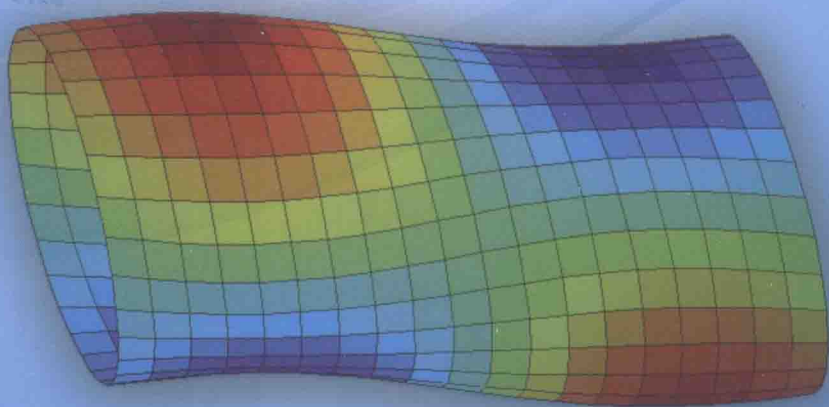




板壳自由振动的精确解

Exact Solutions of Free Vibrations of Plates and Shells

邢誉峰 刘波 著



国家科学技术学术著作出版基金资助出版

板壳自由振动的精确解

Exact Solutions of Free Vibrations of Plates and Shells

邢誉峰 刘 波 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书包含了各向同性和正交各向异性 Kirchhoff 板(薄板)、Ressiner-Mindlin 板(一阶剪切板或中厚板)和 Donnell 圆柱薄壳自由振动的精确解,其中主要内容为作者利用分离变量法得到的最新研究成果。

第 1 章主要介绍了各向同性矩形薄板自由振动的精确解,包括过去普遍认为难以求解的邻边固支、三边固支和四边固支矩形薄板的精确解。第 2 章主要介绍了一组对边简支各向同性矩形板面内自由振动的所有精确解,其中非简支对边为非对称边界时的精确解是过去不存在的。第 3 章主要介绍了各向同性矩形剪切板自由振动的精确解,包括一组对边简支矩形板的精确解,还介绍了作者得到的简支与固支边界任意组合情况矩形板的简化封闭解。第 4 章和第 6 章分别介绍了壳体的一般理论和正交各向异性板壳理论。第 5 章主要介绍了在各种经典边界条件下各向同性 Donnell 封闭圆柱薄壳自由振动的精确解,还介绍了作者得到的不存在漏频问题的薄膜近似解,过去普遍认为这些显式的精确解和薄膜近似解形式复杂并且难以得到。第 7 章主要介绍了正交各向异性矩形薄板自由振动和矩形板面内自由振动的精确解。第 8 章主要介绍了正交各向异性矩形剪切板自由振动的精确解。第 9 章主要介绍了正交各向异性 Donnell 封闭圆柱薄壳自由振动的精确解,还包括简化封闭解。其中第 7 章至第 9 章介绍都是作者的研究成果。

为了便于读者阅读和应用,书中还给出了部分本征解的 MATLAB 推导程序和本征方程的求解程序。

本书可以作为高等院校力学专业高年级本科生、研究生,以及相关科研人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

板壳自由振动的精确解/邢誉峰,刘波著. —北京:科学出版社,2014

ISBN 978-7-03-042660-4

I. ①板… II. ①邢… ②刘… III. ①壳体(结构)-自由振动-精确解 IV. ①O321

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 282418 号

责任编辑:刘信力/责任校对:邹慧卿

责任印制:肖 兴/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京佳信达欣艺术印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 1 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 1 月第一次印刷 印张:25 3/4

字数:509 000

定价:168.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

连续系统自由振动控制方程是偏微分方程, 通常采用分离变量方法来求解其自由振动问题, 即通过分离空间坐标函数和时间坐标函数, 把自由振动偏微分方程转化为关于空间坐标的常 (一维问题) 或偏 (二维和三维问题) 微分方程和关于时间坐标的常微分方程.

在自由振动问题分析中, 关于空间坐标的微分方程称为本征或振型微分方程. 借助边界条件可以求得本征微分方程的解, 通常称该解为本征解, 它包括本征函数 (或振型函数, 或模态函数) 和本征值超越方程 (或频率方程), 求解本征解或主振动响应为自由振动问题分析的主要工作. 在得到了本征值方程之后, 根据 Newton Raphson 等方法求解该本征值方程就可以得到空间本征值和时间本征值, 进而得到系统固有振动频率. 根据本征解和振型叠加方法、振型函数的正交性和初始条件可以求得系统的自由振动响应.

本书所言的自由振动精确解是指利用边界条件求解本征微分方程而得到的精确本征解, 即精确的本征函数和精确的本征值超越方程. 板壳是工程结构的主要元件, 其自由振动的精确求解对学术和工程都具有重要的意义.

本人大约从 1996 年开始思考板壳自由振动精确解的求解方法问题. 2005 年, 硕士生钱志英的学位论文利用辛对偶方法得到了一组对边简支另外一组对边固支矩形板面内自由振动的精确解, 加拿大 D.J. Gorman 关于平面问题的研究工作成果是在 2004 年发表的. 2009 年, 在刘波的博士论文工作中, 有关工作取得明显的进展. 譬如, 我们利用空间坐标分离变量方法 (不是经典的逆法) 得到了邻边固支、三边固支和四边固支矩形薄板自由振动的精确解 (不是级数叠加形式的解析解), 这些解过去被同行学者, 如美国的 C.W. Bert, M. Malik (1994), 加拿大的 D.J. Gorman (1976), 日本的 T. Sakata 等 (1996), 意大利的 M.E. Biancolini (2005), 认为不存在或难以求解.

在撰写本书过程中, 我们对已经发表的成果重新进行了整理, 剔除了原来论文中的打印错误和个别不准确的观点, 对参考文献重新进行了整理. 尽管如此, 也难以保证本书中不存在错误或不妥之处, 也难免遗漏重要的参考文献, 敬请读者原谅, 并批评指正.

全书内容以刘波博士学位论文成果和博士后期间工作成果为基础,第1章和第2章由邢誉峰教授执笔,其余各章由刘波执笔,邢誉峰负责全书通稿、审读工作。

感谢国家自然科学基金(10772014, 11172028)和国家科学技术学术著作出版基金的支持。

北京航空航天大学 邢誉峰

2012年8月

目 录

第 1 章 薄板横向自由振动精确解	1
1.1 薄板横向自由振动方程	1
1.2 四边简支矩形薄板	4
1.3 一组对边简支矩形薄板	5
1.4 四边为简支和固支任意组合的矩形薄板	9
1.4.1 精确解	9
1.4.2 频率方程的数值解法	11
1.4.3 算例	12
1.5 圆形薄板	13
1.5.1 精确解	13
1.5.2 算例	14
附录	15
参考文献	20
第 2 章 平板面内自由振动的精确解	22
2.1 平板面内自由振动方程	22
2.2 四边简支矩形板	24
2.3 一组对边简支矩形板	27
2.3.1 对边 $x = 0$ 和 a 简支	29
2.3.2 对边 $y = 0$ 和 b 为任意边界	30
2.3.3 本征值方程和数值结果	31
2.4 圆形板	39
附录	42
参考文献	48
第 3 章 各向同性中厚板横向自由振动的精确解	50
3.1 矩形中厚板横向自由振动的微分方程	51
3.1.1 三个广义位移的本征微分方程	51
3.1.2 两个广义位移的本征微分方程	53
3.1.3 本征值代数方程	53
3.1.4 边界条件	55
3.2 四边简支矩形中厚板	55

3.3 一组对边简支矩形中厚板	56
3.3.1 通解	57
3.3.2 本征函数和本征方程	59
3.3.3 本征方程及其 MATLAB 推导	60
3.3.4 数值结果	69
3.4 矩形中厚板横向自由振动的简化封闭解	72
3.4.1 简化边界条件	73
3.4.2 本征方程及其 MATLAB 推导	74
3.4.3 本征方程的数值解法	80
3.4.4 数值结果	80
3.5 圆形中厚板	85
附录	86
参考文献	111
第 4 章 壳体的一般理论	112
4.1 曲线坐标与正交曲线坐标	113
4.2 正交曲线坐标中的弹性力学几何方程	115
4.3 壳体的正交曲线坐标	118
4.4 壳体几何方程	120
4.5 内力及物理方程	122
4.6 壳体平衡微分方程	125
4.7 壳体边界条件	128
参考文献	130
第 5 章 各向同性圆柱薄壳自由振动的精确解	131
5.1 圆柱薄壳自由振动微分方程	132
5.2 简支封闭圆柱薄壳	134
5.3 非简支边界条件的封闭圆柱薄壳	138
5.3.1 本征方程及其推导 MATLAB 程序	139
5.3.2 数值结果	150
5.4 圆柱薄壳自由振动的简化封闭解	152
附录	159
参考文献	189
第 6 章 各向异性板壳理论	191
6.1 各向异性弹性力学基础	192
6.1.1 具有一个弹性对称面的材料	193
6.1.2 正交各向异性材料	194

6.1.3 横观各向同性材料	194
6.1.4 各向同性材料	195
6.1.5 正交各向异性材料的工程弹性常数	196
6.1.6 平面应力状态下单层复合材料的应力-应变关系	197
6.2 单层材料任意方向的应力-应变关系	199
6.3 层合薄板的刚度	200
6.3.1 基本假设	200
6.3.2 本构关系	201
6.3.3 对称角铺设层合板	203
6.3.4 对称正交铺设层合板	204
6.3.5 反对称角铺设层合板	204
6.3.6 反对称正交铺设层合板	205
6.4 各向异性一阶剪切叠层板理论	206
6.5 各向异性叠层薄壳理论	209
参考文献	210
第 7 章 正交各向异性薄板横向和面内自由振动的精确解	211
7.1 正交各向异性薄板的横向自由振动	211
7.1.1 边界条件	213
7.1.2 分离变量解法	213
7.1.3 本征值方程和本征函数	216
7.1.4 频率的求解方法	218
7.1.5 数值比较和讨论	218
7.2 一组对边简支正交各向异性板的面内自由振动	223
7.2.1 边界条件	225
7.2.2 面内振动的精确解	225
7.2.3 四边简支板	227
7.2.4 对边简支板	230
7.2.5 数值结果和讨论	236
附录	244
参考文献	270
第 8 章 正交各向异性中厚板横向自由振动的精确解	272
8.1 正交各向异性矩形中厚板的横向自由振动	272
8.2 对边简支正交各向异性矩形中厚板	274
8.2.1 本征根和本征函数	275
8.2.2 四边简支情况	278

8.2.3 对边简支情况	279
8.2.4 结果比较	286
8.3 正交各向异性矩形中厚板的简化封闭解	290
8.3.1 简化封闭解	291
8.3.2 结果比较	295
附录	298
参考文献	327
第 9 章 正交各向异性圆柱薄壳自由振动的精确解	329
9.1 正交各向异性圆柱薄壳自由振动的微分方程	329
9.2 简支正交各向异性圆柱薄壳	332
9.3 非简支正交各向异性圆柱薄壳	334
9.3.1 本征函数的一般形式	334
9.3.2 本征方程和本征函数系数	336
9.3.3 数值结果	346
9.4 正交各向异性圆柱薄壳自由振动的简化封闭解	353
9.4.1 简化封闭解	353
9.4.2 数值结果	357
附录	359
参考文献	398
索引	400

第1章 薄板横向自由振动精确解

在已有教科书和本书作者之外的其他学者发表的论文中, 通常认为至少有一组对边(两个相对的边)简支的矩形薄板, 才可以求得其横向自由振动的精确解^[1-4], 且用的是逆法.

对于薄板的横向自由振动问题, 振型函数 $W(x, y)$ 是两个空间坐标 x 和 y 的函数, 每个空间坐标对应一个本征值. 在半逆法中, 针对对边简支边界条件, 人们可以猜到与这对边对应的空间本征值及其本征函数, 这样矩形薄板的双空间本征值问题就转化为类似梁的单空间本征值问题. 对于除了对边简支之外的其他情况, 这种方法难以应用或无法应用, 这是逆法的缺陷, 尽管它是二维弹性问题的重要解法.

薄板自由振动问题已被广泛研究, 如泊松、瑞利的开拓性工作^[5,6] 及铁木辛柯从能量角度做的研究^[7]. Graff^[8] 总结了对边简支矩形薄板的振型函数和频率方程.

Gorman^[9,10] 采用叠加方法求得了悬臂和自由矩形薄板横向自由振动的级数解, 该方法把振型函数表示为三角函数与双曲函数叠加的形式. Kshirsagar 和 Bhaskar^[11] 提出一种新的叠加方法, 他们采用 Lévy 形式封闭解的级数来简化求解过程, 且不牺牲精度. 基于 Germain-Lagrange 理论, Filipich 和 Rosales^[12] 提出求解矩形薄板自由振动频率的变分方法. Seok 等^[13] 采用变分方法研究了悬臂板的自由振动问题, 该方法精确满足微分方程和侧边边界条件, 以弱形式满足自由边和固支边的边界条件. Hedrih^[14] 用振型叠加方法研究了弹性连接双薄板的自由振动和受迫振动. 钟阳等^[15,16]、鲍四元和邓子辰^[17] 采用 Hamilton 辛对偶方法研究了薄板自由振动的频率和振型, 他们都把振型函数展开成了辛本征函数叠加形式.

作者^[18] 利用分离变量方法(非逆法)给出了矩形薄板在简支和固支边界任意组合情况下自由振动的封闭(非级数)形式精确解, 若一组对边简支, 则另外一组对边可以包括自由边.

1.1 薄板横向自由振动方程

薄板横向振动是指其振动方向垂直于中性面的振动, 是工程板结构的主要振动形式. 薄板理论基本假设可以概括为三条:

- (1) 垂直于薄板中面的直线段, 在板变形后仍然为直线并垂直于变形后的中面;
- (2) 当薄板发生弯曲小变形时, 板中面的拉伸可以忽略;
- (3) 横向应力的作用与面内应力的作用相比可以忽略不计.

前两条假设也称为 Kirchhoff 假设, 基于该假设可知薄板理论适用于小变形; 第三条假设告诉我们, 薄板理论可以使用平面应力本构关系, 一般教科书和本书用的就是平面应力本构关系。

薄板横向自由振动的一般问题是这样提出的: 在给定横向静荷载作用下处于平衡位置的薄板, 受到初始扰动后偏离该平衡位置, 并在该平衡位置附近做微幅振动。自由振动分析的两个工作是

(1) 求薄板固有振动的振型和频率, 特别是最低频率 (基频)。本书内容主要是针对这部分工作。

(2) 已知初始扰动, 即已知初挠度及初速度, 求薄板在任一瞬时的挠度, 进而求得薄板在该瞬时的内力。

下面简要推导薄板的自由振动方程, 并给出求解频率和振型所使用的典型边界条件。

设薄板在静平衡位置的挠度为 $w_{st} = w_{st}(x, y)$, 产生该挠度的横向静荷载为 $q_{st} = q_{st}(x, y)$, 如重力等。根据 Newton 第二定律, 可得薄板中性面微分方程

$$D\nabla^4 w_{st} = q_{st} \quad (1.1.1)$$

式中, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ 为板的弯曲刚度, E 、 h 和 ν 分别为杨氏模量、板的厚度和泊松 (Poisson) 比, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ 为双调和算子, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为拉普拉斯算子。式 (1.1.1) 表示薄板单位面积上的弹性力 $D\nabla^4 w_{st}$ 与横向静荷载 q_{st} 平衡。设自由振动位移为 $w_{free} = w_{free}(x, y, t)$, 则薄板单位面积上弹性力 $D\nabla^4 w_{free}$ 与横向静荷载 q_{st} 及惯性力 $-\rho h \partial^2 w_{free}/\partial t^2$ 平衡, 即

$$D\nabla^4 w_{free} = q_{st} - \rho h \frac{\partial^2 w_{free}}{\partial t^2} \quad (1.1.2)$$

其中 ρ 为薄板单位体积的质量。将式 (1.1.2) 与式 (1.1.1) 相减得

$$D\nabla^4 (w_{free} - w_{st}) = -\rho h \frac{\partial^2 w_{free}}{\partial t^2} \quad (1.1.3)$$

由于 w_{st} 不随时间改变, 即 $\frac{\partial^2 w_{st}}{\partial t^2} = 0$, 所以, 式 (1.1.3) 可以改写为

$$D\nabla^4 (w_{free} - w_{st}) = -\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w_{free} - w_{st}) \quad (1.1.4)$$

在振动学中, 为了简便, 在进行结构动力学分析时, 通常把静平衡位置作为坐标原点, 或板的动挠度从静平衡位置量起。于是薄板在任一瞬时的挠度为 $w = w_{free} - w_{st}$, 式 (1.1.4) 成为

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1.5)$$

这就是薄板自由振动微分方程. 式 (1.1.5) 的解是彼此独立的各阶主振动之和, 而任意一阶主振动的形式为

$$w = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] W(x, y) \quad (1.1.6)$$

其中, $W(x, y)$ 为模态函数或振型函数, 也称为本征函数; ω 为与振型函数对应的自由主振动频率, 或称为固有振动频率, $i\omega(i^2 = -1)$ 也就是与时间坐标对应的本征值. 把式 (1.1.6) 代入自由振动微分方程 (1.1.5) 中, 消去非零因子 $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ 得所谓的本征微分方程

$$\nabla^4 W - \omega^2 \frac{\rho h}{D} W = 0 \quad (1.1.7)$$

令

$$\rho h \omega^2 / D = \gamma^4 \quad (1.1.8)$$

方程 (1.1.7) 简化为

$$\nabla^4 W - \gamma^4 W = 0 \quad (1.1.9)$$

通常只有当 ρh 和 D 为常数时, 根据边界条件才可能求得振型函数和频率的精确解. 再根据振型函数的正交性和初始条件确定式 (1.1.6) 中的积分系数.

虽然本书的书名是“板壳自由振动的精确解”, 但从式 (1.1.6) 可以看出, 当用振型叠加方法求解自由问题时, 其核心问题也就是求解振型函数和频率. 因此本书讨论的主要问题也就是如何根据边界条件求解本征微分方程的精确解, 或精确的振型函数和频率方程.

薄板典型边界条件包括简支、固支和自由边界, 它们的形式分别为

$$w = 0, M_n = 0 \quad (\text{简支边, 用 SS 表示}) \quad (1.1.10a)$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (\text{固支边, 用 C 表示}) \quad (1.1.10b)$$

$$M_n = 0, Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \quad (\text{自由边, 用 F 表示}) \quad (1.1.10c)$$

式中, n 为薄板边界的外法向方向, s 为切向方向; M_n , Q_n 和 M_{ns} 分别为单位中面宽度上的法向弯矩、法向剪力和边界面内的扭矩. 在从方程 (1.1.9) 求解振型和频率时, 需要把边界条件 (1.1.10) 用振型函数来表示. 譬如, 对于如图 1.1 所示的矩形薄板, 考虑分离变量形式的振型函数 $W(x, y) = X(x)Y(y)$, 对于 $x=0$ 边, 针对三种典型边界条件, 式 (1.1.10) 的形式为

$$X(0)Y(y) = 0, \frac{\partial^2 X(0)}{\partial^2 x} Y(y) + \nu \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} X(0) = 0 \quad (\text{SS}) \quad (1.1.11a)$$

$$X(0)Y(y) = 0, \frac{\partial X(0)}{\partial x} Y(y) = 0 \quad (\text{C}) \quad (1.1.11b)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(0)}{\partial^2 x} Y(y) + \nu \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} X(0) = 0 \\ \frac{\partial^3 X(0)}{\partial^3 x} Y(y) + (2 - \nu) \frac{\partial X(0)}{\partial x} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} = 0 \end{cases} \quad (\text{F}) \quad (1.1.11\text{c})$$

或

$$X(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 X(0)}{\partial^2 x} = 0 \quad (\text{SS}) \quad (1.1.12\text{a})$$

$$X(0) = 0, \quad \frac{\partial X(0)}{\partial x} = 0 \quad (\text{C}) \quad (1.1.12\text{b})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(0)}{\partial^2 x} Y(y) + \nu \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} X(0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 X(0)}{\partial^2 x} Y(y) + (2 - \nu) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial^2 y} X(0) \right] = 0 \end{cases} \quad (\text{F}) \quad (1.1.12\text{c})$$

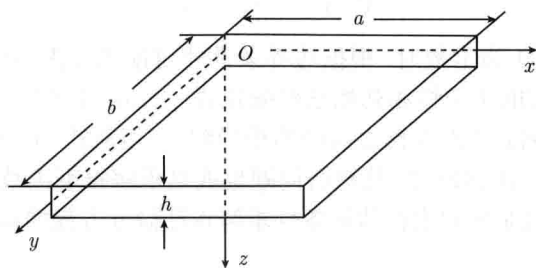


图 1.1 矩形板

1.2 四边简支矩形薄板

纳维 (C.L.M.H. Navier) 在 1820 年首次提出用重三角级数求解四边简支矩形薄板静平衡问题, 后世称之为纳维法. 纳维法也可以用来求解四边简支矩形薄板自由振动问题的精确解. 设振型函数为

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.2.1)$$

其中, m 及 n 为整数, a 和 b 为矩形板在 x 和 y 坐标方向的长度. 容易验证式 (1.2.1) 给出的振型函数满足矩形薄板的四边简支边界条件. 把式 (1.2.1) 代入本征微分方程 (1.1.9) 得

$$\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \gamma^4 \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (1.2.2)$$

上式对任意 x 和 y 都成立, 因此有

$$\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \gamma^4 = 0 \quad (1.2.3)$$

由此得固有振动频率

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (1.2.4)$$

当薄板以这一频率振动时, 其振动形式是由式 (1.2.1) 给出的振型函数来描述. 图 1.2 给出了几阶振型.

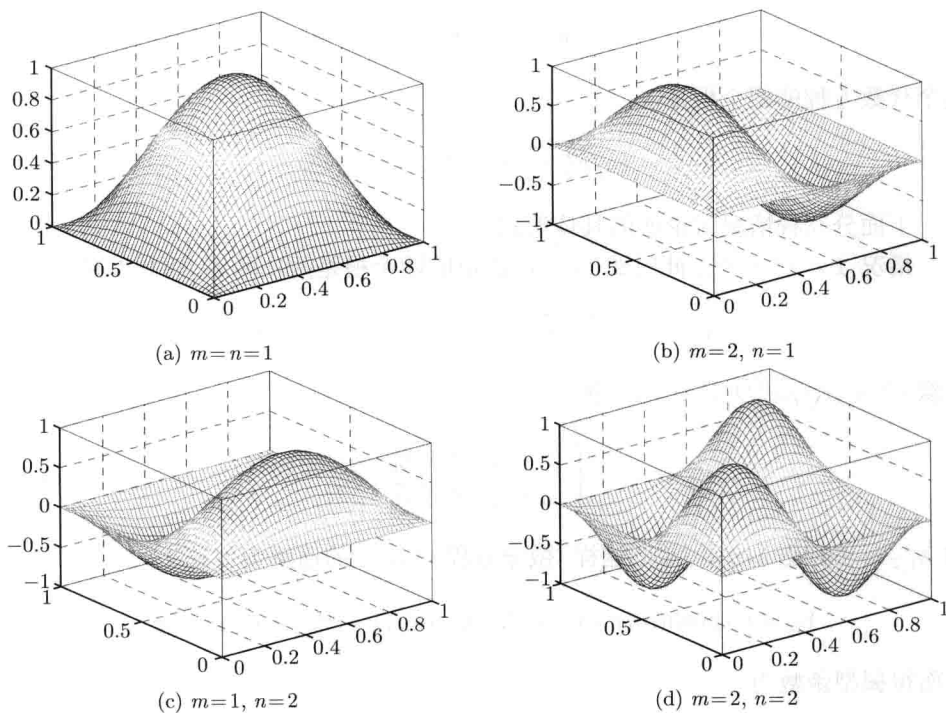


图 1.2 简支矩形板的振型

1.3 一组对边简支矩形薄板

当矩形薄板仅有一组对边简支, 另外一组对边为其他任意边界时, 可以利用莱维 (M. Levy) 法求矩形薄板的振型函数和频率. 值得指出的是, 对于这种边界情况, 用这种半逆法可以得到精确的振型函数形式和精确的超越频率方程, 而不能给出类似式 (1.2.4) 的固有振动频率的精确显式结果.

设薄板的 $x=0$ 及 $x=a$ 边为简支, 令 $X_m(x) = \sin(\delta_m x)$, 其中 $\delta_m = m\pi/a$. 满足该边界条件的分离变量形式振型函数为

$$W_{mn}(x, y) = X_m(x)Y_n(y) = Y_n(y) \sin(\delta_m x) \quad (1.3.1)$$

其中 Y_n 只是 y 的函数. 将式 (1.3.1) 代入本征微分方程 (1.1.9) 得

$$\frac{d^4 Y_n}{dy^4} - 2\delta_m^2 \frac{d^2 Y_n}{dy^2} + (\delta_m^4 - \gamma^4) Y_n = 0 \quad (1.3.2)$$

令 $Y_n = e^{\lambda y}$ (λ 为对应坐标 y 的空间本征值), 把它代入式 (1.3.2) 得如下本征值方程

$$\lambda^4 - 2\delta_m^2 \lambda^2 + (\delta_m^4 - \gamma^4) = 0 \quad (1.3.3)$$

这个代数方程的四个根是

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\delta_m^2 + \gamma^2}, \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{\delta_m^2 - \gamma^2} \quad (1.3.4)$$

下面分三种情况讨论解的具体形式.

情况 1 $\gamma^2 > \delta_m^2$, 此时式 (1.3.4) 给出的四个根是两实两虚, 可以写成

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\gamma^2 + \delta_m^2}, \quad \lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\gamma^2 - \delta_m^2} \quad (1.3.5)$$

注意 $\gamma^2 = \omega \sqrt{\rho h/D}$, $i^2 = -1$. 令

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\gamma^2 + \delta_m^2} \\ \beta = \sqrt{\gamma^2 - \delta_m^2} \end{cases} \quad (1.3.6)$$

则 $\lambda_{1,2} = \pm \alpha$ 及 $\lambda_{3,4} = \pm i\beta$. 这样, 微分方程 (1.3.2) 的通解为

$$Y_n = C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \sinh(\alpha y) + C_3 \cos(\beta y) + C_4 \sin(\beta y)$$

从而得振型函数为

$$W_{mn} = [C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \sinh(\alpha y) + C_3 \cos(\beta y) + C_4 \sin(\beta y)] \sin(\delta_m x) \quad (1.3.7)$$

情况 2 $\gamma^2 < \delta_m^2$, 此时方程 (1.3.3) 的四个根都是实根, 即 $\lambda_{1,2} = \pm \alpha$, $\lambda_{3,4} = \pm \beta'$, 其中 $\beta' = \sqrt{\delta_m^2 - \gamma^2}$, $\beta'^2 = -\beta^2$. 微分方程 (1.3.2) 的通解为

$$Y_n = C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \sinh(\alpha y) + C_3 \cosh(\beta' y) + C_4 \sinh(\beta' y) \quad (1.3.8)$$

情况 3 $\gamma^2 = \delta_m^2$, 此时微分方程 (1.3.2) 的通解为

$$Y_n = C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 y \cosh(\alpha y) + C_3 \sinh(\alpha y) + C_4 y \sinh(\alpha y) \quad (1.3.9)$$

不论哪一种情况, 都可由对边 $y=0$ 及 $y=b$ 的四个边界条件得到关于 $C_1 \sim C_4$ 的齐次线性方程组. 由于 $C_1 \sim C_4$ 不能同时等于零, 于是该方程组的系数行列式等于零, 进而得到关于固有振动频率的超越方程和 $C_1 \sim C_4$ 之间的关系.

例如, 设 $y=0$ 边为简支 (SS) 而 $y=b$ 边为夹支 (或固支) 边 (C), 则四个边界条件为

$$Y|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0 \quad (1.3.10)$$

考虑情况 1, 将 (1.3.7) 式代入式 (1.3.10) 得到关于 $C_1 \sim C_4$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} C_1 + C_3 = 0 \\ \alpha^2 C_1 - \beta^2 C_3 = 0 \\ C_1 \cosh(\alpha b) + C_2 \sinh(\alpha b) + C_3 \cos(\beta b) + C_4 \sin(\beta b) = 0 \\ C_1 \alpha \sinh(\alpha b) + C_2 \alpha \cosh(\alpha b) - C_3 \beta \sin(\beta b) + C_4 \beta \cos(\beta b) = 0 \end{cases}$$

令其系数行列式等于零, 即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & -\beta^2 & 0 \\ \cosh(\alpha b) & \sinh(\alpha b) & \cos(\beta b) & \sin(\beta b) \\ \alpha \sinh(\alpha b) & \alpha \cosh(\alpha b) & -\beta \sin(\beta b) & \beta \cos(\beta b) \end{vmatrix} = 0$$

展开并简化得

$$\beta \tanh(\alpha b) - \alpha \tan(\beta b) = 0 \quad (1.3.11a)$$

或

$$\frac{\tanh(\alpha b)}{\alpha} - \frac{\tan(\beta b)}{\beta} = 0 \quad (1.3.11b)$$

或

$$\frac{\tanh \sqrt{\omega b^2 \sqrt{\rho h/D} + m^2 \pi^2 b^2 / a^2}}{\sqrt{\omega b^2 \sqrt{\rho h/D} + m^2 \pi^2 b^2 / a^2}} - \frac{\tan \sqrt{\omega b^2 \sqrt{\rho h/D} - m^2 \pi^2 b^2 / a^2}}{\sqrt{\omega b^2 \sqrt{\rho h/D} - m^2 \pi^2 b^2 / a^2}} = 0 \quad (1.3.11c)$$

对于给定边长 a 和 b , 可取 $m=1, 2, 3, \dots$, 用试算法求得 $\omega b^2 \sqrt{\rho h/D}$ 的实根, 即可求得频率 ω . 最低固有振动频率或基频可以表示成为

$$\omega_{\min} = \frac{k}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (1.3.12)$$

其中 k 为量纲为 1 的系数, 它依赖于边长比值 a/b . 对不同的 a/b , 算得的 k 值如表 1.1 所示.

表 1.1 边长比 a/b 和系数 k 的关系

a/b	0.5	0.75	1.0	1.25	1.5	2.0	2.5
k	51.67	30.67	23.65	20.53	18.90	17.33	16.25

若对边 $x=0$ 及 $x=a$ 为简支, 对边 $y=0$ 和 $y=b$ 为任意简单或典型边界情况, Graff^[8] 给出了频率方程和振型函数的列表, 即

SS($x=0$)-SS($x=a$)-SS($y=0$)-SS($y=b$):

$$\sin(\beta b) = 0 \quad (1.3.13)$$

$$W_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1.3.14)$$

SS-C-SS-C:

$$2\alpha\beta[\cosh(\alpha b) \cos(\alpha b) - 1] = \delta_m^2 \sinh(\beta b) \sin(\beta b) \quad (1.3.15)$$

$$W_{mn} = \{[\cosh(\alpha b) - \cos(\beta b)][\beta \sinh(\alpha y) - \alpha \sin(\beta y)] \\ - [\beta \sinh(\alpha b) - \alpha \sin(\beta b)][\cosh(\alpha y) - \cos(\beta y)]\} \sin(\delta_m x) \quad (1.3.16)$$

SS-C-SS-SS:

$$\beta \tanh(\alpha b) = \alpha \tan(\beta b) \quad (1.3.17)$$

$$W_{mn} = [\sin(\beta b) \sinh(\alpha y) - \sinh(\alpha b) \sin(\beta y)] \sin(\delta_m x) \quad (1.3.18)$$

SS-F-SS-F:

$$\left\{ \alpha^2 [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)]^4 - \beta^2 [\gamma^2 + \delta_m^2(1-\nu)]^4 \right\} \sinh(\alpha b) \sin(\beta b) \\ = 2\alpha\beta [\gamma^4 - \delta_m^4(1-\nu)^2]^2 [\cosh(\alpha b) \cos(\beta b) - 1] \quad (1.3.19)$$

$$W_{mn} = (-[\cosh(\alpha b) - \cos(\beta b)] [\gamma^4 - \delta_m^4(1-\nu)^2] \\ \times \{ \beta [\gamma^2 + \delta_m^2(1-\nu)] \sinh(\alpha y) + \alpha [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)] \sin(\beta y) \} \\ + \{ \beta [\gamma^2 + \delta_m^2(1-\nu)]^2 \sinh(\alpha b) - \alpha [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)]^2 \sin(\beta b) \} \\ \times \{ [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)] \cosh(\alpha y) + [\gamma^2 + \delta_m^2(1-\nu)] \cos(\beta y) \}) \sin(\delta_m x) \quad (1.3.20)$$

SS-F-SS-SS:

$$\alpha [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)]^2 \tan(\beta b) = \beta [\gamma^2 + \delta_m^2(1-\nu)]^2 \tanh(\alpha b) \quad (1.3.21)$$

$$W_{mn} = \{ [\gamma^2 - \delta_m^2(1-\nu)] \sin(\beta b) \sinh(\alpha y)$$