鳳陽武崇經編譯

非歐几里得幾何學

上海商務印書館印行

非歐几里得幾何學

導言

幾何公理。在往昔時代。皆視爲思想之定律。非惟心中所不能否認。抑亦不能致詢。誠以此等公理。既與吾輩尋常所經驗者恰相符合。若假設其非眞。又復在不可思議之列。此固治數學者所共信也。雖然。若取一組公理。或全與歐几里得(*Euclid*)之公理相反。或僅反其一部分。亦屬可能之事。由是取以爲根據。另建他種之幾何學。與歐氏所討論者。堪峙立對抗焉。

非歐几里得幾何學有二種。除關於平行線者外。其餘之公理及定義。與歐氏概皆從同。蓋刪去平行線之公理。*則有三類之假設。其一爲建造歐氏幾何之張本。餘二亦各能生出一貫相承饒興味有效用之命題。夫吾輩所能攷察者。僅宇宙間有限之部分。於是而欲證歐氏之學較非歐氏之學爲更眞也。難矣。

今將先論三種幾何公共之命題。次論二種幾何與歐氏相異之命題。及三角公式。並用解析法攷出其最要之性質。

幾何中有多數名詞。今亦不必縷述其定義及其所用之圖形。惟述特別數端如下。

---

* 見序言中

I. 任二點可定一直線。又二點間最短之路。爲一直線。

II. 不在一直線上之任三點。可決定一平面。又將平面上任二點連爲直線。全在平面上。

III. 幾何圖形。可以移動。不改變其形狀及大小。

IV. 一點沿一直線而運動。自一位置至他位置。則必經過此線上二位置間之各點。又幾何量。例如角之大。分線之長。自一值變爲他值。則必經過其中間之各值。

以下各命題。其證明有全行省略者。或僅略述其證法之大概者。則可取通常教科書中所論者以補之。

第一編

幾何通論

I. 用摺疊法以證明之題

1. 定理　若一直線與他直線相交。則所成二隣角之和。等於二直角。

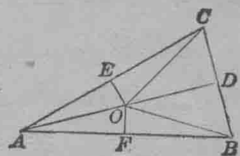
2. 定理　二直線相交。其對頂角相等。

3. 定理　二三角形。有一邊及二隣角。或二邊及夾角。各兩兩相等。則二形相等。

4. 定理　在二等邊三角形。對等邊之角相等。

將頂角二等分之。然後用(3)。

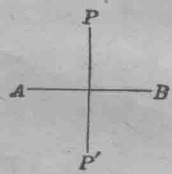
5.　於三角形各邊中點立垂線。若其中之二相交。則必俱相交於一點。此爲過三角形頂點之圓之中心。



證　設 EO 交 FO 於 O。則由(3)。AFO 及 BFO 爲相等。又二三角形 AEO 及 CEO 亦相等。故 CO 及 BO 相等。因各等於 AO 也。由是 BCO 爲二等邊三角形。若作 BOC 角之二等分線 OD。必垂直於 BC 之中點明矣。

6. 定理　在一圓內。二等分圓心角之半徑。必垂直於對此角之弦。且二等分之。

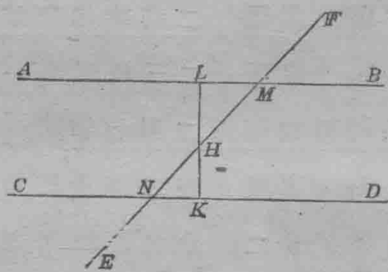
7. 定理　圓心角。比例於其所立之弧。且可用該弧以測之。



8. 定理 自線外一點。可作一垂線至於此線。

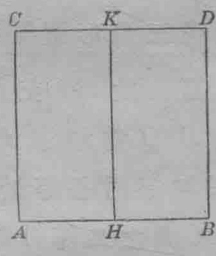
證 令平面繞 AB 而轉。至自相重時。P 之位置爲 P'。則直線 PP'。垂直於 AB。

9. 定理 自一直線之垂線上一點引斜線。若斜線之趾距垂線之趾等遠。則斜線必相等。且與原直線及垂線。各成等角。



10. 定理 若二線截第三線於同一之角。(卽對應角相等)則二線可有一公垂線。

證 令二角 FMB 及 MND 爲相等。過 MN 之中點 H。引 LK 垂直於 CD。則必亦垂直於 AB。因二三角形 LMH 及 KNH。由 3) 知其相等故也。

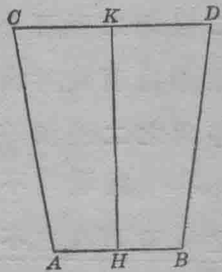


11. 定理 若在一平面上。於一定線立二等垂線。則其端之連線。與之成等角。且被定線正中點之第三垂線所直角二等分。

令 AC 及 BD。同爲 AB 之垂線。且設其相等。則連 CD 線所成之 C 角及 D 角。必相等。又在 AB 之中點立 HK 垂線。必爲 CD 之垂直二等分線。

可用摺疊法證之。

12. 定理 如前題。有二垂線及其正中點所立之第三垂線。此外有他任一線。以直角截此第三垂線。若又截首二垂線。則必截取等長之距離。且與之成等角。



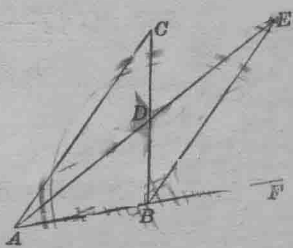
可用摺疊法證之。

系 前二題。如下改之。仍眞。

若 A 及 B 爲相等之銳角。或相等之鈍角。HK 爲 AB 中點之垂線。設 $AC=BD$。則 C 角及 D 角相等。HK 垂直於 CD 之中點。或設 CD 在任一點垂直於 HK。且與 AC 及 BD 相交。則必在此二線上截取等距離。且與之成相等角。

II. 命題之對於限制圖形而眞者

以下之題。至少。對於直線不大於某定長之圖形而眞。設直線之長度無限制。則定理及證法之各步。間有不能與通常一致者。由是爲便利計。凡含此意者。用「限制」一語以明之。且謂其定理。對於限制圖形而眞。或謂對於平面中之任何限制部分而眞。

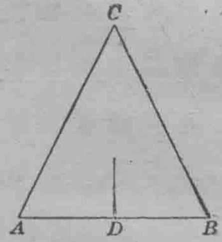


1. 定理 凡三角形之外角。必大於相對各角。(幾何原本16題)

證 試自 A 至對邊中點。引 AD 線。並延長之至 E。令 $DE=AD$。則二三角形 ADC,EBD 相等。故大於 EBD 角之 FBD 角。亦大於 C。

系 三角形。至少有二角爲銳。

2.　定理　若一三角形有二角相等。則其各對邊亦相等。而此三角形爲二等邊。



證　在底之中點立垂線。分三角形爲二形。此二形。可令其相重且相等。故此垂線必過頂點。幷由是可知原三角形中。對等角之二邊相等。

3.　定理　不等角三角形中。對大角之邊。大於對小角之邊。逆而言之。不等邊三角形中。對大邊之角。大於對小邊之角。

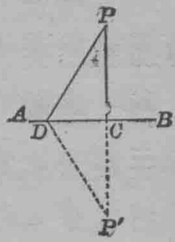
4.　定理　若二三角形。此形之二邊。各等於彼形之二邊。惟第一形之夾角。大於第二形之夾角。則第一形之第三邊。必大於第二形之第三邊。逆而言之。若二三角形。此形之二邊。各等於彼形之二邊。惟第一形之第三邊。大於第二形之第三邊。則第一形中對第三邊之角。必大於第二形中對第三邊之角。

5.　定理　自任一點至一直線之端。引二直線。同樣再引二線。但包於前二線間。則前二線之和。大於後二線之和。

6.　定理　過任一點至一直線。只可作一垂線。

證　令平面繞 AB 而轉。至自相重時。P 所取之位置爲 P'。若自 P 至 AB 有二垂線 PC 及 PD。則 CP' 及 DP'。必爲此等線之延長線。而連 P 及 P'。當有二相異之直線。是不合於理也

系　二直角三角形。若此形之斜邊及一銳角。等於彼形之斜邊及一銳角。則二形相等。



7. 定理　自一點至一直線所引之線。以垂線爲最短。

系　在直角三角形中。斜邊大於夾直角之任一邊。

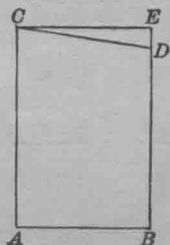
8. 定理　自一直線之垂線上一點引斜線。其趾距垂線趾不等者。斜線亦不等。而距垂線趾遠之斜線。大於距垂線趾近之斜線。逆而言之。自垂線上一點。引二斜線。其大者。自垂線趾截取較遠之距離。

9. 定理　在一直線之中點。立一垂線。則垂線左側或右側之任一點。距原直線之左端或右端較近。

系　二點各距一直線之兩端等遠。則二點相連。必爲直線中點之垂線。

10. 定理　二三角形之邊。各兩兩相等。則二形相等。

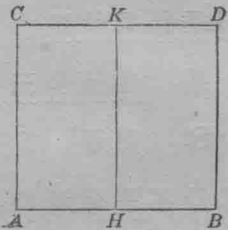
11. 定理　在一平面上。於一直線。立二不等之垂線。則其端之連線。與之成不等角。而以與短垂線所成之角爲較大。



證　設 $AC>BD$。引長 BD。令 $BE=AC$。則 $BEC=ACE$。但由(1)。$BDC>BEC$。又 ACD 爲 ACE 之分。故得 $BDC>ACD$。

12. 定理　若C,D二角相等。則垂線相等。若二角不相等。則垂線亦不相等。而以夾小角之垂線較長。

13. 定理　若二線垂直於第三線。則一垂線上之點。距第三線等遠者。必亦距餘一垂線等遠。



證　令AB及CD。同垂直於HK。在CD上。取任二點C及D。距K爲等遠。則C及D。必距AB等遠。因用摺疊法。令D落至C。由(6)。可知DB必重於CA也。

次所述者。爲立體幾何學之題。可從以前之定理。直接生出。並至少在空間之任何限制部分而眞

14. 定理　若一線。在二直線之交點。垂直於二線。則該線。必亦垂直於經過此點且在二線之平面上之任何線。

15. 定理　若二平面互爲垂直。則凡在一平面內。引其交線之垂線。必爲餘一平面之垂線。又過一平面上任一點。引一線。垂直於餘一平面。必全在第一平面內。

16. 定理　若一線垂直於一平面。則凡經過此線之平面。皆垂直於原平面。

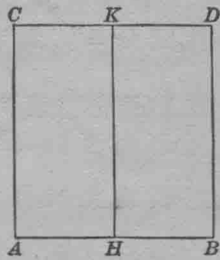
17. 定理　若一平面。同時爲二相交平面之垂直面。則必亦垂直於其相交之線。

III. 三假設

在二相等垂線端點之角。至少。在限制圖形或俱爲直角。或俱爲銳角。或俱爲鈍角。今區別此三類。爲直角之假設。銳

角之假設。鈍角之假設云。

1. 定理　二相等垂線端點之連線。至少。在平面之任何限制部分中。依三種假設之不同。等於大於或小於垂趾之連線。

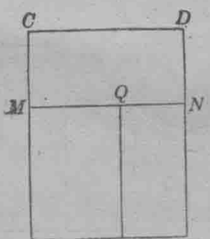


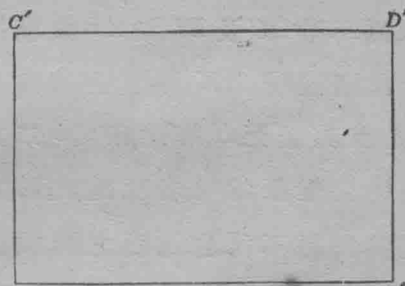
證　令 AC 及 BD。為二相等之垂線。HK 為 AB 中點之垂線。則 HA 及 KC。同垂直於 HK。且 KC 之等於大於或小於 HA。乃憑 C 角等於小於或大於 A 角而定。$(II,12)$ 故 KC 之二倍 CD。等於大於或小於 AB。視三種假設而不同。

逆而言之。若 CD 等於大於或小於 AB。則此圖形。卽建造成第一類第二類或第三類之假設。

系　若一四邊形有三直角。則隣於第四角之邊。等於大於或小於其對邊。視第四角為直為銳為鈍而定。

2. 定理　在平面之任何限制部分中。若直角之假設。對於一形而眞。則對於全平面之任一形而皆眞。



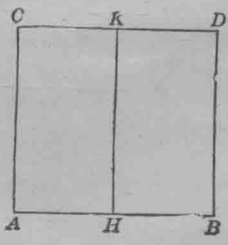


證　今設有一矩形。卽四角俱直之四邊形。則由上題之系。對邊必相等。若置若干相等之矩形於一處。必可成又一矩形。其邊爲原矩形之邊之倍數。

今令 $A'B'$ 爲任何線。$A'C'$ 及 $B'D'$ 爲 $A'B'$ 之端之二相等垂線。試分 $A'C'$ 爲若干等分。令每分小於 AC。並在 AC 及 BD 上。截取 AM 及 BN。等於諸等分之一。且引 MN 線。則 $ABNM$ 爲矩形。因否則 MN 將大於或小於 AB 及 CD。而 M 角及 N 角。將俱爲銳或俱爲鈍。然此爲不合理之事。蓋其和必恰爲四直角也。又如前分 $A'B'$ 爲若干等分。在 AB 及 MN 上。截取 AP 及 QM。等於諸等分之一。復成一矩形 $APQM$。若取若干等於此之矩形。置在一處。當恰可得圖形 $A'B'D'C'$。則其爲矩形明矣。

3. **定理**　在平面之某限制部分中。若銳角之假設。或鈍角之假設。對於一形而眞。則同一之假設。對於該平面任何限制部分內之任何形而皆眞。

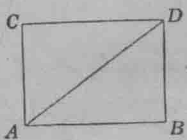
證　令 CD 沿 AC 及 BD 而運動。惟常在此二線上截取等距離。或再令 AC 及 BD 沿 AB 線漸近於 HK 或漸遠於 HK 而運動。惟常垂直於 AB。且其趾距 H 等遠。則 C,D 二角。各連續變化。惟原爲銳者恆爲銳。原爲鈍者恆爲鈍。絕不能自銳而之鈍。或自鈍而之銳。因否則必有某一點爲直角者。

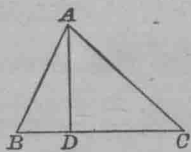


是直角之假設於以建立。由前題所論。無一形可以合於銳角及鈍角之假設者。是與原設不合矣。

在平面之限制部分中。C 角及 D 角。不能爲零或 180°。因如此。則三線 AC,CD,BD。將成同一之直線矣。

4. 定理　至少。在平面之任何限制部分中。依三種假設之不同。因而三角形之內角和。等於小於或大於二直角。



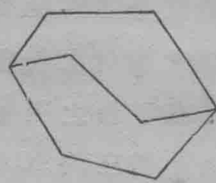


證　有任一直角三角形 ABD。(第1圖) 直角在 B。試引 AC 垂直於 AB。而等於 BD。則在二三角形 ADC 及 DAB 內。$AC=BD$。AD 爲公用。但 DC 之等於大於或小於 AB。依三種假設而定。故 DAC 之等於大於或小於 ADB。亦依三種假設而定。二角各加 BAD。則得 $ADB+BAD$ 等於小於或大於直角 BAC。

今任何限制三角形中。至少有二角爲銳。故自第三角頂至對邊引垂線。必遇該邊於三角形之內。而將三角形分爲二直角三角形。由是易知在任何限制三角形中。依三種假設之不同。因而各角之和等於小於或大於二直角。

三角形各角之和多於二直角之數。稱爲角餘(*excess*)。n 邊多角形之角餘。乃其各角之和多於 $n-2$ 倍二直角之數也。

5. 定理　將一多角形。分爲任若干三角形。則此多角形之角餘。等於諸三角形角餘之和。



證　設以一直線或折線。分一多角形爲二多角形。並該線與原多角形之界相遇之處。設爲頂點。今若此分線爲折線。其折點有 p 個。則所成二多角形各角之和。等於原多角形各角之和,加四直角之 p 倍。又二多角形之邊。爲原多角形之邊,與此 p 個點分該折線所得之 $p+1$ 部分。但各部分皆計算二次。

令 S 爲原多角形各角之和。n 爲其邊數。又令 S' 及 n', S' 及 n'' 在分得之二三角形。表同一之意義。則有(式中之 R 爲直角)

$$S'+S''=S+4pR$$

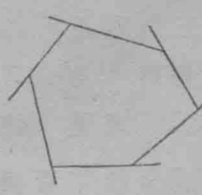
$$n'+n''=n+2(p+1)$$

故 $$S-2(n'-2)R+S''-2(n''-2)R=S+4pR-2(n+2p-2)R$$
$$=S-2(n-2)R$$

將上法屢次行之。則可分一多角形爲若干三角形。惟所分得各部分角餘之和。恆等於原多角形之角餘。

角餘之意義。可擴張之。令能應用。於平面上。全爲直線圍成之各相異部分之組合形。

不欲計算多角形之各角和。則可取外角之和。此和比四直角所少之數。等於多角形之角餘。而以外角之角欠(deficiency)稱之。



外角之和。乃繞圖形而轉時,在各頂點自一邊轉至第二邊所轉之共數也。

6. 定理 多角形之角餘。恆爲零。恆爲負。或恆爲正。

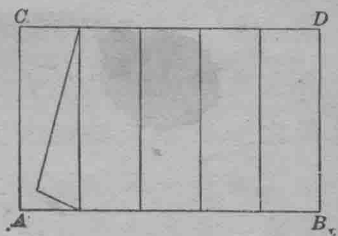
證 已知此定理。對於限制三角形而眞。但任何有限多角形。可分爲若干限制三角形。且由前定理。多角形之角餘。等於三角形角餘之和。故知此定理。對於任何限制多角形而眞。

當角餘爲負時。則可稱爲**角欠**。或**外角之角餘**。

系 以直線截一多角形。其所截得任一部分之角餘。除第一類假設此數爲零外。其數值恆小於原多角形之角餘。

以下之定理。乃適用於第二類及第三類假設。

7. 定理 減小三角形之各邊。或令二邊小於某定長度。而減小餘一邊。則可減小其面積至於無限制。又其各角之和。將近於二直角而以之爲極限。

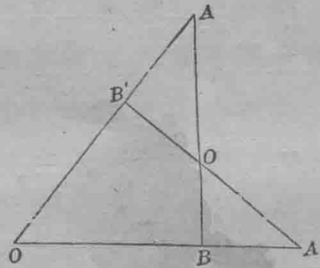


證 令 $ABDC$ 四邊形之三角 A,B,C。俱爲直角。一垂線沿 AB 而運動。必常增或常減。因若有時增而有時減。則必至少有二位置。此垂線有同一之長度。其正中間之垂線。必又垂直於 CD。是有一矩形矣。

分 AB 爲 n 等分。並在分點引垂線。則原四邊形。分成 n 個小四邊形。在各形中。皆有一邊及鄰接之二直角爲相等者。自最短之垂線之末端起。各形皆可全置於次形之內。故第一形之面積。小於原四邊形面積之 $\frac{1}{n}$。第一形之角欠或角

餘。小於原四邊形角欠或角餘之$\frac{1}{n}$。今任一三角形。其各邊全小於AC或BD。且有一邊小於AB上諸等分之一者。可全置於最小四邊形內。是以此三角形之面積及角欠或角餘。小於原四邊形對應部分之$\frac{1}{n}$。

由是一三角形。至少有一邊爲甚小。餘二邊非爲無限大者。其面積及角欠或角餘。小於任何小之面積及角欠或角餘。



8. 定理　二三角形。有同一之角欠或角餘者。必有同一之面積。

證　令AOB及$A'OB'$。有同一之角欠或角餘。并二形中各有一角爲相等。若將一形置於他形之上。使等角相重。則或二三角形相重而爲全等。或雖不相重。將有一四邊形爲二形所公用。此外又有二小三角形。各有一角相等,及同一之角欠或角餘。若仍連續行前法。可再得一公用之四邊形,及一角相等角欠或角餘相同之二三角形。仿是行此法不已。除有一雙相重之三角形外。此法可行之無窮期。因一雙三角形之一。絕不至含於他形之內。蓋如是。則角欠或角餘不能相同也。

令So表第一雙三角形對等角之邊之和。Sa表隣邊之和。$S'a$表隣邊計算二次之部分。(卽三角形疊置一處時相重之部分)。在第二雙三角形。書爲o'及a'。在第三雙三角形。書爲o''及a''。以上仿此。則有

$$Sa = Sa + So' \qquad So = Sa'$$

$$Sa' = S'a' + So'' \qquad So' = Sa''$$

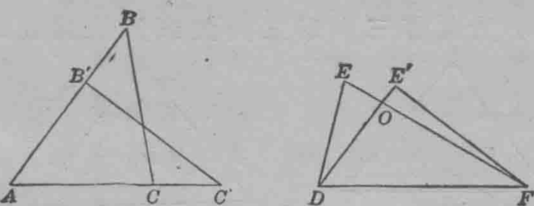
$$Sa'' = S'a'' + So''' \ldots \qquad So'' = Sa''' \ldots$$

$$\therefore \quad Sa = S'a + S'a'' + S'a^{\mathrm{IV}} + \ldots$$

$$Sa' = S'a' + S'a''' + S'a^{\mathrm{V}} + \ldots$$

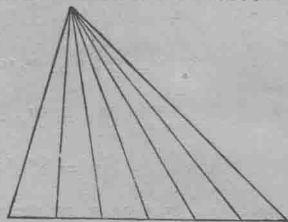
故 $S'a, S'a', S'a''$ 等漸減小無有限制。而此皆爲一雙三角形之一之一邊計算二次,及餘一之一邊計算二次也。故若連續行此法不已時。所得之三角形。可令其各邊皆小於原三角形之最長邊。且至少有一邊小於任何之數。由是此所得三角形之面積。減小至無限制。且各雙三角形面積之差。皆應一致。故必當爲零。卽第一雙三角形及各雙三角形面積俱同也。

令 ABC 及 DEF。有同角欠或角餘。並 $AC<DF$。試引長 AC 至 C'。令 $AC'=DF$。則 AB 上必有某點 B'。介於 A 及 B 間。能



令 $AB'C'$ 與 ABC 有同角欠或角餘及同面積。放 $AB'C'$ 於 DEF 上。令 AC' 重於 DF。則 $DE'F$。爲其所取之位置。若此等三角形不相重。各形對公用邊 DF 之頂點。必在他形之外。此二三角形。公用一 DOF 三角形。除斯之外。尚有二小三角形。各有一角相同,及同一之角欠或角餘。故此二三角形及原二三角形之面積相同。

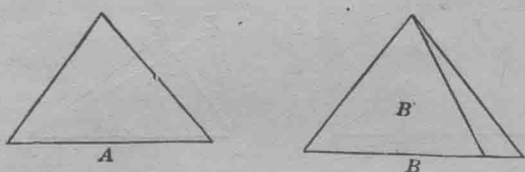
9. 定理 任二三角形之面積。比例於其角欠或角餘。



證 一三角形。可自頂點至對邊上之點引直線。分成 n 個小三角形。令有相等之角欠或角餘及等面積。此各形之角欠或角餘。爲原三角形角欠或角餘之 $\frac{1}{n}$。其面積爲原三角形面積之 $\frac{1}{n}$。

當二三角形之角欠或角餘爲可通度時。設其比爲 $m:n$。則可分一形爲 m 個小三角形。他形爲 n 個小三角形。令其角欠或角餘及面積全相同。由是可見原二三角形之面積。有同比 $m:n$。

當二三角形 A 及 B 之角欠或角餘爲不可通度時。則可分一三角形 A 爲任若干相等之小三角形。並在他三角形 B 屢次取等於此等三角形之部分。直至所餘之部分。其角欠或角餘。小於此等三角形之角欠或角餘爲止。則自第二



三角形所取之部分。成一三角形 B'。A 及 B' 可通度。故其面積。比例於其角欠或角餘今將 A 所等分之數。無限增加。則每分因而減小無有限制。自 B 取去 B' 所餘之分。亦減小無有限制。則 B' 之角欠或角餘及面積。近於 B 之角欠或角餘及面積。由是二三角形 A 及 B 之面積。比例於其角欠或角餘可知矣。