2016

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

考研数学（二）

名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师 陈启浩 编著

依据大纲选题
难易匹配真题
符合命题趋势

不止是模拟，更接近实战

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

2016 考研数学(二)名师精选全真模拟冲刺题10套

考研辅导名师　陈启浩　编著

机械工业出版社

本书是考研数学冲刺阶段的复习指导书，适用于参加“数学二”考试的学生。书中包含了10套精心设计的模拟试题，题目难度稍高于考研真题。这些题目大部分为首次公开发布，并且非常适合考生用来检验复习效果以及进行临考重点复习。本书的解答部分，不仅给出了详尽的解答，还特别针对考试重点和难点进行了扩展复习。

本书可作为考生自学的复习材料，也可作为考研培训班的辅导教材，还可供大学数学基础课程的教学人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

2016考研数学（二）名师精选．全真模拟冲刺题10套/陈启浩编著．—2版．—北京：机械工业出版社，2015.5

全国硕士研究生入学统一考试备考用书

ISBN 978-7-111-48612-1

Ⅰ．①2…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ．①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第269247号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　韩效杰
版式设计：霍永明　责任校对：任秀丽
封面设计：路恩中　责任印制：刘　岚
北京京丰印刷厂印刷
2015年4月第2版·第1次印刷
184mm×260mm·12印张·290千字
0 001—3 000册
标准书号：ISBN 978-7-111-48612-1
定价：29.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294
010-88379203

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
金 书 网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com

前　言

深入地读完我们编写的2016年全国硕士研究生入学统一考试备考用书（包括认真地推演了其中的每道例题和练习题）的考生，已经具有了较强的分析问题和解决问题的能力，具有了能够从容面对即将来临的研究生考试的实力．但是，为了把准备工作做得更充分，为了践行“战前多流汗，战时少流血”，应在考试前进行10场“实战演习”——认真、独立地做完10套模拟试题，其中，各套模拟试题的难度稍高于考研真题，作为最后的冲刺.

书中的10套试题是根据考研的数学大纲和编者的教学经验精心设计的，它既涵盖性强，又重点突出．其中的问题新颖，既有较强的针对性，又有明显的前瞻性．书中给出了这10套试题的详细、规范的解答，每题之后都加有附注，用简明的语言指明了与本题有关的概念、方法等值得注意之点．当然，我们在“实战演习”时，不应一遇到困难就翻看解答，一定要认真、反复地思索，这样才能达到使用本书冲刺的目的——进一步提高应试能力，向着高分进发. 使用本书的实践表明：弄通模拟试题，不想拿高分都难.

衷心祝愿考生们取得骄人的成绩，并欢迎对本书提出宝贵意见，可发邮件到 cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

北京邮电大学教授　陈启浩

目　　录

前言
模拟试题（一） …… 1
模拟试题（二） …… 8
模拟试题（三） …… 15
模拟试题（四） …… 22
模拟试题（五） …… 28
模拟试题（六） …… 35
模拟试题（七） …… 41
模拟试题（八） …… 48
模拟试题（九） …… 55
模拟试题（十） …… 61
模拟试题（一）解答 …… 68
模拟试题（二）解答 …… 82
模拟试题（三）解答 …… 92
模拟试题（四）解答 …… 104
模拟试题（五）解答 …… 116
模拟试题（六）解答 …… 128
模拟试题（七）解答 …… 140
模拟试题（八）解答 …… 152
模拟试题（九）解答 …… 164
模拟试题（十）解答 …… 175

模拟试题(一)

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{(e^{\cos x}-1)\ln\left(1+\dfrac{1}{4}x\right)}, & -\pi<x<0,\\ x^2+x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ 的可去间断点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(2) 使函数 $f(x)=x\ln(x+a)-\dfrac{1}{e}$ 仅有单调减少区间 $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right]$ 的常数 a 为

(A) -2.　　(B) -1.　　(C) 0.　　(D) 1.

[　　]

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上二阶可导，$b\in(a,\ +\infty)$，且 $f(a)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty}f(x)$，则方程 $f''(x)=0$ 在 $[a,\ +\infty)$ 上

(A) 至少有一个实根.　　(B) 至少有两个实根.

(C) 恰好有一个实根.　　(D) 恰好有两个实根.

[　　]

(4) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=f'(0)=0$，记

$$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du, & x\leqslant 0,\\ \displaystyle\int_{-x}^0\ln(1+f(x+t))\,dt, & x>0,\end{cases}$$

则 $F''(0)$ 为

(A) 1.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{3}$.　　(D) 0.

[　　]

(5) 设二元函数 $f(u,\ v)$ 有连续的偏导数，$z=f(e^x\sin y,\ e^x\cos y)$，其中 $y=y(x)$ 是微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$ 满足 $y(0)=-\dfrac{1}{2}$ 的解，则 $\dfrac{dz}{dx}$ 为

(A) $(e^x\sin y+e^x\cos y)f_u'(u,\ v)+(e^x\cos y-e^x\sin y)f_v'(u,\ v)$（其中 $u=e^x\sin y$，$v=e^x\cos y$）.

(B) $(e^x\sin y+e^x\cos y)f_u'(u,\ v)+(e^x\cos y-e^x\sin y)f_v'(u,\ v)$ $\Big($其中 $u=e^x\sin y$，$v=$

$e^x\cos y$，$y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos y)\Big)$.

(C) $\left[e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f'_u(u,v)+\left[e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]$

$\cdot f'_v(u,v)$(其中 $u=e^x\sin y$，$v=e^x\cos y$).

(D) $\left[e^x\sin y+e^x\cos y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]f'_u(u,v)+\left[e^x\cos y-e^x\sin y\cdot\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)\right]$

$\cdot f'_v(u,v)\left(\text{其中 } u=e^x\sin y,\ v=e^x\cos y,\ y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\right)$.

[　　]

(6) 设 D 是由曲线 $x^2-y^2=1$ 与直线 $x=2$ 围成的平面图形，则二重积分 $\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 为

(A) $\sqrt{3}$.　　(B) $2\sqrt{3}$.　　(C) $3\sqrt{3}$.　　(D) 0.

[　　]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant2)$ 阶反对称矩阵，$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 为对称矩阵是 n 为奇数的

(A) 充分而非必要条件.　　(B) 必要而非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分又非必要条件.

[　　]

(8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 相似，则 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}_3)+r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}_3)$ 为

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

[　　]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n\sin n}=$ ________.

(10) 设函数 $\varphi(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant1,\\ x\ln x, & x>1,\end{cases}$ $\psi(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & |x|\leqslant1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 则定积分 $\int_{-1}^{1}\varphi(\psi(x))\mathrm{d}x=$ ________.

(11) 曲线 $y=\int_0^x\tan t\mathrm{d}t$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4},\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的曲率为________.

(12) 设二元函数 $f(u,v)$ 具有连续偏导数，且在点(1，0)的充分小领域内，$f(u,v)=1-u-2v+o\left(\sqrt{(u-1)^2+v^2}\right)$. 记 $g(x,y)=f(e^y,x+y)$，则 $\mathrm{d}g(x,y)\Big|_{(0,0)}=$ ________.

(13) 设二元函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^{-\sin\theta+\sqrt{3+\sin^2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 在直角坐

标系中先 x 后 y 的二次积分为________.

(14) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 4 阶矩阵 $\left(\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \hdashline A & C^{*}\end{array}\right)^{-1}=$ ________.

三、解答题: 15 ~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x-|x|}{|x|}\right)\arctan\dfrac{1}{x}$.

(16)(本题满分 10 分)

求由直线 $y=x$ 与曲线 $y=x^2$ 围成的平面图形 D 分别绕直线 $y=1$ 和 y 轴旋转一周而成的旋转体体积.

(17)(本题满分 10 分)

分别求 $a=1$ 与 $a=2$ 时，微分方程 $y''+a^2y=\sin x+2\cos 2x$ 的通解.

(18)(本题满分 10 分)

设二元函数 $z=z(x, y)$ 满足 $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=x+y, \\ z(x, 0)=x^2, \\ z(0, y)=y^2. \end{cases}$ 记 $w=z(x+y, x-y)$，求全微分 $\mathrm{d}w$.

(19)(本题满分 11 分)

设二重积分 $\iint\limits_D r^2 \sin\theta \sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ 在直角坐标系中的被积函数为 $f(x, y)$，其中 $D=\left\{(r, \theta) \middle| 0 \leqslant r \leqslant \sec\theta, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right\}$，求 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值与最小值.

(20)(本题满分 10 分)

(Ⅰ)证明：当 $|x|$ 充分小时，有 $x^2 \leqslant \tan^2 x \leqslant x^2 + x^4$；

(Ⅱ)设 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \tan^2 \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}(n=1, 2, \cdots)$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(21)(本题满分 11 分)

设函数$f(x)$在$[0, 2]$上 2 阶可导，且满足 $\max\{|f(x)|, |f''(x)|\} \leqslant 1$. 证明 $|f'(x)| \leqslant 2(x \in [0, 2])$.

(22)(本题满分 11 分)

设向量组(A)：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$ 与向量组(B)：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^{\mathrm{T}}$ 等价，求

(Ⅰ) 常数 a；

(Ⅱ) (A)由(B)的线性表示式.

(23)(本题满 11 分).

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\-1&3&a\\4&a&0\end{pmatrix}$，正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$(其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，使得二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形，其中正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，求

(Ⅰ) 常数 a 及 f 的标准形；

(Ⅱ) $\boldsymbol{A}^*$ 能否正交相似对角化？如果能，写出使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$；如果不能，说明理由.

模拟试题(二)

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将选项前的字母填在答题纸的指定位置上.

(1) 设 $y=\dfrac{1}{x(x-1)(x+1)}$，则 $y^{(10)}$ 为

(A) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

(B) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

(C) $\dfrac{10!}{2(x-1)^{11}}-\dfrac{10!}{x^{11}}+\dfrac{10!}{2(x+1)^{11}}$.

(D) $\dfrac{1}{2(x-1)^{11}}+\dfrac{1}{x^{11}}+\dfrac{1}{2(x+1)^{11}}$.

[　　]

(2) 设函数 $y=y(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\ln^2(1+t), \\ y=(e^t-1)^2, \end{cases}$ 且 $\dfrac{dy}{dx}$ 在 $t=0$ 处连续，则 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\bigg|_{t=0}$ 为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

[　　]

(3) $y\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}$ 是函数 $y=x|\ln x|$ 的

(A) 最大值.　　(B) 最小值.　　(C) 极大值.　　(D) 极小值.

[　　]

(4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\sqrt{1-\sin^2 x}\,dx=$

(A) $\dfrac{3}{4}$.　　(B) $-\dfrac{1}{4}$.　　(C) $-\dfrac{3}{4}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

[　　]

(5) 设二元函数 $f(x,y)$ 满足 $f_x'(0,0)=1$，$f_y'(0,0)=2$，则

(A) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(B) $df(x,y)\big|_{(0,0)}=dx+2dy$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x, x)-f(0, 0)}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}f_x'(0, 0)+f_y'(0, 0)$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x, 0)-f(0, 0)}{x}=f_x'(0, 0)$.

[ ]

(6) 设 $D=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$, $D_1=\{(x, y) \mid x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$, $f(x)$是连续函数，则以下等式正确的为

(A) $\iint\limits_D [f(x)+f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(B) $\iint\limits_D [f(x)-f(-x)]\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(C) $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x)\mathrm{d}\sigma$.

(D) $\iint\limits_D f(x^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1} f(x^2)\mathrm{d}\sigma$.

[ ]

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n>2)$ 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^*)^*=$

(A) $\boldsymbol{A}$.　　(B) $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$.　　(C) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$.　　(D) $\boldsymbol{A}^*$.

[ ]

(8) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，则下列选项中为正定矩阵的是

(A) $\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{B}^*$.　　(B) $\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^*$.　　(C) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^*$.　　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$.

[ ]

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 不定积分 $\int \arctan\dfrac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x=$________.

(10) 定积分 $\int_{-1}^{2}\max\{1, x^2\}\mathrm{d}x=$________.

(11) 曲线 $\begin{cases}x=t,\\ y=t+\dfrac{1}{2}t^2\end{cases}$ 在点(0, 0)处的曲率圆面积为________.

(12) 设二元函数 $z=\begin{cases}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\ln x}, & x\geqslant 1, 0<y<+\infty,\\ \ln(x^{\ln 2})+y^2-3, & x<1, 0<y<+\infty,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$________.

(13) 设 $D=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\leqslant y\}$，则 $\iint\limits_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma==$________.

(14) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，则 $r((\boldsymbol{A}^2)^*)=$________.

三、解答题：15 ~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，记

$$g(t)=\lim_{x\to 0}\left[1+\sqrt[3]{\sin t}\,f(x)\right]^{\frac{\sqrt[3]{t^2}}{\ln(1+x)}},$$

求 $g'(0)$.

(17)(本题满分 10 分)

求不定积分 $\int \frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\mathrm{d}x$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$满足 $e^x f(x)+2e^{\pi-x}f(\pi-x)=3\sin x$，求$f(x)$在$(0,\pi)$内的极值.

(19)(本题满分 11 分)

设函数$f(x)$在$[0,1]$上 3 阶可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=f'(1)=1$. 证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f^{(3)}(\xi)=0$.