整数根,这时 $x(x+1)(x-1)$为三个连续整数之积,必能被 3 整除,而 1988 不能被 3 整除.

∴原方程没有整数根.

四、数的整除特征

1. 能被 2,5 整除的数的特征是其末位数能被 2,5 整除.

2. 能被 4,25 整除的数的特征是其末两位数能被 4,25 整除.

3. 能被 3,9 整除的数的特征是其各位数字之和能被 3,9 整除 .

证明 3:以四位整数为例.

$$\begin{aligned}\overline{abcd}&=1000a+100b+10c+d\\&=999a+a+99b+b+9c+c+d\\&=9(111a+11b+c)+(a+b+c+d).\end{aligned}$$

这里,$9(111a+11b+c)$能被 3 整除,也能被 9 整除.因此,当原数的各位数字之和 $a+b+c+d$ 能被 3 整除时,$\overline{abcd}$必能被 3 整除;当 $a+b+c+d$ 能被 9 整除时,$\overline{abcd}$必能被 9 整除.

4. 能被 11 整除的数的特征是其奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差能被 11 整除.

证明 4:以四位数为例.

$$\begin{aligned}\overline{abcd}&=1000a+100b+10c+d\\&=1001a-a+99b+b+11c-c+d\\&=1001a+99b+11c+[(b+d)-(a+c)]\\&=11(91a+9b+c)+[(b+d)-(a+c)].\end{aligned}$$

显然,当奇数位上的数字之和与偶数位上的数字之和的差 $(b+d)-(a+c)$能被 11 整除时,原整数能被 11 整除.

5. 能被 7,13 整除的数的特征是：把这个数从个位向左每三位划一节，各奇数节的三位数之和减去各偶数节的三位数之和的差能被 7,13 整除.

证明 5：我们先证明 $10^{3n}-(-1)^n$ 都能被 7,13 整除.

根据乘法公式：$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$\begin{aligned}\therefore 10^{3n}-(-1)^n &= [10^3-(-1)][(10^3)^{n-1}+(10^3)^{n-2}(-1)\\ &\quad+\cdots+(-1)^{n-1}]\\ &=1001k\\ &=7\times 11\times 13k,\end{aligned}$$

其中 $k=[(10^3)^{n-1}+(10^3)^{n-2}(-1)+\cdots+(-1)^{n-1}]$ 为整数.

$\therefore 10^{3n}-(-1)^n$ 能被 7,13 整除. 即 $10^3+1,10^6-1,10^9+1$ ……都能被 7,13 整除.

我们再以十位数 8769425931 为例证明 5.

$$\begin{aligned}8|769|425|931 &= 8\times 10^9+769\times 10^6+425\times 10^3+931\\ &=8(10^9+1)+769(10^6-1)+425(10^3+1)+(-8+769\\ &\quad-425+931).\end{aligned}$$

上式中前三项都能被 11 整除，当奇数节的三位数之和（769 + 931）与偶数节的三位数之和（8 + 425）之差能被 7,13 整除时，这个数就能被 7,13 整除.

例 4 求证：由 0,1,2,3,4,5 组成的数字不重复的六位数不可能被 11 整除.

证明：设组成的六位数是 $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$，假设它能被 11 整除，则

$$(a_2+a_4+a_6)-(a_1+a_3+a_5)=11n,$$

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=11n+2(a_1+a_3+a_5)$.

而 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=15$,

$\therefore 11n+2(a_1+a_3+a_5)=15$ ①

$\therefore 0\leqslant n<2$.

当 $n=0$,①式左端为偶数,右端为奇数,矛盾.

当 $n=1$,$a_1+a_3+a_5=2$,但 0,1,2,3,5 中任三个数之和都不可能等于 2.

因此,题设中的六位数不可能被 11 整除.

例 5 设自然数 $n=\overline{62\alpha\beta427}$为 99 的倍数,求数字 α、β.

解: $\because 99\mid n$,

$\therefore 9\mid n$ 且 $11\mid n$.

由 $9\mid n$,得 $6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9m$($m$ 为整数),

$\therefore \alpha+\beta=9m-21$.

又 $0\leqslant\alpha+\beta\leqslant 18$,

$\therefore \alpha+\beta=6$ 或 $\alpha+\beta=15$;

$\therefore$ 由 $11\mid n$,得$(6+\alpha+4+7)-(2+\beta+2)=11n$($n$ 为整数)

$\therefore \alpha-\beta=11n-13$,

$\therefore \alpha-\beta=-2$ 或 $\alpha-\beta=9$,

因 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha-\beta$ 有相同的奇偶性,因此有

$$\begin{cases}\alpha+\beta=6\\ \alpha-\beta=-2;\end{cases}\quad \begin{cases}\alpha+\beta=15\\ \alpha-\beta=9.\end{cases}$$

解之,得 $\begin{cases}\alpha=2\\ \beta=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\alpha=12(\text{不合题意,舍去})\\ \beta=3.\end{cases}$

$\therefore$ 所求数字是 $\alpha=2,\beta=4$.

例 6 一个 n 位正整数,如果它的 n 个数字是由 1,2,3,

…, n 组成,并且它的前 k 个数字组成一个能被 k 整除的整数, $k=1,2,3,\cdots,n$, n 称为精巧数. 例如, 321 是一个精巧的三位数, 因为 1 整除 3, 2 整除 32, 3 整除 321. 有[ ]个精巧的六位正整数?

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

解:设满足条件的六位数为 $\overline{abcdef}$. 由题意,六个数字 a, b, c, d, e, f 分别为 1,2,3,4,5,6. 由 $\overline{abcde}$ 能被 5 整除,得 $e=5$;

由 $\overline{ab}$ 被 2 整除, $\overline{abcd}$ 被 4 整除, $\overline{abcdef}$ 被 6 整除,得 b, d, f 都是偶数,因而这三个数字分别是 2,4,6;剩下的 a 和 c 只能是 1 和 3.

又由三位数 $\overline{abc}$ 被 3 整除,得 $a+b+c$ 能被 3 整除,而 $a+c=4$,则 $b=2$;

从四位数 $\overline{abcd}$ 被 4 整除,则它的末两位数 $\overline{cd}$ 被 4 整除. 但其中 $c=1$ 或 3,则 $d=6$;于是 $f=4$.

这样,只有两个符合条件的六位数 123654 和 321654,故选 (C).

练习 1.2

1. 设两个三位数 $\overline{abc}$、$\overline{def}$ 的和能被 37 整除,求证六位数 $\overline{abcdef}$ 也能被 37 整除.

2. 证明任何奇数的平方被 8 除余 1.

3. 能被 11 整除的最小的九位整数是 ________.

4. 证明大于 3 的质数都能表示为 $6m+1$ 或 $6m-1$ (m 为自然数)的形式.

5. 在十进位数中,各位数字是 0 或 1,并且能被 225 整除的最小自然数是 ________.

6. 将自然数 N 接写在每一个自然数的右面，如果得到的新自然数都能被 N 整除，那么 N 称为魔术数. 求小于 130 的自然数中的魔术数.

答案：

1. 解：$\overline{abcdef} = 1000\ \overline{abc} + \overline{def}$

$= 999\ \overline{abc} + \overline{abc} + \overline{def}$

$= 37 \times 27\ \overline{abc} + (\overline{abc} + \overline{def})$

又$(\overline{abc} + \overline{def})$能被 37 整除，

$\therefore \overline{abcdef}$能被 37 整除.

2. 证明：任何奇数都可表示为 $2n+1$ 的形式，其中 n 为整数.

$\because (2n+1)^2 = 4n(n+1)+1$，而 $n(n+1)$必被 2 整除.

$\therefore 4n(n+1)$必被 8 整除，即奇数的平方被 8 除余 1.

3. 100000010.

4. 证明：设任一大于 3 的质数 a 除以 6 商为 k，余数为 r，即：

$a = 6k + r, r = 0,1,2,3,4,5.$

因 a 为质数，则 $r = 1,5$.

当 $r = 1$ 时，$a = bk + 1 = 6m + 1(m = k)$；

当 $r = 5$ 时，$a = 6k + 5 = 6(k+1) - 1 = 6m - 1(m = k+1)$.

5. 解：设所求数为 x.

$\because 225 = 9 \times 25$，且 9 与 25 互质

$\therefore 25 | x$，且 $9 | x$.

$\therefore x$ 的末两位数为 00，各位数字之和为 9 的倍数.

$\therefore x = 11111111100$.

6. 解：任取自然数 P，把魔术数 N 接写在 P 的右面，得 $\overline{PN}$