普通高等教育“十二五”规划教材

随机过程（第3版）

The Stochastic Process

李裕奇 刘赪 王沁 编著

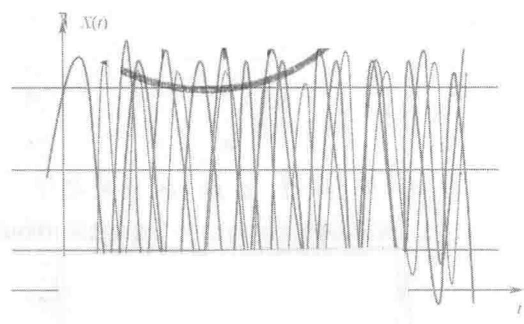
国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育“十二五”规划教材

随机过程

（第3版）

李裕奇　刘赪　王沁　编著



国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/李裕奇,刘赪,王沁编著.—3版.—北京:国防工业出版社,2014.9

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-118-09506-7

Ⅰ.①随...　Ⅱ.①李...②刘...③王...　Ⅲ.①随机过程-高等学校-教材　Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第250148号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司

新华书店经售

*

开本 710×1000　1/16　印张 $23\frac{3}{4}$　字数 430 千字

2014年9月第3版第1次印刷　印数1—3000册　定价 39.00元

国防书店:(010)88540777　　发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755　　发行业务:(010)88540717

前　言

随机过程与时间序列分析是研究和处理动态随机数据的基础理论与技术手段，目前，随着时间序列分析学科的迅猛发展，也日益彰显出随机过程的理论对于动态随机数据模型的建立、预测与控制分析的重要性。国内各高校纷纷在本科与研究生专业开设重点课程“随机过程”或“随机过程与时间序列分析”。但是这两门课程对于非数学、非统计专业的学生来讲，要想很好地理解随机过程的基本概念、基本理论与基本应用、时间序列的建模方法、检验与预测方法无疑是很难的。这时，若有一本能深入浅出、推理清晰、逻辑严谨，且配有恰如其分的习题与参考答案的入门基础教材，对读者当是极幸运之事，我们编写这本教材的目的就在于此，希望通过这本书的学习，能为培养国家急需的科研型与应用型人才做出应有的贡献。

学习“随机过程”或“随机过程与时间序列分析”的难点在于是否具有扎实的“概率论与数理统计”知识基础，这可参阅李裕奇等编写的《概率论与数理统计》(国防工业出版社出版，第4版)教材。其次在于是否认真仔细地学习与掌握每一个基本概念、基本理论与基本方法。本书第3版中每一个概念、每一个知识点都配有实例，每一种方法都介绍操作步骤，详细解读随机过程与时间序列分析内容的重点与难点，且在每小节内容之后设置相应的简单习题，每一章末设置适当的综合练习题，并于每一章末设置自测题用以作为读者自觉检验学习效果的标尺。本书试图通过这些内容的编写与习题的设置来帮助读者踏踏实实的、尽快尽好地掌握与巩固所学知识。

本书第3版除了较为系统地介绍了随机过程的基本概念、基本思想、基本原理与基本方法，内容包括随机过程的基本概念，分布函数族与数字特征，均方极限、均方连续性、均方微分与均方积分，泊松过程，平稳过程的概念、遍历性与谱密度，马尔可夫过程概念、马尔可夫链、转移概率的遍历性与平稳分布等知识，还包括了时间序列分析的基本概念，时间序列的确定性分析，平稳序列的自回归模型，移动平均模型，自回归与移动平均模型的性质、参数估计，模型拟合与预测等内容。深入

浅出的概念讲解,简明易懂的示例说明,条理清晰的逻辑推理,形象生动的图形显示,适时合理的习题安排,相信能使读者更加容易掌握随机过程与时间序列分析的基本理论与简单应用方法。

读者只需具备概率论与数理统计、微积分与线性代数知识,即可顺利阅读全书。

本书的出版得到西南交通大学教务处教材科与数学学院统计系的鼎力支持,统计咨询中心全体同仁的热情参与,国防工业出版社的慷慨帮助,编者谨此一并表示由衷的感谢。

由于编者水平有限,书中难免会有错误与不妥之处,敬请同行与读者批评指正。

李裕奇

2014 年 9 月于成都

目 录

第1章 概率论基础

概率论是研究随机现象的统计规律性的一门随机数学学科、是一门构造随机数学模型的基础理论，也是学习随机过程的基础。因此本章首先简要地介绍概率论的基本理论知识，包括随机变量的分布、数字特征、条件分布与条件数学期望、特征函数等内容，作为学习、分析与研究随机过程理论的必要工具。

1.1 随机事件与概率

一、随机试验、随机事件与概率定义

一般来说，概率论中的试验是指对自然的观察或为某种目的进行的科学实验。如果此试验能在相同条件下重复进行；且每次试验的可能结果不止一个，事先明确试验所有可能结果；而每一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。这样的试验就是概率论的研究对象——随机试验。

随机试验的全部可能结果的集合称为样本空间，记作 S。随机试验的每一个可能结果，即组成样本空间的元素称为样本点，又称基本事件，记作 e。

故样本空间 S 可记作 $S=\{e\}$ 。

而样本空间 S 的子集，即部分样本点的集合称为随机事件。通常用大写字母 A、B、C 等表示。若事件中至少一样本点发生时，称这一事件发生或出现。

由于样本空间 S 包括试验的全部的样本点、即每次试验每次都发生，故又称 S 为必然事件。而事件 ϕ 不包括任何样本点，即每次试验每次都不发生，故称为不可能事件。

由于随机事件是样本点的集合，因此事件间的关系与集合论中集合之间的关系是一致的。例如包含关系：若事件 A 发生导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B，或事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$； $A\bigcup B=\{e|e\in A或e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件：当且仅当事件 A，B 中至少有一个发生时，事件 $A\bigcup B$ 发生；$A\bigcap B=\{e|e\in A且e\in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件：即当且仅当事件 A，B 同时发生时，事件 $A\bigcap B$ 才发生，可简记为 AB；$A-B=\{e|e\in A且e\notin B\}$ 称为事件 A

与事件 B 的差事件，当且仅当事件 A 发生，事件 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生；若 $AB=\phi$，则称事件 A 与事件 B 互不相容，或称为互斥事件，即指事件 A 与事件 B 不能同时发生；若 $AB=\phi$，且 $A\cup B=S$，则称事件 A 与事件 B 互为逆事件，A 的逆事件常记为 $\overline{A}$ 等等。事件之间的运算规律与集合之间的运算规律也是一致的，亦具有下述规律：

交换律：$A\cup B=B\cup A \quad A\cap B=B\cap A$

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

分配律：$A\cap(B\cup C)=AB\cup AC \quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B} \quad \overline{\cup A_i}=\cap\overline{A_i} \quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \quad \overline{\cap A_i}=\cup\overline{A_i}$

定义 1.1.1 设 E 为随机试验，S 为其样本空间，对于 E 的每一事件 A，赋予一实数 $P(A)$，若集函数 $P(\cdot)$ 满足以下性质：

1° 非负性：$\forall A\subset S$，$P(A)\geqslant 0$

2° 规范性：$P(S)=1$

3° 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots$ 为两两互不相容事件列，即

$\forall i\neq j, A_iA_j=\phi$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$为随机事件 A 的概率。

概率具有以下几个简单性质：

1°不可能事件发生的概率为零，即 $P(\phi)=0$

2° (有限可加性)若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

3° 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$ 且 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

4° $\forall A\subset S$，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$

5° 对任意事件 A，有 $P(A)+P(\overline{A})=1$

6° 对任意事件 A 与 B，$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$，且 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

二、古典概型概率计算方法

若随机试验的样本空间中的元素个数只有有限个，可记为 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，

且每个基本事件 e_i 出现的可能性相等，$i=1,2,\cdots,n$，即

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_n\})=\frac{1}{n}$$

则称此试验为古典概型。对于任意一个随机事件 $A\subset S$, 古典概型事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{S\text{中基本事件总数}} \tag{1.1.1}$$

［**例 1.1.1**］ 从 1, 2,…, 10 共 10 个数中任取一数，设每个数以 $\frac{1}{10}$ 的概率被取中，取后放回，先后取出 7 个数中，求下列事件的概率：

(1) A_1={7 个数全不相同}　　(2) A_2={不含 10 和 1}

(3) A_3={10 恰好出现 2 次}　　(4) A_4={10 至少出现 2 次}

解：(1) $P(A_1)=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4}{10^7}=\frac{189}{3125}\approx0.06048$

(2) $P(A_2)=\frac{8^7}{10^7}=0.2097$

(3) $P(A_3)=\frac{C_7^2 9^5}{10^7}=0.1240$

(4) $P(A_4)=\sum_{k=2}^{7}\frac{C_7^k 9^{7-k}}{10^7}=1-P(\overline{A}_4)=1-\frac{9^7+C_7^1 9^6}{10^7}=0.1497$

［**例 1.1.2**］ 从 3 个相异数字中，重复抽取两次，所得结果不计次序，试问抽到两个不同数字组成的组合(A)的概率是多少？

解：

$$P(A)=\frac{C_3^2}{C_{3+2-1}^2}=\frac{3}{C_4^2}=\frac{3}{2\times3}=\frac{1}{2}$$

［**例 1.1.3**］ 在 10 个数字中 0, 1, 2, …, 9 中不重复地任取 4 个，能排成一个四位偶数的概率是多少？

解：

$$P(A)=\frac{A_9^3+4\times8\times A_8^2}{A_{10}^4}=0.4556$$

因为从 10 个数字中不重复任取 4 个的取法是总数为 A_{10}^4，而 0 在个位的四位数共有 A_9^3 种取法，而个位为 2，4，6，8 四个数之一，且首位不为 0 的取法数为 $4\times8\times A_8^2$ 种。

［例 1.1.4］ 从 0, 1, 2, …, 9 等 10 个数字中任意选出 3 个不同数字，试求下列事件的概率：

(1) $A_1=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$

(2) $A_2=\{3$ 个数字中不含 0 或 $5\}$

解：所取 3 个数不计序，属不重复的组合问题，基本事件总数为 $n=C_{10}^3$。

(1) $P(A_1)=\dfrac{C_8^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{15}$

(2) $P(A_2)=1-P(\overline{A_2})=1-\dfrac{C_8^1}{C_{10}^3}=1-\dfrac{1}{15}=\dfrac{14}{15}$

或利用概率加法公式，得

$$P(A_2)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}+\frac{C_9^3}{C_{10}^3}-\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$$

三、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式

定义 1.1.2 设 A,B 为两事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.1.2}$$

为在事件 A 发生条件下 B 事件发生的条件概率。

既然 $P(B\mid A)$ 谓之条件概率，则 $P(B\mid A)$ 必须满足概率的 3 条公理：

1° 非负性：$\forall B\subset S \quad P(B\mid A)\geqslant 0$

2° 规范性：$P(S\mid A)=1$

3° 有限可加性：设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\middle|A\right)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i|A)$$

因此，概率的所有性质对条件概率依然成立。

将条件概率公式移项即得所谓的乘法公式：

设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A) \tag{1.1.3}$$

［例 1.1.5］ 设 A,B 为两事件，已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.6$，$P(B\mid\overline{A})=0.4$，试求：

(1) $P(\overline{A}B)$

(2) $P(AB)$

(3) $P(A \cup B)$

解：(1) $P(\overline{A}B) = P(\overline{A})P(B \mid \overline{A}) = (1-0.5) \times 0.4 = 0.2$

(2) $P(AB) = P(B) - P(\overline{A}B) = 0.6 - 0.2 = 0.4$

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.6 - 0.4 = 0.7$

将乘法公式推广可得下述形式：

设有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，且 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

特别地，当 n=2 即上述乘法公式，当 n=3 时，为

$$P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \qquad P(A_1 A_2) > 0$$

利用乘法公式与互斥事件的概率加法公式可得著名的全概率公式：

定理 1.1.1 设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，若 B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个完备事件组(或称为 S 的一个划分)，即满足条件

1° $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两互不相容，即 $B_i B_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1,2,\cdots,n$

2° $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$，且有 $P(B_i) > 0, i = 1,2,\cdots,n$，则

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i) \tag{1.1.4}$$

式(1.1.4)即称为全概率公式。

证：$P(A) = P(AS) = P(A\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i A))$

当$i \neq j$时,$(B_i A)(B_j A) = A(B_i B_j)A = A\phi A = \phi$，故 $B_1 A, B_2 A, \cdots, B_n A$ 两两互不相容，由概率性质知

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i A)$$

再用乘法公式，即得式(1.1.4)。

利用全概率公式与条件概率公式可得贝叶斯公式，即逆概公式：

定理 1.1.2 设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个完备事件组，即 S 的一个划分，且 $P(A) > 0, P(B_i) > 0,\ i = 1,2,\cdots,n$，则

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)} \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5)是18世纪英国哲学家Thomas Bayes首先总结出来的，所以称为贝叶斯公式。

证： $P(B_i \mid A)=\dfrac{P(B_i A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}$

可以这样说，$P(B_1), P(B_2), \cdots, P(B_n)$ 是人们对 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 发生可能性大小的经验认识，当发生新信息(知道 A)之后人们对 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 又有了新的认识，即 $P(B_1 \mid A), P(B_2 \mid A), \cdots, P(B_n \mid A)$，贝叶斯公式正是描述了这种认识的变化过程。

四、事件的独立性

定义 1.1.3 设 A, B 是两事件，如果具有等式

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{1.1.6}$$

则称 A, B 为相互独立事件。

由两事件相互独立性定义可以推知，若4对事件 A 与 B，$\overline{A}$ 与 B，A 与 $\overline{B}$ 和 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中有一对是相互独立的事件，则另外各对也是相互独立的事件。实际上，若事件 A 与 B 相互独立，则其逆事件之间亦是相互独立的，这个概念可推广到多个事件情况中。

［**例 1.1.6**］ 设事件 A 与 B 相互独立，已知 $P(A)=0.4$，$P(A \cup B)=0.7$，试求 $P(\overline{B} \mid A)$。

解： $0.7=P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=$

$P(A)+P(B)-P(A)P(B)=$

$0.4+P(B)-0.4P(B)=$

$0.4+0.6P(B)$

解得

$$P(B)=0.3/0.6=\frac{1}{2}=0.5$$

又由事件 A 与 B 相互独立，故事件 A 与 $\overline{B}$ 也相互独立，所以有

$$P(\overline{B} \mid A)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$$

容易将此概念推广到多个事件间的相互独立性：

定义 1.1.4 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个事件，如果对于任意 k $(1 \leqslant k)$ 个事件，若 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$, $1 \leqslant i_j \leqslant n, j=1, 2, \cdots, k$，均有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \tag{1.1.7}$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件。

在式(1.1.7)中包含了 $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n - C_n^0 - C_n^1 = 2^n - n - 1$ 个等式，故在实际中按定义 1.1.4 来判断 n 个事件的独立性较为困难，通常是按试验与事件的实际意义来判断事件间的相互独立性。

五、随机变量及其分布函数

1. 随机变量的定义

定义 1.1.5 设 E 为随机试验，其样本空间 $S=\{e\}$，若对于每一个 $e\in S$，均有一个实数 $X(e)$ 与之对应，这样一个定义在样本空间 S 上的单值实函数

$$X = X(e)$$

称为随机变量，其值域 $R_X \subset (-\infty, +\infty)$。

在样本空间上建立随机变量之后，我们就可以用随机变量取值的集合来表示随机事件。实际上，随机事件为部分样本点的集合，而在样本空间上定义一随机变量之后，每一样本点对应随机变量的一个取值，部分样本点的集合，即为随机变量部分取值的集合，即随机变量的部分取值的集合为随机事件。

2. 随机变量的分布函数的定义

一般地，若 X 为 $S=\{e\}$ 上随机变量，$L\subset(-\infty,+\infty)$ 为实数集合，则

$$\{X\in L\} \overset{\Delta}{=} \{e \mid X(e)\in L\}$$

表示一随机事件，这样，讨论样本点与随机事件的概率就转化为讨论随机变量 X 的可能取值与取值集合的概率。

进一步为达到建立数与数之间的映射，故引入分布函数概念：

定义 1.1.6 设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x) = P(X \leqslant x) \tag{1.1.8}$$

称为 X 的分布函数。

容易推出，随机变量的分布函数具有以下重要性质：

1° $F(x)$ 是一个不减函数，即 $\forall x_1 \leqslant x_2$，$F(x_1) \leqslant F(x_2)$

2° $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$，$F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3° $F(x)$ 是右连续函数，即 $F(x+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} F(x+\varepsilon) = F(x)$

4° $\forall x_1 \leqslant x_2, P(x_1 < x \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

可以证明：若定义在实数空间 R 上的函数 $F(x)$ 满足上述性质 1°～性质 3°，则它必为某随机变量的分布函数。

从上述随机变量的分布函数的性质可以看出，随机变量的分布函数能够完整地描述随机变量的统计规律性。

[例 1.1.7] 如下 4 个函数，哪个可作为随机变量 X 的分布函数？

(1) $F(x)=\begin{cases}0 & x<-2\\ \dfrac{1}{2} & -2\leqslant x<0\\ 2 & x\geqslant 0\end{cases}$ (2) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leqslant x<\pi\\ 1 & x\geqslant \pi\end{cases}$

(3) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \sin x & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & x\geqslant \dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ (4) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2}+x & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ 1 & x\geqslant \dfrac{1}{2}\end{cases}$

解：(1) 因为 $x\geqslant 0$ 时 $F(x)=2>1$，故 $F(x)$ 不是分布函数。

(2) 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$F(x)=\sin x$ 单调下降，不满足性质 1°，故此 $F(x)$ 亦不是分布函数。

(3) $\forall x\leqslant 0,\ F(x)=0$；$\forall 0<x<\dfrac{\pi}{2}, F(x)=\sin x$ 单调上升；当 $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}, F(x)=1$，且 $F(x)$ 为连续函数，满足性质 1°～性质 3°，故此 $F(x)$ 是分布函数。

(4) $\forall x<0, F(x)=0$；$\forall\, 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}, F(x)=x+\dfrac{1}{2}$ 为单调上升函数；当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$，$F(x)=1$，满足性质 1°～性质 3°，故此 $F(x)$ 是分布函数。

3. 离散型随机变量

定义 1.1.7 若随机变量 X 的可能取值仅有有限或可列多个，则称此随机变量为离散型随机变量。

即 X 的可能取值可记为 x_k，$k=1,2,3,\cdots$，且 X 取每个可能值 x_k 均具有一定的概率，这由离散型随机变量的概率分布(概率函数)来说明：

定义 1.1.8 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 x_k，且 X 取值为 x_k 的概率，即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k \qquad k=1,2,3,\cdots \tag{1.1.9}$$

若 p_k 满足条件：

1° $$p_k \geqslant 0 \qquad k=1,2,3,\cdots \tag{1.1.10}$$

2° $$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \qquad k=1,2,3,\cdots \tag{1.1.11}$$

则称式(1.1.9)为 X 的概率分布(概率函数)，或分布律(列)。

一般地，概率分布有 3 种表示方式：

(1) 分析表达式

$$p_k = P\{X = x_k\} \qquad p_k \geqslant 0, \ \sum p_k = 1$$

(2) 表格式或矩阵表达式

X_k	x_1	x_2	…	x_k	…
p_k	p_1	p_2	…	p_k	…

或

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{pmatrix}$$

(3) 图形表达式

例如某个随机变量的概率分布为

X	0	1	2	3	4	5
p_k	0.3277	0.4096	0.2048	0.0512	0.0064	0.0003

用图形表示如下(见图 1.1)：

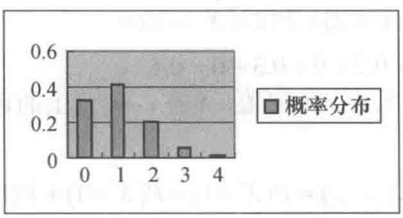


图 1.1　随机变量的概率分布

若 X 的概率分布为 $p_k = P(X = x_k), k = 1,2,3,\cdots$，则由分布函数定义可知，离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} P\{X = x_k\} = \sum_{x_k \leqslant x} p_k \tag{1.1.12}$$

式(1.1.12)中和式是对所有满足 $x_k \leqslant x$ 的 k 求和的。即

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ p_1 & x_1\leqslant x<x_2\\ p_1+p_2 & x_2\leqslant x<x_3\\ \vdots & \vdots\\ p_1+p_2+\cdots+p_{n-1} & x_{n-1}\leqslant x<x_n\\ p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n=1 & x\geqslant x_n\end{cases}$$

[例 1.1.8] 已知离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P(X=1)=0.2 \qquad P(X=2)=0.3 \qquad P(X=3)=0.5$$

试写出 X 的分布函数 $F(x)$，并给出其图形。

解：因 X 的可能取值只有 1，2，3 三个值，为求分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$，先将 $(-\infty,+\infty)$ 依 X 的可能取值分成 4 个区间：$(-\infty\ \ 1),[1,\ \ 2),[2,\ \ 3)$ 与 $[3,+\infty)$，再考虑：

(1) 当 $x\in(-\infty,1)$ 时，X 在 $(-\infty,x]$ 内没有可能取值，故

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P(\phi)=0$$

(2) 当 $x\in[1,2)$ 时，无论 x 为何值，X 在 $(-\infty,x]$ 上的可能取值仅有 $X=1$，故

$$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X<1)+P(X=1)+P(1<X\leqslant x)$$
$$0+0.2+0=0.2$$

(3) 当 $x\in[2,3)$ 时，无论 x 为何值，X 在 $(-\infty,x]$ 上的可能取值仅有两值 $X=1$ 或 $X=2$，故

$$\begin{aligned}F(x)=P(X\leqslant x)=P(X<1)+P(X=1)+P(1<X<2)+\\P(X=2)+P(2<X\leqslant x)=\\0+0.2+0+0.3+0=0.5\end{aligned}$$

(4) 当 $x\in[3,+\infty)$，无论 x 为何值，X 在 $(-\infty,x]$ 上的可能取值仅有 3 值 $X=1$，$X=2$ 或 $X=3$，故

$$\begin{aligned}F(x)=P(X\leqslant x)=P(X<1)+P(X=1)+P(1<X<2)+\\P(X=2)+P(2<X<3)+P(X=3)+P(3<X\leqslant x)=\\0+0.2+0+0.3+0+0.5+0=1\end{aligned}$$

即得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.2 & 1\leqslant x<2\\ 0.5 & 2\leqslant x<3\\ 1 & x\geqslant 3\end{cases}$$