HIT

数学·统计学系列

An Introduction to the Proving of Elementary Inequalities

初等不等式的证明方法（第二版）

韩京俊 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

HIT

数学·统计学系列

初等不等式的证明方法

An Introduction to the Proving of Elementary Inequalities

韩京俊 编著

(第二版)

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

大家书系

内 容 简 介

全书共分15章,选取300余个国内外初等不等式的典型问题,以解析解题方法,并对部分问题加以拓展,不少例题都配有较大篇幅的注解.本书的一大特色是从“一名高中生的视角出发”,侧重解题与命题的思想和探索.本书可作为数学奥林匹克训练的参考教材,供高中及以上文化程度的学生、教师使用,也可作为不等式爱好者及从事初等不等式研究的相关专业人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

初等不等式的证明方法/韩京俊编著.—2版.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.11

ISBN 978-7-5603-4980-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①韩… Ⅲ.①不等式-研究 Ⅳ.①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第257422号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张23 字数422千字
版 次 2014年11月第2版 2014年11月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4980-0
定 价 38.00元

◎ 前言

不等式作为工具,被广泛地应用到数学的各个领域. 著名数学家 Hardy(哈代)认为,基本的不等式是初等的. 初等不等式的证明也是高考、数学竞赛及相关研究的热门课题. 在国内外各大数学论坛中,初等不等式有关问题的讨论也往往是最受欢迎的. 初等不等式的形式多种多样,证明手法也灵活多变,近年来初等不等式证明方法也推陈出新,它们中不少是证明不等式的强有力武器.

本书立足于讲解初等不等式的证明方法,有不少是作者做题与探究过程中的心得体会. 许多方法在国内的相关书籍杂志中未曾有介绍,如无限调整法、对称求导法,以及作者在丘成桐中学数学奖的获奖论文《对称不等式的取等判定》、《对称不等式的取等判定(2)》等. 同时还对初等不等式的命题方法与国内外不等式机器证明研究的部分最新成果作了介绍.

本书在介绍方法与例题时,常常会配以较大篇幅的注解,它们或是更深入地解析解题方法,以期读者触类旁通,抑或是给出

问题的有益推广,让读者欣赏不等式的内在魅力.对于经典的问题,会在书中的不同章节多次出现,所给出的解答也各不相同.

对称不等式是不等式研究的核心之一,这也是本书的主线.在第2章调整法中给出了 $\mathbf{R}_+^n$ 上 n 元3次齐次对称不等式成立的显式判定,这是十分著名的结论.之后的第7章求导法,对称求导法一节中,先后得到了 $\mathbf{R}_+^3$ 上3元轮换对称3次齐次不等式成立的显示判定、一类 n 元4次齐次轮换对称不等式成立的充要条件.这一方法还能得到一类3元3次齐次不等式成立的显式判定,同时解决不少熟知的难题.

做过一定数量不等式习题的读者不难发现 $\mathbf{R}_+^3$ 上的3元对称不等式,往往在两数相等或有数为0时等号成立,这是否为普遍存在的规律?第10章判定定理作了详细的探讨,在推得3元相关结论的基础上,再接再厉得到了 n 元的优美结果.判定定理能够轻松解决许多难度颇大的猜想和经典问题,本书的例题仅仅是冰山一角.判定定理亦可推出许多对称与轮换对称不等式成立的显示判定、充要条件.最近,作者依据书中介绍的"$\mathbf{R}_+^3$ 上3元6次齐次对称不等式的判定定理"所编写的程序tvnd625,经大量测试表明,其在证明这一类问题时效率要优于Bottema、tsds3等不等式证明软件.读者会发现判定定理是富有魅力的,然而其衍生出许多有待解决的问题,在这一章节的最后也作了简要介绍.

编制属于自己的题目是吸引人的,相关不等式的书籍对此论及甚少.作者曾向全国高中数学联赛提供过不等式题,被选为预选题,还有一些题目被国内外杂志、书籍收录.在第12章谈谈命题中,介绍了十余种编制题目的方法.有些源于现有问题基础之上的推广,有些乃因一时疏忽将题目抄错之后得到的意外产物,还有如何从无到有"创造"出一个不等式.这一章节有较多富有启发性的语言,它呈现探索不等式世界的奇妙旅程,是作者的大胆尝试,也希望读者能够喜爱.

本书例题具有一定典型性.建议读者先认真仔细地思考,做不出来再看解答,这样水平才会得以提升.如果遇到很多例题难以驾驭,千万不要失去信心,因其本身就具有一定难度.全书收录了大量奇思妙想的解法,它们为本书增色不少,本书也尽力为它们的作者署名以示感谢.在本书的写作过程中得到了北京邮电大学蔡剑兴同学的大力帮助,北京大学的苏钧与赵斌、加州伯克利大学的吴青昀等同学也给予了作者很大的支持,在此一并致谢.值此书稿完成之际,小学、初中、高中阶段数学老师对作者的教诲仍历历在目,在此向培育过作者的陈明老师、沈军老师、万军老师、汪杰良老师表示衷心的感谢.今年是作者的母

校复旦大学附属中学建校60周年，祝母校桃李满天下，向成为世界著名高中的目标大步迈进.

本书的内容源于作者高中三年来的感悟与积累，作者的读书笔记为此提供了丰富的素材. 由于本书策划、撰写在两个多月内完成，时间仓促，加之作者水平有限，必有不足之处. 欢迎读者批评或提出宝贵意见，只要是对本书有益的，均可发送至我的邮箱：hanjingjunfdfz@gmail.com，以期再版时改进.

韩京俊

2010年7月26日

◎目录

第0章 一些准备

在正式开始我们奇妙的初等不等式旅途开始之前，先做一些准备. 这些准备虽是基本的，却也是必要的.

0.1 几点说明

不等式的证明固然重要，但正如 Hardy 等人的名著 *Inequalities* 中强调的那样，我们希望读者能清楚不等式等号成立条件等方面的普遍原则. 这对提高不等式水平大有裨益. 本书中未给出等号成立条件的例题或定理，希望读者能自行补上.

为节省篇幅，在不致引起混淆的情况下，采用以下常用符号：$\mathbf{R}$ 表示实数域，$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实向量空间.

$$\mathbf{R}_{+}^{n}=[0,+\infty)^{n};\mathbf{R}_{++}^{n}=(0,+\infty)^{n}$$

$\sum\limits_{cyc}$，$\prod$ 分别表示循环和，循环积. 以三元为例，如

$$\sum_{cyc} a=a+b+c$$

$$\sum f(a,b)=f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$$

$$\prod ab=ab\cdot bc\cdot ca$$

另外在本书中，不特别说明的情况下，$\sum$，$\sum_{cyc}$ 这两者符号代表的意义相同，都是表示循环求和.

$\sum_{sym}$ 表示对称求和，仍以三元为例，即

$\sum_{sym} f(a,b) = f(a,b) + f(a,c) + f(b,c) + f(b,a) + f(c,a) + f(c,b)$

LHS = Left-Hand Side，意为左式，RHS = Right-Hand Side，意为右式.

在本书中，RHS，LHS 分别表示不等式的右边和不等式的左边.

$(a,b,c) \sim (0,1,1)$ 表示 $a : b : c = 0 : 1 : 1$ 及其轮换.

齐次性与对称性是不等式中的基本概念，下面我们花一些篇幅对此进行说明.

0.1.1 齐次性

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元的式子，若对任意非零的 t，都有

$$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n) = t^m f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 为 m 次齐次式. 特别的，对于常数 0，我们定义其次数为 $-\infty$，例如 $\frac{a^2}{bc}$，xyz 都是齐次式.

对于齐次不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \geqslant g(x_1,x_2,\cdots,x_n)(x_1,x_2,\cdots,x_n > 0)$$

我们不妨设关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个非 0 有限次齐次式的值为一个常数 C，例如不妨设

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C, x_1x_2\cdots x_n = C$$

等等. 这需要根据题目的具体情况而定，哪一个对证明起着更简便的作用则设哪一种. 其证明只需根据定义即可. 特别值得注意的是，当题目没有限定各元均为正数时，则需要分类讨论.

0.1.2 对称性

对称(完全对称)

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元函数. 若将 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任意的两个变元互相交换位置，得到的 f 都与原式是恒等的，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是对称(完全对称)的，如 $xy + yz + zx$，$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 等.

显然，对称(完全对称)的一定是轮换对称的，反之则不然.

设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个 n 元函数，若作置换 $x_1 \to x_2, x_2 \to x_3, \cdots, x_n \to x_1$，得到的 f 与原式是恒等的，则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是轮换对称的，如 $x^3y + y^3z + z^3x$，$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ 等.

对于对称(完全对称)不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$

我们不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$,若此时不等式成立,则原不等式原立. 由完全对称不等式的定义可知这是显然的. 这是因为对于任意顺序排列的变元,我们总可以经过有限次交换使得 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$,同时保持与原不等式等价.

对于轮换对称不等式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$$

此时我们不妨设 $x_1=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若此时不等式成立,则原不等式成立. 但不能不妨设 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$,其中原因留给读者思考.

在证明不等式时,我们一定要注意区分以上两种"不妨设",否则我们的证明就可能不完善甚至有误.

0.2 常用不等式

以下是一些常用的不等式,以后我们不加说明就可直接使用.

(1)AM - GM(算术几何平均)不等式　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负实数,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取得等号.

(2)加权 AM - GM 不等式　$a_1,a_2,\cdots,a_n,\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为非负实数,且满足 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=1$,则

$$a_1\omega_1+a_2\omega_2+\cdots+a_n\omega_n\geqslant a_1^{\omega_1}a_2^{\omega_2}\cdots a_n^{\omega_n}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取得等号.

(3)AM - HM(算术调和平均)不等式　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负实数,则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取得等号.

(4)幂平均不等式　设 $M_r(x)$ 表示 n 个正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 r 次幂平均,即

$$M_r(x)=\sqrt[n]{\frac{x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r}{n}},r\neq 0$$

则若 $\alpha>\beta$,那么 $M_\alpha(x)\geqslant M_\beta(x)$,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得等号.

(5)Cauchy(柯西)不等式　$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为实数,则

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时取得等号,$i=1,2,\cdots,n$.

(6)Hölder(赫尔德)不等式　r,s 为正实数,$\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1,a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为正实数,则

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)}{n}\leqslant\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}$$

当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例时取得等号,$i=1,2,\cdots,n$.

当变元均是非负实数时,Holder 不等式可看做 Cauchy 不等式的推广. Holder 不等式是两组变元时的结论,事实上任意多组变元,都有完全类似的结论. 在以后的证明中,我们统称它们为 Cauchy 不等式推广.

(7)排序不等式　设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 为两非减序列,又 π 为 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任意排列,则

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\geqslant a_1b_{\pi(1)}+a_2b_{\pi(2)}+\cdots+a_nb_{\pi(n)}\geqslant a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1$$

(8)Chebyshev(切比雪夫)不等式　如果 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 并且 $b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i+1}$$

值得注意的是排序不等式与 Chebyshev 不等式均是对实数成立的.

(9)Minkowski(闵可夫斯基)不等式　实数 $r\geqslant1,a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为正实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

当 $r\leqslant1$ 时,不等式反向.

等号成立当且仅当 a_i 与 b_i 对应成比例,$i=1,2,\cdots,n$.

(10)Bernoulli(伯努利)不等式

①$r>1,x>-1$,则$(1+x)^r\geqslant1+rx$;

②$0<r<1,x>-1$,则$(1+x)^r\leqslant1+rx$;

③$r<0,x>-1$,则$(1+x)^r\geqslant1+rx$;

等号成立均当且仅当 $x=0$.

(11)广义 Bernoulli 不等式　$a_i\geqslant-1,i=1,2,\cdots,n$,且同正负,有

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

等号成立当且仅当 a_i 中有 $n-1$ 个为0.

(12)Schur(舒尔)不等式　若 $x,y,z \geqslant 0, \lambda \in \mathbf{R}$,则

$$x^{\lambda}(x-y)(x-z)+y^{\lambda}(y-z)(y-x)+z^{\lambda}(z-x)(x-y) \geqslant 0$$

等号成立当且仅当$(x,y,z) \sim (0,1,1)$(若此时有意义)或 $x=y=z$.

对于一个给定的 λ,我们称上述的不等式为 $\lambda+2$ 次 Schur 不等式.

Schur 不等式比较常用的是 $\lambda=1$ 的情况,此时有如下等价形式:

①$x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$;

②$xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$;

③ 如果 $x+y+z=1$,则 $xy+yz+zx \leqslant \dfrac{1+9xyz}{4}$.

(14)Newton(牛顿)不等式　$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为非负实数,定义对称多项式

$$(x+x_1)(x+x_2)\cdots(x+x_n)=s_n x^n+s_{n-1}x^{n-1}+\cdots+s_1 x+s_0$$

令 $d_i=\dfrac{s_i}{\mathrm{C}_n^i}$,则有

$$d_i^2 \geqslant d_{i+1}d_{i-1}$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

(15)Maclaurin(马克劳林)不等式　d_i 如上定义,则

$$d_1 \geqslant \sqrt{d_2} \geqslant \sqrt[3]{d_3} \geqslant \cdots \geqslant \sqrt[n]{d_n}$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

基础题

第1章

这一章中将列举一些相对较易的习题，供读者测试自己的水平，可看做正餐之前的甜点，起到热身的效果.

例 1.1 已知 $x,y>0$，$x^2+y^3\geqslant x^3+y^4$，求证

$$x^2+y^2\leqslant 2$$

证明 因为 $x^2-x^3\geqslant y^4-y^3\geqslant y^3-y^2$（AM - GM 不等式），所以

$$x^2+y^2\geqslant x^3+y^3$$

又因为

$$x^2+y^2\leqslant \frac{2x^3+1}{3}+\frac{2y^3+1}{3}\text{（AM - GM 不等式）}$$

结合以上两式得到

$$x^2+y^2\leqslant 2$$

例 1.2 正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，证明

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geqslant 2$$

证明 注意到

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+1=$$

$$\left(\frac{a^2}{b+c}+a\right)+\left(\frac{b^2}{c+a}+b\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}+c\right)=$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

故原不等式等价于

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\geqslant 3$$

由 AM - GM 不等式,这是显然成立的.

例 1.3 a,b 是正实数,满足 $a+b=2$,求证

$$a^{\frac{2}{a}}+b^{\frac{2}{b}}\leqslant 2$$

证明 由 Bernoulli 不等式

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{a}}}\geqslant\frac{1}{1+\frac{2}{a}\left(\frac{1}{a}-1\right)}=\frac{a^2}{a^2-2a+2}$$

同理

$$b^{\frac{2}{b}}\leqslant\frac{b^2}{b^2-2b+2}=\frac{(a-2)^2}{a^2-2a+2}$$

于是

$$a^{\frac{2}{a}}+b^{\frac{2}{b}}\leqslant\frac{a^2}{a^2-2a+2}+\frac{(a-2)^2}{a^2-2a+2}=2$$

等号成立当且仅当 $a=b=1$,命题得证.

例 1.4 a,b,c 为正数,证明

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+2(a+b+c)\geqslant\frac{(a+b+c)^3}{ab+bc+ca}$$

证明 原不等式等价于

$$(ab+bc+ca)\left[\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+2(a+b+c)\right]\geqslant(a+b+c)^3$$

展开即需证

$$a^2b^4+b^2c^4+c^2a^4\geqslant ab^3c^2+bc^3a^2+ca^3b^2$$

令 $x=ab^2,y=bc^2,z=ca^2$,则只需证明

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx$$

这是显然成立的.

例 1.5 对正数 a,b,c,证明

$$abc(a+2)(b+2)(c+2)\leqslant\left[1+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\right]^3$$

证明 对不等式右端,由 AM - GM 不等式有

$$\left[1+\frac{2}{3}(ab+bc+ca)\right]^3=\left[\frac{(1+ab+bc)+(1+bc+ca)+(1+ca+ab)}{3}\right]^3\geqslant$$
$$(1+ab+bc)(1+bc+ca)(1+ca+ab)$$

而由 Cauchy 不等式有

$$(1+ab+bc)(bc+ca+1)\geqslant(\sqrt{bc}+a\sqrt{bc}+\sqrt{bc})^2=bc(a+2)^2$$

同理可得出其余两个不等式,将这三个不等式相乘并化简,即可得到我们要证的不等式.

例 1.6 (2007 年罗马尼亚数学奥林匹克)对正数 a,b,c 满足

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\geqslant 1$$

求证

$$a+b+c\geqslant ab+bc+ca$$

证明 由 Cauchy 不等式

$$(a+b+c^2)(a+b+1)\geqslant(a+b+c)^2$$

即

$$\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}\geqslant\frac{1}{a+b+1}$$

于是

$$\sum\frac{a+b+c^2}{(a+b+c)^2}\geqslant\sum\frac{1}{a+b+1}\geqslant 1$$

立得

$$\sum(a+b+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$$

展开后化简即为 $a+b+c\geqslant ab+bc+ca$,证毕.

例 1.7 a,b,c 为正数,证明

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{16(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 8$$

证明 设 $a+b+c=1,ab+bc+ca=x$,则原不等式等价于

$$\frac{3abc+1-2x}{x-abc}+\frac{16x}{1-2x}\geqslant 8$$

事实上我们有

$$\frac{3abc+1-2x}{x-abc}+\frac{16x}{1-2x}\geqslant\frac{1-2x}{x}+\frac{16x}{1-2x}=$$
$$\frac{(6x-1)^2}{x(1-2x)}+8\geqslant 8$$

故原不等式成立,等号成立当且仅当 $a=2+\sqrt{3},b=1,c=0$ 及其轮换.

例 1.8 $a,b,c\geqslant 0$,求证