人邮考试

RENYOU KAOSHI

2015考研数学命题人高分策略

终极冲刺试卷

数学二（押题版）

全国考研数学命题研究中心 编著

命题阅卷专家 联袂倾力打造

■ 命题专家联袂打造

一线专家教授倾力合作，作者阵容强大，内容权威

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家以及一线辅导名师共同编写而成

■ 押题试卷终极冲刺

把握最新考试大纲，标准预测、权威预测

本书精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点

■ 命题秘笈倾囊相授

赠送原命题组组长20年命题秘笈，全面把握命题脉搏

本书赠送原命题组组长命题秘笈，20年命题精华，呕心力作，倾囊相授。让考生全面把握命题重点、难点，掌握命题趋势和出题动态，把握命题方向，从容应考

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

2015 考研数学命题人高分策略：终极冲刺试卷

数学二（押题版）

全国考研数学命题研究中心　编著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

2015考研数学命题人高分策略 ：押题版. 终极冲刺试卷. 数学二 / 全国考研数学命题研究中心编著. -- 北京 ：人民邮电出版社，2014.8
ISBN 978-7-115-36133-2

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第134159号

内 容 提 要

本书按照最新考试大纲，精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析，详解命题规律，诠释高频考点，帮助考生有针对性的进行复习。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

本书所提供的10套冲刺试卷，预测了2015年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练，从容备考，轻取高分。

◆ 编　　著　全国考研数学命题研究中心
责任编辑　李士振
责任印制　周昇亮

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：6.5　　2014 年 8 月第 1 版
字数：170 千字　　2014 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：21.80 元

考研辅导丛书专家委员会

前　言

德国大数学家高斯曾说过："数学是科学的皇后。"毫无疑问，数学是对人类思维能力要求最高的学科，它不仅范围广，内容多，而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的最高境界。全国硕士研究生入学考试数学是考查考生的数学功底、思维能力的科目，并不是要求考生进行高深的数学基础理论研究，但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力，包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此，要考好数学，思维能力必须有质的飞跃。无论如何，考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来，数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的"数学考试大纲"所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述，是广大考生备考的指导性文件和根本依据。考生必须从中全面领会考试精神，尤其是明确考试范围，以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点，考生一定要熟记在心，不要求的内容，应该跳过，不要浪费精力。同时要注意，不光应分析研究本年最新的大纲，还要研究去年乃至上一年的大纲，从比较中发现其变化。

为了帮助广大参加硕士研究生入学数学考试的考生备考，本书按照最新考试大纲，精心编写了这本《2015 考研数学命题人高分策略：终极冲刺试卷 数学二(押题版)》。

本书特点如下：

一、原命题组成员联袂，一线教授和专家亲自执笔，内容权威

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。本书深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。其中的每一道试题，既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析，详解命题规律，诠释高频考点，帮助考生有针对性的进行复习。

二、多角度、全方位综合分析冲刺试卷的重点和难点，把握命题动态

本书对每道试题不仅给出了详解，还对重要的、易丢分的题目做了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点，还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，分析考生常犯的错误，让考生引以为戒。

三、全面预测了 2015 年考研数学的命题方向、出题原则和规律

本书所提供的 10 套冲刺试卷，预测了 2015 年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线教师共同编写

而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者

2014 年 6 月于北京

目　录

终极冲刺试卷一

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则下列命题错误的是(　　)。

(A) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(B) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

2. 设 $f(x)$ 为可导函数,且满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为(　　)。

(A) 2　　(B) -1　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) -2

3. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$,则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶导数 n 为(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

4. 设 $I_i=\iint\limits_{D_i}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $i=1,2,3$,其中:$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$,
$D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2r^2\}$, $D_3=\{(x,y)\mid |x|\leqslant r,|y|\leqslant r\}$,
则下列结论正确的是(　　)。

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_3<I_1$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

5. 设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　)。

(A) $\int_0^x f(t^2)\,dt$　　(B) $\int_0^x f^2(t)\,dt$

(C) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$　　(D) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$

6. 若 $|f'(x)|<g'(x)\ (x\geqslant a)$,则当 $x>a$ 时必有(　　)。

(A) $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$　　(B) $|f(x)-f(a)|\geqslant g(x)-g(a)$

(C) $|f(x)-f(a)|=g(x)-g(a)$　　(D) $|f(x)-f(a)|<a$

7. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 的规范形是(　　)。

(A) $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　(B) $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

(C) $f=z_1^2-z_2^2$　　(D) $f=z_1^2$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&k\\1&k+1&1\\k&2&1\end{pmatrix}$，$B$ 是三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则（　　）。

(A)当 $k=1$ 时，$r(B)=1$　　(B)当 $k=-3$ 时，$r(B)=1$

(C)当 $k=1$ 时，$r(B)=2$　　(D)当 $k=-2$ 时，$r(B)=2$

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

9. $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt+\int_{\cos x}^0 e^{-t^2}\,dt=0$ 的实根个数是________。

10. 设 $f(x,y)$ 存在一阶偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f'_x(1,1)=2$，$f'_y(1,1)=1$；又 $\varphi(x)=f(x,f(x,f(x,x)))$，则 $\varphi'(1)=$________。

11. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{xt^2}$，则 $f'(t)=$________。

12. 设 $f(x)$ 有一个原函数为 e^{x^2}，则 $\int_0^1 x^3 f'(x^2)\,dx=$________。

13. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+xy+y^2+1)\,dx\,dy=$________。

14. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$ 的正负惯性指数都是 1，则 $a=$________。

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$。

16.（本题满分 10 分）

设 $a_1=1$，当 $n\geqslant 1$ 时，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{a_n}{1+a_n}}$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

17.（本题满分 10 分）

设 $z=u^2v^3$，$u=e^{2x}\sin y$，$v=x^2+y^3$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 dz。

18.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$ 上的最大值与最小值。

19.（本题满分 10 分）

用二重积分证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

20.（本题满分 11 分）

求微分方程 $y''+2y'-3y=(2x+1)e^x$ 的通解。

21.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，$0\leqslant a<b\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。

证明：在区间(a,b)内至少存在两点ξ_1,ξ_2，使$f'(\xi_2)\tan\frac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$。

22.（本题满分 11 分）

已知两个向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^T$与$\boldsymbol{\beta}_1=(-1,2,t)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(4,1,5)^T$。

（Ⅰ）t为何值时，两个向量组等价？

（Ⅱ）两个向量组等价时，求出它们之间的线性表示式。

23.（本题满分 11 分）

设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}$为$n$阶矩阵，$\boldsymbol{P}$可逆，且$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA}$，证明：

（Ⅰ）若$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量，则$\boldsymbol{P\alpha}$也是$\boldsymbol{A}$的特征向量；

（Ⅱ）若$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$是$\boldsymbol{A}$的特征向量，则$\boldsymbol{\alpha}$也是$\boldsymbol{P}$的特征向量。

终极冲刺试卷一参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】极限与连续

【解题分析】(A)，(B)，(C)选项都正确，只有(D)选项错误，

如$f(x)=|x|$，满足条件$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$存在，

但$f'(0^+)=1,f'(0^-)=-1$，所以$f'(0)$不存在，故应选(D)。

2.【考点提示】利用导数来求斜率

【解题分析】本题实际上要求$f'(1)$，由题设

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1,$$

得$f'(1)=-2$，应选(D)。

3.【考点提示】高阶导数

【解题分析】$f(x)=\begin{cases}4x^3 & x\geqslant0\\2x^3 & x<0\end{cases}$，$f''(x)=\begin{cases}24x & x\geqslant0\\12x & x<0\end{cases}$，

$$f'''(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{24x-0}{x}=24,$$

$$f'''(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{12x-0}{x}=12,$$

所以$n=2$，(C)是答案。

4.【考点提示】二重积分的性质

【解题分析】因为$D_1\subset D_3\subset D_2$，且$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}>0$，所以$I_1<I_3<I_2$，(C)为答案。

5.【考点提示】函数的奇偶性

【解题分析】由于$t[f(t)+f(-t)]$为奇函数，故$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$为偶函数，应选(C)。

6.【考点提示】柯西中值定理

【解题分析】因为 $0\leqslant|f'(x)|<g'(x)$，所以 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调增加。

从而 $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$

由柯西中值定理得 $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|=\left|\dfrac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}\right|$，即 $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\dfrac{|f'(\zeta)|}{g'(\zeta)}$

因此，$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|<1$，即 $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$，选(A)。

7.【考点提示】二次型

【解题分析】二次型的规范形由它的正负惯性指数确定，二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix}$，

其特征多项式 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&4-\lambda&-4\\2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(9-\lambda)$，

故 A 的特征值为 $9,0,0$，正惯性指数 $p=1$，负惯性指数 $q=0$，故选(D)。

8.【考点提示】矩阵的秩

【解题分析】$B\neq 0\Rightarrow r(B)\geqslant 1$，$AB=0\Rightarrow r(A)+r(B)\leqslant 3\Rightarrow r(B)\leqslant 3-r(A)$，

$1\leqslant r(B)\leqslant 3-r(A)$，当 $k=1$ 时，$r(A)=1$，$1\leqslant r(B)\leqslant 2$，排除(A)，(C)，

当 $k=-2$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-1&1\\-2&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&3&-3\\1&-1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，

$r(A)=3$，$1\leqslant r(B)\leqslant 0$，矛盾。排除(D)，选(B)。

二、填空题

9.【考点提示】方程的零点

【解题分析】设 $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\int_{\cos x}^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，

则 $f(0)=\int_1^0 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t<0$，$f(\dfrac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t>0$，

由介值定理知，存在 $x_0\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，使 $f(x_0)=0$。

又 $f'(x)=\sqrt{1+x^2}+\mathrm{e}^{-\cos^2x}\cdot\sin x$，而 $\sqrt{1+x^2}>1$，$|\mathrm{e}^{-\cos^2x}\cdot\sin x|\leqslant 1$，

故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调增加，$f(x)=0$ 只有唯一的根 x_0。

10.【考点提示】求复合函数的偏导数

【解题分析】由复合函数求导法则，逐层展开有 $\varphi'(x)=f_1{}'+f_2{}'[f_1{}'+f_2{}'(f_1{}'+f_2{}')]$，

所以 $\varphi'(1)=2+1\cdot[2+1\cdot(2+1)]=7$。

11.【考点提示】函数的极限

【解题分析】由于 $f(t)=t^2\mathrm{e}^{t^2}$，所以 $f'(t)=\mathrm{e}^{t^2}(t^2 2t+2t)=2t\mathrm{e}^{t^2}(t^2+1)$。

12.【考点提示】定积分的计算

【解题分析】由 $\int_0^1 x^3f'(x^2)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x^2f'(x^2)\,\mathrm{d}x^2\xlongequal{u=x^2}\dfrac{1}{2}\int_0^1 uf'(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$

其中$f(x)=(e^{x^2})'=2xe^{x^2}$,利用分部积分法,有

$$\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f(x)=xf(x)\big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2x^2e^{x^2}\big|_0^1-e^{x^2}\big|_0^1=e+1$$

故$\int_0^1 x^3 f'(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e+1)$。

13.【考点提示】二重积分

【解题分析】$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+xy+y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r+4\pi=12\pi$$

14.【考点提示】二次型

【解题分析】二次型对应的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{pmatrix}$,因为其正负惯性指数都是1,

则该二次型的规范形的秩为2,从而$r(\boldsymbol{A})=2$,

因此$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-a\\1&a&-1\\-a&-1&1\end{vmatrix}=-(a-1)^2(a+2)=0$,得$a=1$或$a=-2$。

若$a=1$,则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$,$r(\boldsymbol{A})=1\neq 2$,显然不合题意。

若$a=-2$,则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$,$r(\boldsymbol{A})=2$,

且$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-1&\lambda+2&1\\-2&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1&-2\\0&\lambda+2&1\\\lambda-3&1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-3)(\lambda+3)$,

得特征值为:$\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$。

于是该二次型的正负惯性指数均为1,符合题意,故$a=-2$。

三、解答题

15.【考点提示】求数列的极限

【解题分析】$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(x\tan\frac{1}{x}-1+1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(x\tan\frac{1}{x}-1\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{\tan t}{t}-1}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\tan t-t}{t^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}-1}{3t^2}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin^2 t}{t^2\cos^2 t}=\frac{1}{3},$$

故$\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\ln\left(n\tan\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$,即$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=e^{\frac{1}{3}}$。

16.【考点提示】数列的极限

【解题分析】令 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$，因为 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}\times\dfrac{1}{(1+x)^2}>0(x>0)$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调。

又因为 $a_1=1,0\leqslant a_{n+1}\leqslant 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 有界，

从而数列 $\{a_n\}$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则有 $A=\sqrt{\dfrac{A}{1+A}}\Rightarrow A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。

17.【考点提示】复合函数的偏导数及微分

【解题分析】

$$\begin{aligned}dz&=d(u^2v^3)=2uv^3du+3u^2v^2dv=2uv^3d(e^{2x}\sin y)+3u^2v^2d(x^2+y^3)\\&=2uv^3(2e^{2x}\sin y dx+e^{2x}\cos y dy)+3u^2v^2(2xdx+3y^2dy)\\&=(4uv^3e^{2x}\sin y+6u^2v^2x)dx+(2uv^3e^{2x}\cos y+9u^2v^2y^2)dy。\end{aligned}$$

故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4uv^3e^{2x}\sin y+6u^2v^2x$。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=4uv^3e^{2x}\cos y+4e^{2x}\sin y\frac{\partial}{\partial y}(uv^3)+6x\frac{\partial}{\partial y}(u^2v^2)\\&=4uv^3e^{2x}\cos y+4e^{2x}\sin y\left(v^3\frac{\partial u}{\partial y}+3uv^2\frac{\partial v}{\partial y}\right)+6x\left(2uv^2\frac{\partial u}{\partial y}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=4uv^3e^{2x}\cos y+4v^3e^{4x}\sin y\cos y+36uv^2e^{2x}y^2\sin y+12uv^2xe^{2x}\cos y+36u^2vxy^2\end{aligned}$$

18.【考点提示】多元函数的极值

【解题分析】由题设，讨论 $f(x,y)=x^2+4y^2+9$ 在约束条件 $x^2+y^2=4$ 下的条件极值。由拉格朗日乘数法，令 $F(x,y,\lambda)=x^2+4y^2+9+\lambda(x^2+y^2-4)$，

有 $\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0,\dfrac{\partial F}{\partial y}=8y+2\lambda y=0,\dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2-4=0$。

解得 $x=0,y=\pm2,\lambda=-4;x=\pm2,y=0,\lambda=-1$。

$f(0,2)=25,f(0,-2)=25,f(2,0)=13,f(-2,0)=13$。

又 $f(x,y)=x^2+4y^2+9\geqslant 9$，且 $f(0,0)=9$，

所以 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大值为25，最小值为9。

19.【考点提示】应用二重积分计算反常积分

【解题分析】令 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant0,y\geqslant0\}$，

$S=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant R\}$，

$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2R^2,x\geqslant0,y\geqslant0\},\varphi(x,y)=e^{(x^2+y^2)}$，

因为 $\varphi(x,y)=e^{(x^2+y^2)}\geqslant 0$ 且 $D_1\subset S\subset D_2$，

所以 $\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\leqslant\iint\limits_{S}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\leqslant\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$，

而 $\iint\limits_{D_1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$，$\iint\limits_{D_2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$，

$\iint\limits_{S}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_0^R e^{-x^2}dx\int_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$，

于是 $\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})\leqslant\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2\leqslant\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2R^2})$。

令 $R\to+\infty$ 同时注意到 $\int_0^R e^{-x^2}dx>0$，根据夹逼定理得 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$。

20.【考点提示】微分方程的解

【解题分析】特征方程为 $\lambda^2+2\lambda-3=0$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-3$，

则 $y''+2y'-3y=0$ 的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$。

令原方程的特解为 $y_0=x(ax+b)e^x$，代入原方程得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{8}$，

所以原方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\frac{1}{8}(2x^2+x)e^x$。

21.【考点提示】柯西中值定理的应用

【解题分析】设 $g_1(x)=\sin x$，由柯西中值定理得 $\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1},a<\xi_1<b$，

又设 $g_2(x)=\cos x$，同理得 $\frac{f(b)-f(a)}{\cos b-\cos a}=\frac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2},a<\xi_2<b$，

比较两等式得 $\frac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b-\sin a)=-\frac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos b-\cos a)$。

从而 $\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1)=-\frac{\cos b-\cos a}{\sin b-\sin a}f'(\xi_2)$，即 $\tan\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi_2)=\frac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1)$。

22.【考点提示】向量间的线性相关及线性表示

【解题分析】(Ⅰ)对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\2&0&2&1\\3&1&t&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&-2&t+3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&t-1&0\end{pmatrix},$$

当 $t=1$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)$，

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，即两个向量组等价。

(Ⅱ)两个向量组等价时，$\boldsymbol{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&\frac{7}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{7}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{4}{9}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{1}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{2}{9}\boldsymbol{\beta}_2$。

23.【考点提示】特征值与特征向量

【解题分析】(Ⅰ)设 $\boldsymbol{A\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P\alpha})=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{P}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{P\alpha})$，

故 $\boldsymbol{P\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量。

(Ⅱ)由 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值知，$\boldsymbol{A}$ 的每个特征值只对应一个线性无关的特征向量，

又 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{P\alpha}$ 是对应同一个特征值的特征向量，故它们线性相关。

故存在常数 c，使得 $\boldsymbol{P\alpha}=c\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{P}$ 的特征向量。

终极冲刺试卷二

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设微分方程 $y(x)$ 是方程 $y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$ 满足 $y(0)=0,y'(0)=1$ 的解，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}$（　　）。

(A)等于0　　(B)等于1　　(C)等于2　　(D)不存在。

2. 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$，则能使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的条件是（　　）。

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$　　(B) $x_1<x_2,y_1<y_2$

(C) $x_1>x_2,y_1>y_2$　　(D) $x_1<x_2,y_1>y_2$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2,0\leqslant x\leqslant1\\2-x,1<x\leqslant2\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt\,(x\in[0,2])$，则（　　）。

(A) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\leqslant x\leqslant1\\\dfrac{1}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\leqslant2\end{cases}$　　(B) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\leqslant x\leqslant1\\-\dfrac{7}{6}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\leqslant2\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\leqslant x\leqslant1\\\dfrac{x^3}{3}+2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\leqslant2\end{cases}$　　(D) $F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3},0\leqslant x\leqslant1\\2x-\dfrac{x^2}{2},1<x\leqslant2\end{cases}$

4. 设 $f(0,0)=0$，当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 为如下形式之一，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导的是（　　）。

(A) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　(B) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

(C) $\sqrt{x^2-y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$　　(D) $\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$

5. 下列说法中正确的是（　　）。

(A)无界函数与无穷大的乘积必为无穷大

(B)无界函数与无穷小的乘积必为无穷小

(C)有界函数与无穷大之和必为无穷大

(D)无界函数与无界函数的乘积必无界

6. 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶线性非齐次方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1，C_2,C_3 为任意常数，则该方程的通解是（　　）。

(A) $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3$　　(B) $C_1y_1+C_2y_2+(C_1+C_2)y_3$

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　(D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵,下列结论不正确的是(　　)。

(A)$\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵

(B)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为对称矩阵

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵

(D)$k\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

8. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1,1,2$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,则下列矩阵可逆的是(　　)。

(A)$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$　　(B)$\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}$　　(C)$\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{E}$　　(D)$\boldsymbol{B}^{2}-4\boldsymbol{E}$

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上。

9. 设 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2-3x+1}$,则 $f^{(n)}(0)=$ ________ $(n\geqslant 1)$。

10. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^3 x}=$ ________。

11. 以 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$ 为通解的二阶常系数齐次线性微分方程为________。

12. 积分 $I=\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________。

13. 设 $z=xyf\left(\dfrac{y}{x}\right)$,其中 $f(u)$ 可导,则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________。

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$,而 $n\geqslant 2$ 为正整数,则 $\boldsymbol{A}^n-2\boldsymbol{A}^{n-1}=$ ________。

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (本题满分 10 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x) & x<0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t & x>0\end{cases}$,试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

16. (本题满分 10 分)

解微分方程:$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3(x-1)^2(1+y^2)\\ y_{|x=0}=1\end{cases}$。

17. (本题满分 9 分)

计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x$。

18. (本题满分 11 分)

求微分方程 $y''-a(y')^2=0\ (a>0)$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=-1$ 的特解。

19. (本题满分 10 分)

求微分方程 $xy'=3y-6x^2$ 的一个解 $y=y(x)$,使得曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 所围成

的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积最小。

20.（本题满分 10 分）

计算 $I=\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}\sigma$，区域 D 由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 和 x 轴围成。

21.（本题满分 11 分）

在 $t=0$ 时，两只桶内各装 10L 的盐水，盐的浓度为 15g/L，用管子以 2L/min 的速度将净水输入到第一只桶内，搅拌均匀后的混合液又由管子以 2L/min 的速度被输送到第二只桶内，再将混合液搅拌均匀，然后用 1L/min 的速度输出，求出任意时刻 $t\geqslant 0$，从第二只桶内流出的水中含盐所满足的微分方程。

22.（本题满分 11 分）

设四维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4,2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,b)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,-1,a,-9)^T$，$\boldsymbol{\beta}=(1,3,10,a+b)^T$。

问：（Ⅰ）当 a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出；

（Ⅱ）当 a,b 取何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，并写出此时的表达式。

23.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为三维线性无关列向量组，且有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$。求：

（Ⅰ）求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值；

（Ⅱ）$\boldsymbol{A}$ 是否可以对角化。

终极冲刺试卷二参考答案与解析

一、选择题

1.【考点提示】函数的极限

【解题分析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}y''(0)$，

将 $x=0$ 代入方程，得 $y''(0)+(x-1)y'(0)+x^2y(0)=1$，又 $y(0)=0,y'(0)=1$，

故 $y''(0)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=1$，故选（B）。

2.【考点提示】二元函数的性质

【解题分析】$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 x 单调减少，

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0\Rightarrow f(x,y)$ 关于 y 单调增加。

当 $x_1>x_2,y_1<y_2$ 时，$f(x_1,y_1)<f(x_2,y_1)<f(x_2,y_2)$，选（A）。

3.【考点提示】求复合函数的积分

【解题分析】当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$F(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\dfrac{x^3}{3}$；