考研数学

NEW

24堂课

24 basic Math courses

主编 杨超 方浩 姜晓千

斩断自己的退路，
才能更好地赢得出路！

为基础阶段量身定制！

中国政法大学出版社

考研数学 24 堂课

主编 杨超 方浩 姜晓千

中国政法大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

考研数学 24 堂课. 2016/杨超，方浩，姜晓千主编. —北京：中国政法大学出版社，2015.2

ISBN 978-7-5620-5919-6

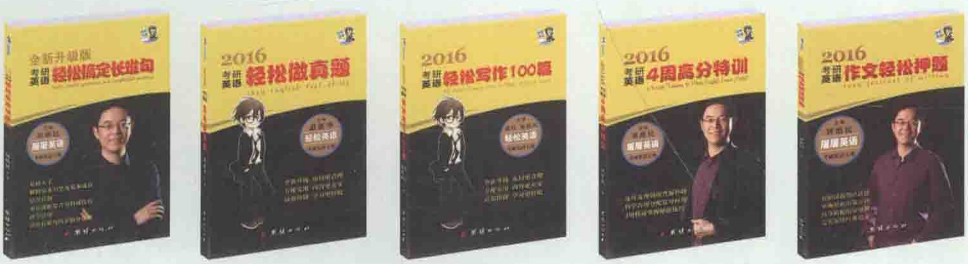
Ⅰ.①考… Ⅱ.①杨… ②方… ③姜… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 038515 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话	010-58908285(总编室) 58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印	北京市平谷县早立印刷厂
开　本	710mm×1000mm　1/16
印　张	34.5
字　数	730 千字
版　次	2015 年 2 月第 1 版
印　次	2015 年 2 月第 1 次印刷
定　价	56.80 元

疯狂考研政治系列

轻松考研英语系列



杨超考研数学系列

前　言

本书是长期在一线从事考研数学辅导的教师为广大备战考研学生量身定做的基础复习用书。

每一届学生从备战考研的时间来说，典型分为两种：一种是启动时间比较早，在大三上学期就确定考研目标，并着手准备；一种是大三下学期才开始准备。每年的十一月左右我们会开设数学导学班（部分城市会开基础班），于是就有一些问题让学生很困惑，比如：

(1)基础阶段是夯实数学基础的关键时期，可以借助本科课本来复习，但是却不明白考研大纲的要求；

(2)考生独立看书过程中会遇到很多不易理解的概念、性质、定理；

(3)数学离不开做题，但除了完成课本后的相关习题，还需要做哪些相应的习题；

……

在平时的教学过程中，我们一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题，各种抽象的概念和定理，怎样在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想，并让他们在这种理念下学会主动学习，感受到高等数学的乐趣，掌握考试内容的内涵和精髓，做到由此及彼，举一反三，不仅数学能学好，还可以提升自己的学习能力，这正是一个准研究生的基本素质。

为了实现这个目标，在多年的教学和总结的基础上，我们编写了这本《考研数学 24 堂课》。本书共 24 课，包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个板块。每课分为五部分：

第一部分为知识结构网络图，清晰呈现知识脉络；

第二部分为基本内容讲解，即对考纲要求的考点进行梳理；

第三部分为重点、难点、易错点讲解，考生在学习过程中，容易因对基本概念、定理理解得不深，逻辑推理不严密，没有理解公式的本质等原因而出现一些典型错误，我们将其归纳和整理，以此帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍。本部分的写作语言活泼生动，娓娓道来，例如求极限的三种常见的方法——等价无穷小替换、洛必达法则和泰勒公式，我们分别用三种交通工具——大巴车、普通火车和高铁来形容，让学生很容易理解他们的优势与劣势。

第四部分为典型例题，详细讲解了每章内容中的典型习题、解题方法。第三章的中值定

理是高数的重点和难点，我们的例题也分基础阶段和强化阶段，学生可以根据自己的学习情况选择在不同的阶段使用。

第五部分是真题赏析，我们选择了1987年以来的真题，之所以选择这么多年份的真题，一是可以通过做题检查自己的学习效果，二是在做真题的过程中了解命题规律。

本书是杨超考研数学系列用书《高等数学必修17课》《线性代数必修10课》《概率论与数理统计必修8课》的篇前篇，由杨超、方浩同志主笔完成。在本书的编写出版过程中参考了姜晓千同志著作中的一些经典内容，由于篇幅所限，不在此列出，在此谨表衷心感谢。

编写时间匆忙，自身水平有限，书中不妥和疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。同时欢迎广大考研学子和作者交流：

新浪微博：http://weibo.com/chaoyu666（杨超 Math）

http://weibo.com/u/1848595875（姜晓千）

http://weibo.com/u/2262109970（方浩 Fellow）

作　者

2015年春于北京

图书一览表

考研图书

分类	书名	作者	出版社	定价	出版时间
考研政治					
基础系列	考研政治真题也疯狂	阮晔 冉彦	中国政法	26.80	3月
强化系列	考研政治全攻略（全4册）	阮晔 管琦 陆卫明 冉彦 张云天	中国政法	76.20	5月
演练系列	考研政治沙场点兵	阮晔 管琦 陆卫明 冉彦 张云天	中国政法	49.80	5月
冲刺系列	考研政治疯狂的考点	阮晔 陆卫明 管琦 冉彦 张云天	中国政法	19.80	9月
冲刺系列	考研政治疯狂的时政	陆卫明 阮晔 冉彦 张守连	中国政法	18.80	9月
冲刺系列	考研政治疯狂预测5套卷	陆卫明 阮晔 冉彦	中国政法	19.80	10月
点题系列	考研政治疯狂的押题	阮晔 刘长霖 管琦 张旭东 张云天 冉彦	中国政法	18.80	11月
点题系列	考研政治重点剖析28题	陆卫明	团结	16.80	11月
考研英语					
基础系列	考研英语轻松记单词5500（英语一、英语二适用）	屠皓民	团结	29.80	3月
基础系列	考研英语轻松搞定长难句（英语一、英语二适用）	屠皓民	团结	19.80	1月
基础系列	考研英语写作基础词汇（英语一、英语二适用）	王军	中国政法	16.80	3月
强化系列	考研英语阅读也轻松（上）（1993-2004精选）	屠皓民	团结	29.80	1月
强化系列	考研英语阅读也轻松（中）（同源时文）（英语一、英语二适用）	屠皓民	团结	32.80	3月
强化系列	考研英语阅读也轻松（下）（2005-2015精解）	屠皓民	团结	26.80	4月
强化系列	考研英语轻松写作100篇	张培 屠皓民	团结	22.80	5月
演练系列	考研英语轻松做真题	惠新华 屠皓民	团结	66.00	3月
演练系列	考研英语4周高分特训	屠皓民	团结	32.80	7月
冲刺系列	考研英语轻松预测5套卷	屠皓民	团结	19.80	10月
点题系列	考研英语作文轻松押题	屠皓民	团结	19.80	11月
点题系列	考研英语作文热点预测28篇（英语一、英语二适用）	惠新华	团结	12.80	11月
英语二专用	考研英语（二）轻松做真题	屠皓民 党敏	团结	29.80	4月
英语二专用	考研英语（二）决胜考场8套卷	屠皓民	团结	29.80	9月

考研数学					
精品教材		杨超 方浩 姜晓千	中国政法	56.80	3月
	考研数学高等数学必修17课	杨超 方浩 陈秋成	中国政法	32.80	3月
	考研数学线性代数必修10课	姜晓千	中国政法	22.80	3月
	考研数学概率论与数理统计必修8课	方浩	中国政法	22.80	3月
	考研数学决胜考场8套卷（数学一）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	24.80	10月
	考研数学决胜考场8套卷（数学二）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	24.80	10月
	考研数学决胜考场8套卷（数学三）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	24.80	10月
	考研数学满分过关100题	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	19.80	11月
经典教辅	考研数学必做986题	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	36.80	3月
	考研数学10年真题分析与演练（数学一）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	34.80	4月
	考研数学10年真题分析与演练（数学二）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	34.80	4月
	考研数学10年真题分析与演练（数学三）	杨超 姜晓千 方浩	中国政法	34.80	4月

专业课、专业硕士图书

书名	作者	定价	出版时间
考研翻译硕士（MTI）内部绝密讲义	全国翻译硕士专业学位教育研究委员会	89.00	3月
考研翻译硕士（MTI）真题精练精讲	全国翻译硕士专业学位教育研究委员会	79.00	12月
考研西医综合内部绝密讲义	李睿	79.00	3月

同学们在使用本书过程中如有任何疑问或建议，请与编辑部联系。

编辑部答疑热线：010-56133781

答疑互动微博：政治——@阮晔 @冉彦 @图书鲁伟

英语——@屠屠老师 @惠新华族长 @张培老师

数学——@杨超math @姜晓千 @方浩Fellow

购书热线：010-56133691 QQ：1586246676

目　录

第一部分
高等数学

第1课　函数、极限与连续

知识网络结构图

- 函数、极限与连续
  - 形式
    - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
    - $\Downarrow$ 归结原则
    - 函数极限 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$
    - （$x\to\square$ 有6种形式，$x\to\infty$，$+\infty$，$-\infty$，$x\to x_0$，x_0^+，x_0^-）
  - 概念（$\varepsilon - N$，$\varepsilon - \delta$ 语言）
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 四则运算
  - 存在准则
    - 单调有界数列有极限
    - 夹逼准则
  - 运用 ↓
  - 二个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
    - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
  - 关系定理
    - 单侧极限与双侧极限
    - 函数极限与数列极限
    - 函数极限与无穷小
    - 无穷大与无穷小
  - 无穷小
    - 概念
    - 性质
    - 阶的比较
  - 连续
    - 定义
    - 间断点分类
      - 第Ⅰ类间断点
        - 可去
        - 跳跃
      - 第Ⅱ类间断点
        - 振荡
        - 无穷
    - 闭区间上连续函数的性质

基本内容

1. 极限概念

不少考生觉得极限概念很抽象，难以理解，这是因为极限的概念本身描述的是一个动态过程，而人的认识能力倾向于静态；其次，极限是一个无穷运算，而人的习惯倾向于具体、有穷的计算.

每个极限都由四句话组成，见表 1—1—1.

表 1—1—1

记号	对 $\forall$ 的	总 $\exists$ 着	当自变量满足	恒成立	则称
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x_0-x<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$ 在 x_0 的左极限为 A
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	$f(x)$ 在 x_0 的右极限为 A
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 以 A 极限
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x<-X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\xi$	当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)$ 以 A 为极限
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$	$\xi>0$	自然数 N	$n>N$	$\lvert x_n-A\rvert<\xi$	当 $n\to\infty$ 时，x_n 以 A 为极限

2. 基本性质

(1)唯一性

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)$ 存在，则极限唯一.

(2)局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内有界.

(3)不等式性质

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$.

①如果 $A>B$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>g(x)$；

②如果在 $\mathring{U}$ 中 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

(4)保号性

若 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A>0$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$（$A<0$ 有类似结论）或当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$，则 $A\geqslant 0$.

3. 存在准则

(1)单调有界准则

①若数列 x_n 单增且有上界（即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，并对 $\forall n$，都有 $x_n\leqslant M$），则 $\{x_n\}$ 收敛.

②若数列 x_n 单减且有下界(即 $x_{n+1}\leqslant x_n$，并对 $\forall n$，都有 $x_n\geqslant M$)，则 x_n 收敛.

【注】以递推形式出现的数列极限问题经常用此定理证明.

(2)夹逼准则

$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\lim\limits_{x\to\square} h(x)=A$，又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，则 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$.

(3)极限与单侧极限关系

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

(4)数列与子数列极限的关系

数列$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$收敛.

经常这样使用：$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$.

(5)海涅定理(归结原则)

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在$\Leftrightarrow$对任何以 x_0 为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$ 存在.

【注】该定理常用来否定函数极限存在，若能找出 $x_n\to x_0$，$y_n\to x_0$，$f(x_n)=A$，$f(y_n)=B$，但 $A\neq B$.

例如，证明$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不存在.

【证明】取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\pi^2\sin n\pi=0$，

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$不存在.

4. 二个重要极限及推广

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，推广为：$\lim\limits_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1$.

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，

推广为：$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的运算

(1)极限的四则运算

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，则

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square}f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A\pm B$，

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to\square}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}g(x)=A\cdot B$,

$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

(2)复合运算(连续函数)

$\lim\limits_{x\to\square}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to\square}g(x))$,其中$f(x)$为连续函数.

(3)幂指函数的极限

如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A(A>0)$,$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$,且$A,B$均为有限常数,则

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=A^B.$$

【证明】$\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}[g(x)\ln f(x)]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln\left[\lim\limits_{x\to\square}f(x)\right]}=e^{B\ln A}=A^B$.

【注】当A,B不是有限常数,或A不大于0,上述命题不成立.

切记,幂指函数求极限时,$x\to\square$是同一变化过程,不能分开来求极限.例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

很多同学容易犯这样的错误:因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$,故原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^2-e^2}{x^2}=0$,正确做法见后面例题.

6.函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

$\alpha(x)$为$x\to\square$时的无穷小.

【注】该定理在计算有关极限题时作用很大,尤其是遇到有关抽象函数时,使用该定理,可以把抽象函数具体化.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$,则下列说法正确的是(　　).

A.若x_n发散,则y_n必发散　　B.若x_n无界,则y_n必有界

C.若x_n有界,则y_n必为无穷小　　D.若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小.

【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,由上述定理可得$x_ny_n=0+\alpha(n)$,其中$\alpha(n)$为当$n\to\infty$时的无穷小量.故$y_n=\dfrac{1}{x_n}\alpha(n)$,即$y_n$为无穷小量,故选D.

7. 无穷小量、无穷大量及其阶(见表 1—1—2 和表 1—1—3)

表 1—1—2

无穷小量	$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$	关系	$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$		$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{g(x)}=0$

表 1—1—3

比值		定义	记号
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$=0$	$f(x)$是比$g(x)$高阶无穷小	$f(x)=o[g(x)]$
	$=A\neq 0$	$f(x)$是$g(x)$的同阶无穷小	
	$=1$	$f(x)$与$g(x)$是等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A\neq 0$		$f(x)$是$g(x)$的k阶无穷小	$f(x)=o[g^k(x)]$

(1)无穷小量的性质

①有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

②有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(2)等价无穷小量的替换定理

设 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x),\beta(x),\tilde{\alpha}(x),\tilde{\beta}(x)$都是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x),\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)$.

【注】等价无穷小量代换用在乘、除法(整个式子,而不是部分式子),加、减法中不能用等价无穷小去替换.

(3)熟记几个常见的等价无穷小公式

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,\ln(1+x)\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a,1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,(1+x)^a-1\sim ax$.

【注】一定要把公式广义化,而且常见的变形要学会,例如,当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 0$,那么$\ln(1+f(x))\sim f(x)$;当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 1$,$\ln f(x)=\ln(1+\boxed{f(x)-1})\sim\boxed{f(x)-1}$;一般来说,考题不会直接考. 当 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^x-1\sim x$,经常以“$\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^{g(x)}$”形式出现,具体见后面例题讲解.