通向金牌之路

金版奥赛教程

数学 九年级

◎ 张惠东 杨 军 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

通向金牌之路

金版奥赛教程

数学(九年级)

主　编　张惠东　杨　军

编　委　张惠东　杨　军　周海华
江锦元　付群跃　陈秀华
黄寿礼　杨　健

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

金版奥赛教程. 数学. 九年级/张惠东,杨军主编. —杭州：浙江大学出版社，2009.12(2010.6 重印)
ISBN 978-7-308-07227-4

Ⅰ. 金… Ⅱ. ①张…②杨… Ⅲ. 数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 221948 号

金版奥赛教程·数学(九年级)
张惠东 杨 军 主编

责任编辑 沈国明
封面设计 刘依群
文字编辑 夏晓冬
出版发行 浙江大学出版社
（杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007）
（网址：http://www.zjupress.com）
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 富阳市育才印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 18.75
字 数 480 千
版 印 次 2010 年 4 月第 1 版 2010 年 6 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-07227-4
定 价 28.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话（0571）88925591

编 写 说 明

中小学学科竞赛是我国覆盖面最广、参加人数最多、影响最大的一项中小学生课外活动。据不完全统计，全国每年有三百多万高中学生参与各类学科竞赛活动。尤其是近年来，我国选手在国际数学奥林匹克（简称 IMO）、国际物理奥林匹克（简称 IPHO）、国际化学奥林匹克（简称 ICHO）等活动中成绩斐然，更是吸引了许多有创新能力和天赋的学生参与学科竞赛活动。学科竞赛之所以备受广大学生关注和参与，究其原因是学科竞赛不仅具有很强的挑战性、探究性，而且对塑造和培养学生思维修养和创新意识方面大有裨益。

浙江大学出版社本着为我国基础教育改革、发展和学科竞赛做点有益事情的心愿，在精心研究了多年国内外竞赛命题规律、博采国内外优秀试题的基础上，邀请了全国各地竞赛命题专家、金牌教练，组织编写了“金版奥赛教程”系列丛书。丛书涵盖数学、英语、物理、化学、生物、信息技术六大学科，包括从小学到高中各个层次，共计 30 多个品种。

丛书的最大特点：

一是起点低，目标高。本丛书以学科基础知识为起点，适用的对象是学有余力或对该学科有兴趣的学生；编写的依据是各学科竞赛大纲，同时兼顾新课程标准教材，对竞赛涉及的课外知识给予适当补充，不同层次的学生可以合理取舍。

二是作者阵容强大。作者队伍既有来自一线的资深特级教师、金牌教练，也有来自高等学府的命题研究专家、命题专家，还有来自国家层面上的国家级教练、领队。

鉴于时间仓促，书中定有不少纰漏，请读者批评指正。

2009 年 3 月

目　　录

第 1 讲

二 次 根 式

竞赛热点

1. 二次根式的运算法则：

(1) $a\sqrt{c} \pm b\sqrt{c} = (a \pm b)\sqrt{c}(c \geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$；

(3) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}(a \geqslant 0, b > 0)$；

(4) $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}(a \geqslant 0)$.

2. 二次根式的性质：

(1) $(\sqrt{a})^2 = a(a \geqslant 0)$；

(2) $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geqslant 0), \\ -a & (a < 0). \end{cases}$

3. 共轭根式：形如 $a\sqrt{m} + b\sqrt{n}$ 与 $a\sqrt{m} - b\sqrt{n}$ 的两个最简二次根式称为共轭根式(或互为有理化因式).

4. $\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ 型的二重根式化简.

5. 二次根式被开方数为非负数的性质是问题的隐含条件.

6. 二次根式大小比较：$a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$.

解题示范

例 1 已知实数 a 满足 $|2008 - a| + \sqrt{a - 2009} = a$，那么 $a - 2008^2$ 的值是________.

思路分析 由 $a - 2009 \geqslant 0$ 知 $a \geqslant 2009$，从而 $|2008 - a|$ 可去掉绝对值化简求解无理方程.

解 $\because a - 2009 \geqslant 0$，$\therefore a \geqslant 2009$. $\therefore |2008 - a| = -(2008 - a)$.

原式化简为 $-(2008 - a) + \sqrt{a - 2009} = a$，

即 $\sqrt{a - 2009} = 2008$，

$\therefore a - 2009 = 2008^2$，

$\therefore a - 2008^2 = 2009$.

举一反三 二次根式的非负数性质有两个方面：一是被开方数为非负数；二是二次根式的值为非负数. 这个性质虽然浅显易懂，但比较隐蔽，解题时要注意观察.

思考题

1. 已知$\sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}$,试求代数式$\frac{x+2+\sqrt{4x+x^2}}{x+2-\sqrt{4x+x^2}}$的值.

解 $\because \sqrt{x}=\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{a-1}{\sqrt{a}}\geqslant 0$,$\therefore a\geqslant 1$,

$\therefore x=a-2+\frac{1}{a}$,

$\therefore x+2=a+\frac{1}{a}$,

$\therefore x^2+4x+4=a^2+2+\frac{1}{a^2}$,

$\therefore x^2+4x=a^2+\frac{1}{a^2}-2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$.

又$\because a\geqslant 1$,$\therefore a-\frac{1}{a}\geqslant 0$,

$\therefore \sqrt{x^2+4x}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\left|a-\frac{1}{a}\right|=a-\frac{1}{a}$,

因此,原式$=\dfrac{a+\frac{1}{a}+a-\frac{1}{a}}{a+\frac{1}{a}-a+\frac{1}{a}}=\dfrac{2a}{\frac{2}{a}}=a^2$.

2. 已知$a+b-2\sqrt{a-1}-4\sqrt{b-2}=3\sqrt{c-3}-\frac{1}{2}c-5$,求$a+b+c$的值.

解 将等式整理配方,得$(\sqrt{a-1}-1)^2+(\sqrt{b-2}-2)^2+\frac{1}{2}(\sqrt{c-3}-3)^2=0$,则$\sqrt{a-1}=1$,$\sqrt{b-2}=2$,$\sqrt{c-3}=3$,

$\therefore a=2$,$b=6$,$c=12$.

故$a+b+c=20$.

例 2 计算或化简:

(1) $\sqrt{1994\times 1995\times 1996\times 1997+1}$;

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{13-2\sqrt{42}}+\sqrt{15-2\sqrt{56}}+\sqrt{17-2\sqrt{72}}$.

思路分析 (1) 是求$1994\times 1995\times 1996\times 1997+1$的算术平方根,(2) 则须解决二重根式问题,这两个问题本质上都是去根号,即将被开方数配方.

解 (1) 设$a=1994$,则

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{1994\times 1995\times 1996\times 1997+1}\\
=&\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}\\
=&\sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}\\
=&\sqrt{(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1}\\
=&\sqrt{(a^2+3a+1)^2}
\end{aligned}
$$

$=|a^2+3a+1|$

$=a^2+3a+1$

$=1994^2+3\times1994+1$

$=3982019$;

(2) 由 $\sqrt{(2n+1)-2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{(n+1)-2\sqrt{n(n+1)}+n}$

$=\sqrt{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

$\therefore$ 原式 $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{9}-\sqrt{8})=\sqrt{9}-1=3-1=2$.

举一反三 对问题(2),要从整体入手,把握整体上的特点,找出一般性的规律,再由一般性规律化简.

思考题

3. 化简 $\dfrac{1}{2\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$.

解 $\because \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)^2-n^2(n+1)}$

$=\dfrac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$,

$\therefore$ 原式 $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{99}}-\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)$

$=1-\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{10}$.

4. 计算:$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

解 $\because \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

$=\sqrt{4-(2+\sqrt{2+\sqrt{3}})}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

而 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

$\therefore$ 原式 $=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1$.

例3 已知 $x_1=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,$x_2=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,求 x_1+x_2 的值.

思路分析 被开方数为共轭二次根式,要求 x_1+x_2,可先求 ${x_1}^2+{x_2}^2$,x_1x_2,再代入完全平方式求值.

解 $\because x_1=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,$x_2=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$,

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2=(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})+(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})$

$=8$,

$$x_1x_2=\sqrt{16-(10+2\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$$
$$=\sqrt{5}-1,$$

$\therefore (x_1+x_2)^2=8+2(\sqrt{5}-1)=6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$,

又 $x_1+x_2>0$,

$\therefore x_1+x_2=\sqrt{5}+1$.

举一反三 被开方数为共轭根式时,先平方,再相加,然后利用公式法就可以求出其值.

思考题

5. 已知 $a+b=\sqrt{\sqrt{1992}+\sqrt{1991}}$,$a-b=\sqrt{\sqrt{1992}-\sqrt{1991}}$,那么 $ab=$ ________.

解 $\because (a+b)^2=\sqrt{1992}+\sqrt{1991}$,$(a-b)^2=\sqrt{1992}-\sqrt{1991}$,

$$\therefore ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$$
$$=\frac{1}{4}[(\sqrt{1992}+\sqrt{1991})-(\sqrt{1992}-\sqrt{1991})]$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{1991}.$$

例 4 计算:

(1) $\dfrac{\sqrt{6}+4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$; (2) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{14}-\sqrt{15}-\sqrt{21}}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

思路分析 若一开始就把分母有理化,则使计算复杂化,观察每小题中分子与分母的数字特点,通过分拆、分解、配方等方法寻找它们的联系,以此为解题的突破口.

解 (1) 原式 $=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})+3(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}=\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$;

(2) 原式 $=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})-\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=2\sqrt{6}-5.$$

举一反三 当分母中出现复杂的二次根式运算时,一般它们中都有一定的规律,比如可因式分解,目的是可以适当与分子约分,如同多项式中的因式分解,从而在一定程度上简化计算.

思考题

6. 计算:$\dfrac{3\sqrt{15}-\sqrt{10}-2\sqrt{6}+3\sqrt{3}-\sqrt{2}+18}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$.

解 原式 $=\dfrac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+2\sqrt{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})+(3\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$

$$=\frac{(3\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1)}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}$$
$$=3\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

例 5　设 $x<0$，且 $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$，求有理式 $\frac{x^{10}+x^{6}+x^{4}+1}{x^{10}+x^{8}+x^{2}+1}$ 的值.

思路分析　待求分式分子、分母同时除以 x^5 得：$\frac{\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$，所以只要分别求出 $x+\frac{1}{x}$，$x^3+\frac{1}{x^3}$，$x^5+\frac{1}{x^5}$ 的值即可.

解　$\because x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$ 且 $x<0$，

$\therefore x+\frac{1}{x}=-\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4}=-\sqrt{9}=-3$，

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=9-2=7$，

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=(-3)\cdot(7-1)=-18$，

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-18\times 7+3=-123.$

$\therefore$ 原式 $=\frac{\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{-123+(-3)}{-123+(-8)}=\frac{-126}{-141}=\frac{42}{47}.$

举一反三　整体思想是有条件的二次根式化简求值问题的重要思想方法，从整体入手，适当构造对称式或零因式，是解决这类问题的关键.

思考题

7. (1) 当 $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1994})$ 时，求多项式 $(4x^3-1997x-1994)^{2001}$ 的值；

(2) 若 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$，求分式 $\frac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^3-7x^2+5x+15}$ 的值.

解　(1) $\because x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1994})$，$\therefore (2x-1)^2=1994$，

$\therefore 4x^2-4x-1993=0$，

故原式 $=[x(4x^2-4x-1993)+(4x^2-4x-1993)-1]^{2001}$
$=(-1)^{2001}=-1$；

(2) 由 $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{4^2-8\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{(4-\sqrt{3})^2}=4-\sqrt{3}$，

得 $x-4=-\sqrt{3}$，$\therefore x^2-8x+16=3$，即有 $x^2-8x+13=0$，

$\therefore$ 原式 $=\frac{(x^2-8x+13)(x+1)^2+10}{(x^2-8x+13)(x+1)+2}=\frac{10}{2}=5.$

实战演练

$12m-18=8-4m$
$16m=26$
$m=\frac{13}{8}$

能力测试

1. 若 $4\sqrt{\frac{2-m}{6}}$ 与 $\sqrt{\frac{2m-3}{4}}$ 可以合并,则 m 的值为 (C)

A. $\frac{20}{3}$　　B. $\frac{51}{26}$　　C. $\frac{13}{8}$　　D. $\frac{15}{8}$

2. 已知 $a=\sqrt{2}-1$,$b=2\sqrt{2}-6$,$c=\sqrt{6}-2$,那么 a,b,c 的大小关系是 (B)

~~A. $a<b<c$~~　　B. $b<a<c$

C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

3. 如果式子 $\sqrt{(x-1)^2}+|x-2|$ 化简的结果为 $2x-3$,则 x 的取值范围是 (B)

A. $x\leqslant 1$　　$x-1+x-2$　　B. $x\geqslant 2$

C. $1\leqslant x\leqslant 2$　　D. $x>0$

4. 设正整数 a,m,n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$,则这样的 a,m,n 的取值 (A)

A. 有一组　　B. 有两组

C. 多于两组　　D. 不存在

5. 已知实数 $a\neq b$,且满足 $(a+1)^2=3-3(a+1)$,$3(b+1)=3-(b+1)^2$,则 $b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$ 的值为 (B)

A. 23　　B. -23

C. -2　　D. -13

6. 计算 $\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 的值是 (A)

A. $\sqrt{6}$　　B. $2\sqrt{6}$

C. 6　　D. 1

7. 已知 $x=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$,$y=\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$,则 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 的值为________.

8. 已知 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$,$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,那么 $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=$________.

9. 观察下列分母有理化的计算:

$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}=\sqrt{2}-1$,$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}$,$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}=\sqrt{5}-\sqrt{4}$,…,从计算结果中找出规律,并利用规律计算:$\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2007}+\sqrt{2006}}\right)(\sqrt{2007}+1)=$________.

10. 若有理数 x,y,z 满足 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$,则 $(x-yz)^3=$________.

11. 设 $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=a+b$,其中 a 为正整数,b 在 0,1 之间,则 $\frac{a+b}{a-b}=$________.

12. 已知 $x=\sqrt{3}+1$,那么 $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=$________.

13. 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{30}-6\sqrt{2}+4\sqrt{3}}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{11}+5\sqrt{7}+4\sqrt{6}}{7+\sqrt{77}+\sqrt{66}+\sqrt{42}}$.

14. 已知 $x=2-\sqrt{3}, y=2+\sqrt{3}$，求 $\left[\dfrac{2}{3x}-\dfrac{2}{x+y}\left(\dfrac{x+y}{3x}-x-y\right)\right]\div\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x-y}$ 的值.

15. 已知$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,求证：$x+y=0$.

16. 当 a ________ 时，$\sqrt{(2003-a)^2}=a-2003$，$\sqrt{(a-2005)^2}=2005-a$ 同时成立，并化简 $\sqrt{16-8a+a^2}+\sqrt{(a-2006)^2}$.

冲击金牌

17. 已知 $x-2\sqrt{xy}+y=0(x>0,y>0)$，则 $\dfrac{3x-\sqrt{xy}+y}{5x+3\sqrt{xy}-4y}$ 的值为 ( )

A. $\dfrac{1}{3}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{2}{3}$　D. $\dfrac{3}{4}$

18. 若 $|1-x|=1+|x|$，则 $\sqrt{(x-1)^2}$ 等于 ( )

A. $x-1$　B. $1-x$

C. 1　D. -1

19. 当 $x=\dfrac{1+\sqrt{2002}}{2}$ 时，代数式$(4x^3-2005x-2001)^{2003}$ 的值是 ( )

A. 0　B. -1　C. 1　D. -2^{2003}

20. 如果 $a+b=\sqrt{\sqrt{2002}+2}$，$a-b=\sqrt{\sqrt{2002}-2}$，$|b^3+c^3|=b^3-c^3$，那么$a^3b^3-c^3$ 的值为 ( )

A. $2002\sqrt{2002}$　B. 2001

C. 1　D. 0

21. 若 $x=\sqrt{3}+1$，则 $x^3-(2+\sqrt{3})x^2+(1+2\sqrt{3})x-\sqrt{3}+5$ 的值是 ( )

A. 2　B. 4　C. 6　D. 8

22. 设 a,b,c 为有理数，且等式 $a+\sqrt{2}b+\sqrt{3}c=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ 成立，则 $2a+999b+1001c$ 的值是 ( )

A. 1999　B. 2000　C. 2001　D. 不能确定

23. 若实数 a,b 满足 $b<\sqrt{a-2007}+\sqrt{2007-a}+2007$，化简 $a+\dfrac{\sqrt{2008^2-4016b+b^2}}{b-2008}+\dfrac{\sqrt{b^2-4014b+2007^2}}{2007-b}=$ ________.

24. 已知$(x+\sqrt{x^2+2002})(y+\sqrt{y^2+2002})=2002$，则 $x^2-3xy-4y^2-6x-6y+58=$ ________.

25. 已知$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$,那么$\sqrt{\frac{x}{x^2+3x+1}}-\sqrt{\frac{x}{x^2+9x+1}}$的值等于________.

26. 已知$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$成立,求$x$的取值范围.

27. (1) 定义$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}}$,求$f(1)+f(3)+\cdots+f(2k-1)+\cdots+f(999)$的值.

(2) 设x,y为正整数,且使$\sqrt{x-116}+\sqrt{x+100}=y$,求$y$的最大值.

28. 试将实数$\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}$改写成三个正整数的算术根之和.

29. 设a,b,c,d为正实数,$a<b,c<d,bc>ad$,有一个三角形的三边长分别为$\sqrt{a^2+c^2}$,$\sqrt{b^2+d^2}$,$\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}$,试求三角形的面积.

30. 已知a,b均为正数,且$a+b=2$,求$u=\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+1}$的最小值.

第 2 讲

一元二次方程与判别式

竞赛热点

1. 若一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根 x_1,x_2,则

(1) 把 b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式,记作"Δ",$\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$;

(2) 方程的根满足方程:$a{x_1}^2+bx_1+c=0, a{x_2}^2+bx_2+c=0$;

(3) 求根公式:$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

(4) 韦达定理:$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

2. 二次方程根的判别式的应用:

(1) 实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根 $\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$;

(2) 有理系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有有理数根 $\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac$ 是完全平方式;

(3) 整系数二次方程 $x^2+px+q=0$ 有两个整数根 $\Leftrightarrow\Delta=p^2-4q$ 是整数的完全平方数;

(4) 二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 是完全平方式 $\Leftrightarrow\Delta=b^2-4ac=0$;

(5) 判断一元二次方程根的情况,以及求得二次方程中的参数.

3. 一元二次方程整数根问题使用特值代入再结合其他知识如判别式、韦达定理、不等式等解决,这也是近年竞赛的一个重点和难点知识.

4. 数学中转换和化归的思想的使用.非一元二次方程如分式方程、高次方程、含绝对值的方程转化为一元二次方程.

解题示范

例 1 解关于 x 的方程:$(m-1)x^2+(m+1)x+1=0$.

思路分析 由于方程的二次项含字母 m,所以首先要分 $m=1$ 和 $m\neq 1$ 两种情况进行讨论.另外当 $m\neq 1$ 时,还需讨论关于 x 的一元二次方程在根的判别式 $\Delta>0$、$\Delta=0$ 和 $\Delta<0$ 时方程根的情况.

解 (1) 当 $m=1$ 时,方程为关于 x 的一元一次方程 $2x+1=0$,所以 $x=-\dfrac{1}{2}$;

(2) 当 $m\neq 1$ 时,原方程为关于 x 的一元二次方程,因为 $\Delta=(m+1)^2-4(m-1)=m^2-2m+5=(m-1)^2+4$ 恒大于 0,所以原方程定有两不等根,由求根公式:$x_1=\dfrac{-(m+1)+\sqrt{m^2-2m+5}}{2(m-1)}, x_2=\dfrac{-(m+1)-\sqrt{m^2-2m+5}}{2(m-1)}$.

举一反三　一元二次方程解法有直接开平方法、因式分解法、配方法与公式法等，主要使用公式法. 注意当方程的二次项系数含字母参数时，要对二次项系数是否为零进行讨论，如果二次项系数为零，那么方程实际上为一次方程.

思考题

1. 解关于 x 的一元二次方程：$4x^2-4mx-10x+m^2+5m+6=0$.

解　$4x^2-4mx-10x+m^2+5m+6=0$,

化简得 $4x^2-2(2m+5)x+(m+2)(m+3)=0$,

则 $[2x-(m+2)][2x-(m+3)]=0$,

即 $2x-(m+2)=0$ 或 $2x-(m+3)=0$,

所以 $x_1=\dfrac{m+2}{2}$, $x_2=\dfrac{m+3}{2}$.

2. 解关于 x 的方程：$(m-1)x^2+(2m-1)x+m-3=0$.

解　当 $m=1$ 时，方程为关于 x 的一元一次方程 $x-2=0$，所以 $x=2$;

当 $m\neq1$ 时，原方程为关于 x 的一元二次方程.

$\because \Delta=(2m-1)^2-4(m-1)(m-3)=12m-11$,

$\therefore$ 当 $m>\dfrac{11}{12}$，且 $m\neq1$ 时，$x_{1,2}=\dfrac{-2m+1\pm\sqrt{12m-11}}{2m-2}$;

当 $m=\dfrac{11}{12}$ 时，$x_1=x_2=5$;

当 $m<\dfrac{11}{12}$ 时，即 $\Delta<0$，此时，原方程没有实数根.

例 2　已知 a,b,c 是实数，且 $a-b-c-1=0$，求证：两个方程 $x^2+x+b=0$ 与 $x^2+ax+c=0$ 中，至少有一个方程有两个不相等的实数根.

思路分析　判断二次方程有无实根可利用根的判别式，要证两方程至少有一方程有两不等实根，可从反面入手，假设两方程都没有两个不相等的实数根，用反证法证明.

证明　(反证法)

设两个方程都没有两个不相等的实数根，那么 $\Delta_1\leqslant0$ 和 $\Delta_2\leqslant0$.

即
$$\begin{cases}1-4b\leqslant0, & ①\\ a^2-4c\leqslant0, & ②\\ a=b+c+1, & ③\end{cases}$$

由 ① 得 $b\geqslant\dfrac{1}{4}$, $b+1\geqslant\dfrac{5}{4}$ 代入 ③，得

$$a-c=b+1\geqslant\frac{5}{4}, 4c\leqslant4a-5 \qquad ④$$

由 ② + ④ 得 $a^2-4a+5\leqslant0$,

即 $(a-2)^2+1\leqslant0$，这是不能成立的.

既然 $\Delta_1\leqslant0$ 和 $\Delta_2\leqslant0$ 不能成立，那么必有一个是大于 0.

$\therefore$ 方程 $x^2+x+b=0$ 与 $x^2+ax+c=0$ 中，至少有一个方程有两个不相等的实数根.

举一反三　本题也可用直接证法：当 $\Delta_1+\Delta_2>0$ 时，则 Δ_1 和 Δ_2 中至少有一个是正数. 关键在于判别式的使用.

思考题

3. 当 a 为何值时，方程 $x^2+2(a-1)x+5a-9=0$ 有实数根？

解　$\Delta=4(a-1)^2-4(5a-9)=(a-2)(a-5)$.

∵ 方程有实数根的条件是 $\Delta\geqslant 0$，

即 $(a-2)(a-5)\geqslant 0$，

∴ $a\geqslant 5$ 或 $a\leqslant 2$，

∴ 当 $a\geqslant 5$ 或 $a\leqslant 2$ 时，原方程有实数根.

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $(m-2)^2x^2+(2m+1)x+1=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是　　(　　)

A. $m>\frac{3}{4}$　　　B. $m\geqslant\frac{3}{4}$

C. $m>\frac{3}{4}$ 且 $m\neq 2$　　　D. $m\geqslant\frac{3}{4}$ 且 $m\neq 2$

解　由题知 $m\neq 2$ 且 $\Delta=(2m+1)^2-4(m-2)^2>0$，解得 $m>\frac{3}{4}$ 且 $m\neq 2$，故选 C.

例 3　当 q 是什么实数值时，对于任意有理数 p，方程 $2x^2+(p+1)x-(3p^2-4p+q)=0$ 有有理根？

思路分析　方程 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 有有理数根的条件是 $\Delta=b^2-4ac$ 是有理数的平方. 所以必须使该方程的判别式 $\Delta=(p+1)^2+8(3p^2-4p+q)$ 是一个完全平方式.

解　$\Delta=(p+1)^2+8(3p^2-4p+q)=25p^2-30p+8q+1.$　　(1)

要使(1)是完全平方式，则(1)式的判别式必须等于零.

即 $900-100(8q+1)=0$，解之得 $q=1$，

所以 $q=1$ 时原方程有有理根.

举一反三　一个整系数的一元二次方程如果有有理根，那么它的判别式一定是完全平方数，然后利用平方数的性质、解不定方程等手段可以将问题解决.

思考题

5. 设 m 不为零，整系数方程 $mx^2-(m-1)x+1=0$ 有有理根，求 m.

解　由求根公式得 $x_{1,2}=\dfrac{m-1\pm\sqrt{m^2-6m+1}}{2m}$，

∵ 原方程有有理根，

∴ m^2-6m+1 必是完全平方式.

设 $m^2-6m+1=k^2$（k 是非负数），

即 $(m-3)^2-k^2=8$，

有 $(m-3-k)(m-3+k)=8$.

因为 $m-3+k$，$m-3-k$ 是整数，且 $m-3+k>m-3-k$，

故它们可取数值如下：

$m-3+k$	8	4	-1	-2
$m-3-k$	1	2	-8	-4

两行对应相加得 $2(m-3)=9,6,-9,-6$.

又 $\because m-3$ 也是整数,$\therefore m-3=3,-3$,

$\because m\neq 0$,故 $m=6$.

6.(2004 年太原市初中数学竞赛试题)已知 k 为整数,若关于 x 的二次方程 $kx^2+(2k+3)x+1=0$ 有有理根,则 k 的值是________.

解 $\because$ 方程有有理根,$\therefore$ 判别式 $\Delta_1=(2k+3)^2-4k$ 为完全平方数.

设 $(2k+3)^2-4k=m^2$(m 为正整数),即

$$4k^2+8k+9-m^2=0 \qquad ①$$

将 ① 式看作关于 k 的二次方程,由题设知有整数根,故 ① 式的判别式 $\Delta_2=64-16(9-m^2)=16(m^2-5)$ 应为完全平方数.

而 16 是完全平方数,令 $m^2-5=n^2$(n 为正整数,且 $m>n$),则有 $(m+n)(m-n)=5$,

$\therefore \begin{cases} m-n=1, \\ m+n=5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=3, \\ n=2. \end{cases}$

将 $m=3$ 代入 ① 式得 $k=-2$ 或 $k=0$(舍去),

$\therefore k=-2$.

说明 本题也可由 $\Delta_1=4(k+1)^2+5$ 为完全平方数直接求得 $k=-2$.

例 4 已知 p 为质数,使二次方程 $x^2-2px+p^2-5p-1=0$ 的两根都是整数.求出 p 的所有可能值.

思路分析 首先两根都是整数,则判别式是完全平方式,$\Delta=4(5p+1)$ 是完全平方式,可设 $5p+1=n^2$,于是建立质数与整数的关系式,结合相关性质求解.

解 因为已知的整系数二次方程有整数根,所以 $\Delta=4p^2-4(p^2-5p-1)=4(5p+1)$ 为完全平方数,

从而,$5p+1$ 为完全平方数.

设 $5p+1=n^2$,注意到 $p\geqslant 2$,故 $n\geqslant 4$,且 n 为整数.

于是,$5p=(n+1)(n-1)$,则 $n+1,n-1$ 中至少有一个是 5 的倍数,即 $n=5k\pm 1$(k 为正整数).

因此,$5p+1=25k^2\pm 10k+1$,$p=k(5k\pm 2)$.

由 p 是质数,$5k\pm 1>1$,知 $k=1$,$p=3$ 或 7.

当 $p=3$ 时,已知方程变为 $x^2-6x-7=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=7$;

当 $p=7$ 时,已知方程变为 $x^2-14x+13=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=13$.

所以 $p=3$ 或 $p=7$.

举一反三 整系数二次方程 $x^2+px+q=0$ 有两个整数根 $\Leftrightarrow \Delta=p^2-4q$ 是整数的完全平方式;若能因式分解,则优先考虑因式分解.另外,方程两根为整数时,需结合整数性质如其和与积必为整数、等式的奇偶性等进行分析,可得出相应参数的值,求出的值应代入方程,检验其根是否为整数.

思考题

7.(1998 年全国数学竞赛试卷)已知方程 $a^2x^2-(3a^2-8a)x+2a^2-13a+15=0$(其中 a 是非负整数)至少有一个整数根,那么 $a=$________.