高等学校物理及光电类专业适用教材

数学物理方法

王友年　宋远红　主编

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

高等学校物理及光电类专业适用教材

数学物理方法

王友年　宋远红　主编

大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 / 王友年，宋远红主编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2014.9
ISBN 978-7-5611-9347-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①王… ②宋… Ⅲ. ①数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 162184 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023

发行：0411-84708842 传真：0411-84701466 邮购：0411-84703636

E-mail：dutp@dutp.cn URL：http://www.dutp.cn

大连力佳印务有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm 印张：13 字数：316 千字

2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑：邵 青 责任校对：左 轶

封面设计：宋善怡

ISBN 978-7-5611-9347-1 定 价：36.00 元

前　言

“数学物理方法”是高等学校物理及光电类等相关专业的一门重要的本科生基础课，它是“电动力学”“量子力学”等后续课程的基础。同时，它在自然科学及应用技术等领域也具有广泛的应用。

目前，国内已有很多关于“数学物理方法”的优秀教材，如郭敦仁教授、梁昆淼教授及吴崇试教授等分别所著的同名教材。但自 2000 年以来，国内各高校物理类专业的“数学物理方法”课程的学时数普遍地受到压缩，有的学校甚至把该课程压缩到 80 学时以内。如何能在较短的学时内把数学物理方法的主要知识传授给学生，是一项非常艰巨的任务。为了做到这一点，作者在编写本书时，重点做了两方面的尝试：一是在不失数学理论的严谨性和课程内容的完整性的前提下，尽量避免过多的数学公式推导和证明，而侧重于数学方法在解决实际物理问题中的应用；二是尽量使各章的前后顺序安排更加合理，前后内容相互连贯，层次清晰。

本书包括复变函数、数学物理方程及特殊函数三大部分内容，共分十四章。第一部分主要介绍复变函数、复变函数的积分、解析函数的幂级数展开、留数定理及应用、傅里叶变换和拉普拉斯变换；第二部分主要介绍数学物理方程的建立、分离变量法、傅里叶级数展开法、积分变换法及格林函数法；第三部分主要介绍球函数、柱函数及量子力学中的厄密函数和广义拉盖尔函数。

这里需要对上述课程内容编排进行几点说明：(1)为了突出课程内容的前后连贯性，首先系统介绍求解数学物理方程的几种不同的方法，然后再专门介绍分离变量过程中遇到的几种特殊函数；(2)在分离变量法这一章，系统地介绍了三种不同形式的数学物理方程(波动方程、输运方程及泊松方程)在四种不同坐标系(直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系及球坐标系)中的分离变量方法；(3)在现有的一些“数学物理方法”教科书中，很少对厄密函数和广义拉盖尔函数进行介绍。即便是有，也是把它们放在附录中。但这两种特殊函数是量子力学的重要数学工具。为此，本书在第三大部分中专门用一章对这两种特殊函数的引入及其性质进行详细的介绍。

本书可作为高等学校物理及光电类专业的“数学物理方法”课程教材，也可作为高等学校其他相关专业的教学参考用书。

本书是根据作者自 2000 年以来在为大连理工大学物理和光电类专业本科生讲授“数学物理方法”课程的讲义整理而成的。大连理工大学物理与光电学院宋鹤山教授对本书第十四章的编写提出了许多宝贵意见，特此致谢。此外，赵书霞、高飞和张钰如三位青年教师也参与了本书的文字和公式校对，尤其是张钰如老师对本书进行了通篇校对，在此一并向他们表示感谢。

限于作者的学识水平，本书在内容的取舍和编排、基本概念和方法的叙述等方面难免存在一些不当之处，恳请读者批评指正。

编　者

2014 年 3 月于大连理工大学

目 录

第一篇 复变函数

第一章 复变函数 …… 1
§1.1 复数的概念及运算 …… 1
§1.2 复变函数 …… 3
§1.3 复变函数的导数 …… 4
§1.4 解析函数 …… 6
§1.5 几种简单的解析函数 …… 8
§1.6 多值函数 …… 9
第二章 复变函数的积分 …… 12
§2.1 复变函数的积分 …… 12
§2.2 柯西定理 …… 13
§2.3 柯西公式 …… 16
§2.4 泊松积分公式 …… 18
第三章 解析函数的幂级数展开 …… 21
§3.1 复变函数项级数 …… 21
§3.2 幂级数 …… 22
§3.3 泰勒级数展开 …… 23
§3.4 洛朗级数展开 …… 25
§3.5 孤立奇点的分类 …… 29
第四章 留数定理及应用 …… 32
§4.1 留数定理 …… 32
§4.2 留数的计算方法 …… 33
§4.3 留数定理的应用 …… 35
§4.4 补充内容 …… 39
第五章 傅里叶变换 …… 45
§5.1 傅里叶级数 …… 45
§5.2 傅里叶变换 …… 48
§5.3 傅里叶变换的性质 …… 52
§5.4 δ 函数 …… 54

第六章　拉普拉斯变换 …… 60
§6.1　拉普拉斯变换的定义 …… 60
§6.2　拉普拉斯变换的性质 …… 62
§6.3　拉普拉斯变换的反演 …… 64
§6.4　拉普拉斯变换的应用 …… 66

第二篇　数学物理方程

第七章　数学物理方程的建立 …… 72
§7.1　波动方程 …… 72
§7.2　输运方程 …… 75
§7.3　泊松方程 …… 77
§7.4　定解条件 …… 78
第八章　分离变量法 …… 82
§8.1　直角坐标系中的分离变量法 …… 82
§8.2　平面极坐标系中的分离变量法 …… 88
§8.3　柱坐标系中的分离变量法 …… 93
§8.4　球坐标系中的分离变量法 …… 96
§8.5　施图姆-刘维尔型方程的本征值问题 …… 100
第九章　傅里叶级数展开法 …… 103
§9.1　强迫振动的定解问题 …… 103
§9.2　有源热传导的定解问题 …… 106
§9.3　泊松方程的定解问题 …… 108
§9.4　非齐次边界的处理 …… 110
第十章　积分变换法 …… 115
§10.1　傅里叶变换法 …… 115
§10.2　拉普拉斯变换法 …… 121
§10.3　联合变换法 …… 124
第十一章　格林函数法 …… 128
§11.1　三维无界区域中的格林函数法 …… 128
§11.2　三维有界区域中的格林函数法 …… 131
§11.3　求解格林函数的电像法 …… 133
§11.4　二维有界区域中泊松方程的格林函数法 …… 136

第三篇　特殊函数

第十二章　球函数 …… 140
§12.1　勒让德方程的级数解 …… 140
§12.2　勒让德多项式的基本性质 …… 143
§12.3　勒让德多项式的应用举例 …… 149

§12.4 连带勒让德函数…… 153
§12.5 球函数…… 156
§12.6 非轴对称情况下拉普拉斯方程的定解问题…… 158
第十三章 柱函数…… 162
§13.1 贝塞尔方程的级数解…… 162
§13.2 贝塞尔函数的基本性质…… 166
§13.3 贝塞尔方程的本征值问题…… 170
§13.4 贝塞尔方程本征值问题的应用举例…… 172
§13.5 虚宗量贝塞尔函数…… 177
§13.6 球贝塞尔函数…… 180
第十四章 量子力学中的特殊函数…… 184
§14.1 薛定谔方程…… 184
§14.2 简谐振子的波函数与厄密函数…… 186
§14.3 氢原子的波函数与广义拉盖尔函数…… 191
参考书目…… 200

第一章 复变函数

复变函数论在许多科学技术中有着广泛的应用,特别是它是物理学的重要数学工具。本章首先简要回顾一下复数的基本概念和运算规则,在此基础上再进一步介绍复变函数的基本概念、复变函数的导数、解析函数及多值函数等。其中解析函数是一个重要的概念,它将贯穿本书的整个复变函数论中。

§1.1 复数的概念及运算

1. 复数的概念

(1)复数的定义

一个复数 z 可以表示成

$$z=x+iy \tag{1.1-1}$$

其中 $x=\mathrm{Re}z$,是复数的实部;$y=\mathrm{Im}z$,是复数的虚部;$i=\sqrt{-1}$,是虚数单位。

(2)复数的矢量表示式

如果把复数的实部 x 和虚部 y 看成是平面直角坐标系中的一点(x,y),则复数 z 与平面上的点是一一对应的,称该平面为复平面,见图 1-1。也就是说,一个复数与平面直角坐标系中的一个矢量相对应。

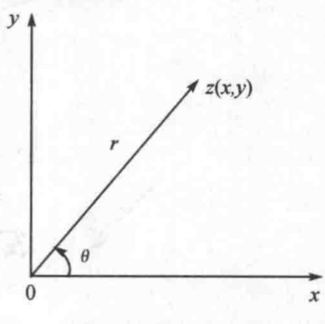

图 1-1

(3)复数的三角函数表示式

如果将平面直角坐标系(x,y)变换成平面极坐标系(r,θ),即

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases},\text{其中}\begin{cases}r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\end{cases} \tag{1.1-2}$$

则复数 z 在平面极坐标系中的表示式为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.1-3}$$

其中 $r=|z|$ 是复数的模;θ 是复数的辐角,记作 $\mathrm{Arg}\ z$。

(4)复数的指数表示式

利用欧拉公式,也可以把复数写成指数形式的表示式,即

$$z=re^{i\theta} \tag{1.1-4}$$

注意,一个复数的辐角不是唯一的,它可以任意增加或减少 2π 的整数倍,即

$$\mathrm{Arg}\ z=\arg z+2\pi k\ (k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots) \tag{1.1-5}$$

其中 $\arg z \in [0,2\pi]$，为主辐角。

(5)共轭复数

与复数 z 对应的共轭复数为

$$z^* = x - iy \tag{1.1-6}$$

或

$$z^* = re^{-i\theta} \tag{1.1-7}$$

即 z 与 z^* 是一对共轭复数，它们的模相等，且关于实轴对称。

2. 复数的运算法则

令两个复数分别为 $z_1 = x_1 + iy_1$ 及 $z_2 = x_2 + iy_2$，则有

加(减)法规则：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \tag{1.1-8}$$

乘法规则：

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{1.1-9}$$

除法规则：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0) \tag{1.1-10}$$

如果利用复数的指数表示式，则可以很方便地对复数进行乘法、除法、乘方及开方等运算。令两个复数分别为 $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ 及 $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$，则有

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.1-11}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] \end{aligned} \tag{1.1-12}$$

$$\begin{aligned} z^n &= r^ne^{in\theta} \\ &= r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \qquad (n\text{ 为整数}) \end{aligned} \tag{1.1-13}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{r}\,e^{i\theta/n} \\ &= \sqrt[n]{r}\,[\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n)] \qquad (n\text{ 为整数}) \end{aligned} \tag{1.1-14}$$

注意，由于复数 z 的辐角不是唯一的，可以加减 2π 的整数倍[见式(1.1-5)]，则根式$\sqrt[n]{z}$ 的辐角也可以相应地加减 $2\pi/n$ 的整数倍，即

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} &= \theta/n \\ &= \frac{1}{n}\arg z + \frac{2\pi k}{n}\ [k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm(n-1)] \end{aligned} \tag{1.1-15}$$

可见，对于给定的 n，根式$\sqrt[n]{z}$有 n 个不同的值。

例 1 证明 $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$。

解：根据式(1.1-13)，令 $r=1$，则有

$$(e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

根据欧拉公式，有 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，将它代入上式的左边，则可以得到

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \tag{1.1-16}$$

该式称为棣莫弗公式。

例 2 计算复数$\sqrt{1+i}$的值。

解:由于 $z=1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4+i2\pi k}$,则

$$\sqrt{1+i}=\sqrt{\sqrt{2}e^{i\pi/4+i2\pi k}}=2^{1/4}e^{i\pi/8+i\pi k}$$

它有两个值,分别为

$$\sqrt[4]{2}[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)],$$
$$-\sqrt[4]{2}[\cos(\pi/8)+i\sin(\pi/8)]。$$

§1.2 复变函数

1. 复变函数的概念

当复变量 $z=x+iy$ 在复平面上某个点集 E(复数的集合)中连续变动时,有一个或多个复数值 w 与之相对应,则称 w 为复变量 z 的函数,即复变函数

$$w=f(z) \qquad z\in E \tag{1.2-1}$$

与复变量 $z=x+iy$ 一样,复变函数 $f(z)$也可以用实部和虚部来表示

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{1.2-2}$$

不过它的实部 $u(x,y)$和虚部 $v(x,y)$都是实变量 x 和 y 的二元函数,即一个复变函数是两个二元函数的有序组合。

2. 区域的概念

在复变函数论中,通常讨论的是一种特殊性质的复变函数,即解析函数(其定义将在后面给出)。对于这类函数,其定义域不是一般的点集,而是满足一定条件的特殊点集,称之为区域,用 D 表示。

下面先介绍几个与区域有关的概念:

(1)**邻域**:以复数 z_0 为圆心,以任意小的正实数 ε 为半径作一个圆,则圆内所有点的集合称为 z_0 的邻域。

(2)**内点**:若 z_0 及其邻域均属于点集 E,则称 z_0 为点集的内点。

(3)**外点**:若 z_0 及其邻域均不属于点集 E,则称 z_0 为点集的外点。

(4)**边界点**:若在 z_0 的每个邻域内,既有属于点集 E 的点,也有不属于点集 E 的点,则称 z_0 为点集的边界点。边界点的全体称为边界或边界线。

(5)**区域**:区域就是复变量 z 在复平面上的取值范围,但严格地说,它是应满足如下两个条件的点集:

1)全部由内点构成;

2)具有连通性,即点集中的任意两个点均可以用一条折线连接起来,且折线上的点全部属于该点集。

(6)**边界的走向**:如果沿着边界走,区域 D 总在左方,则该走向定义为边界的正方向。如图 1-2 中的 C 就是区域 D 的边界,箭头所指示的方向就是边界的正方向。

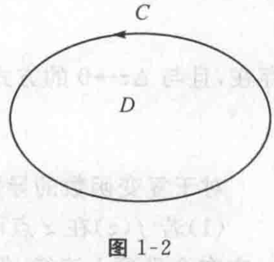

图 1-2

(7)**闭区域**:由区域 D 及边界线所组成的点集为闭区域,用 $\bar{D}=D+C$ 来表示。

在复变函数论中,有不同形状的区域,如圆形区域 $|z|<R$,环形区域 $R_1<|z|<R_2$,及位于上半平面的半圆形区域 $|z|<R$,$\mathrm{Im}z>0$ 等,其中 R,R_1 和 R_2 均为大于零的实数,见图 1-3。

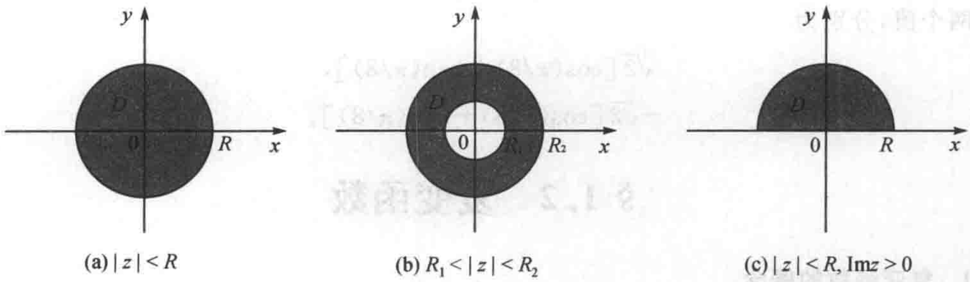

图 1-3

§1.3 复变函数的导数

1. 复变函数的连续性

与实变函数一样,复变函数也有它的极限和连续性。复变函数的连续性定义为:当复变量 z 在复平面上趋于某一定点 z_0 时,与之对应的复变函数 $f(z)$ 也趋于一个确定的值 $f(z_0)$,即

$$\lim_{z\to z_0} f(z)\to f(z_0) \tag{1.3-1}$$

由于复变函数 $f(z)$ 可以用两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 来表示[见式(1.2-2)],这样复变函数 $f(z)$ 的连续性则归结于这两个二元函数的连续性问题,即

$$\text{当}\begin{cases}x\to x_0\\ y\to y_0\end{cases}\text{时,要求有}\begin{cases}u(x,y)\to u(x_0,y_0)\\ v(x,y)\to v(x_0,y_0)\end{cases}$$

尽管在形式上复变函数的极限和连续性与实变函数相同,但由于两者的变量的变化范围不同(一个是在复平面上变化,另一个是在实轴上变化),因此两者的实际含义是不同的。

2. 复变函数的导数

设 $w=f(z)$ 是区域 D 中的单值函数,即对于 D 的每一个 z 值,只有一个 w 值与之相对应。若对于 D 内某点 z,有极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

存在,且与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关,则称函数 $w=f(z)$ 在 z 点的导数存在,并记为

$$f'(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{1.3-2}$$

对于复变函数的导数,需要做如下几点说明:

(1)若 $f(z)$ 在 z 点可导,则它一定在 z 点连续;反之,不一定成立。例如,对于 $f(z)=x$,它在全平面上连续,但却是处处不可导,这是因为

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}$$

的值与 $\Delta z \to 0$ 的方式有关。例如，当 Δz 沿着实轴趋于零时，即 $y=0, \Delta x \to 0$，上式的极限值为 1；当 Δz 沿着虚轴趋于零时，即 $x=0, \Delta y \to 0$，上式的极限值为 0。

(2)可以看出，复变函数导数的定义在形式上与实变函数的定义完全相同。因此，可以把实变函数的导数规则应用到复变函数上，如

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1 \pm w_2)=\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} \pm \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(w_1 \cdot w_2)=w_2 \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}+w_1 \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)=\frac{w_2 w'_1-w_1 w'_2}{w_2}$$

(3)虽然在形式上复变函数的导数定义与实变函数的导数定义相同，但实质上两者有很大的差别。对于实变函数 $f(x)$，它的导数存在，要求 Δx 沿着实轴趋于零；而对于复变函数 $f(z)$，它的导数存在，则要求 Δz 可以在复平面上沿任一条路径趋于零。因此，与实变函数相比，对复变函数可导性存在的要求要苛刻得多。

3. 柯西-黎曼条件

如果复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 中的导数存在，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases} \tag{1.3-3}$$

式(1.3-3)称为柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)条件(或简称 C-R 条件)。下面对这个条件进行证明。

由于函数 $f(z)$ 可导，则有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y} \tag{1.3-4}$$

当 Δz 沿着平行于实轴的方向趋于零时，有 $\Delta y=0, \Delta x \to 0$，则有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3-5}$$

当 Δz 沿着平行于虚轴的方向趋于零时，有 $\Delta y \to 0, \Delta x=0$，则有

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.3-6}$$

由于 $f(z)$ 的导数存在与 $\Delta z \to 0$ 的方式无关，这样式(1.3-5)的右边应与式(1.3-6)的右边相等，由此可以得到 C-R 条件。

在平面极坐标系 (r,θ) 中，利用 $z=re^{i\theta}$ 及 $\Delta z=(\Delta r+i\Delta\theta)e^{i\theta}$，则类似地可以证明：极坐标系中的 C-R 条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases} \tag{1.3-7}$$

例 1 证明函数 $\cos z$ 的实部和虚部满足 C-R 条件。

解：由函数 $\cos z$ 的定义，有

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})\cos x - i\,\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})\sin x \\ &\equiv u(x,y)+iv(x,y)\end{aligned}$$

由此可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $\cos z$ 的实部和虚部满足 C-R 条件。

§1.4 解析函数

1. 解析函数的定义

如果一个复变函数 $f(z)$在区域 D 中处处可导，则称 $f(z)$为解析函数。因此，我们判断一个函数 $f(z)$是否解析，首先应确定在所讨论的区域内该函数的实部和虚部是否满足 C-R 条件。例如，对于幂函数 $f(z)=z^n$ 或指数函数 $f(z)=e^z$，可以验证它们在全平面上都是解析的。

需要说明的是，解析函数的定义要求该函数在考虑的区域中是处处可导的。这样，如果一个函数在某一点解析，则在该点一定可导，反之却不一定成立。也就是说，复变函数 $f(z)$ 在某点上的可导与解析是不等价的，只有在所考虑的全区域中，函数的解析与可导才是等价的。

2. 解析函数与调和函数

我们将在§2.3 节中证明，如果一个函数在某个区域解析，则它的高阶导数存在，即它的实部和虚部的高阶偏导都是存在的。这样根据 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.4-1}$$

及

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{1.4-2}$$

方程(1.4-1)或(1.4-2)是一个典型的二维拉普拉斯方程。如一个二元函数 $u(x,y)$或 $v(x,y)$满足二维拉普拉斯方程，则这个函数被称为**调和函数**。可见，解析函数的实部和虚部都是调和函数，而且还是一对共轭的调和函数。

如果我们把一个调和函数看成是一个解析函数的实部(或虚部)，并利用 C-R 条件求出相应的虚部(或实部)，就可以确定出这个解析函数。例如，假设函数 $u(x,y)$是一个调和函数，并把它看作是一个解析函数的实部。这样，它的虚部的全微分为

$$dv(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy \tag{1.4-3}$$

利用 C-R 条件，则可以进一步得到

$$dv(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy \tag{1.4-4}$$

于是，可以得到

$$v(x,y)=\int^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right) \tag{1.4-5}$$

计算 $v(x,y)$的方法有如下三种：

(1)曲线积分法。 我们知道，一个无源的静电势函数要满足拉普拉斯方程，而且由于它是一个保守势，对应的静电力所做的功与路径无关。现在 u(或 v)是调和函数，就相当于一个静电势函数，因此式(1.4-5)中的积分与路径无关。这样，我们可以选取某种特殊的路径，使得积分容易算出。如选取积分路径为$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$，这样可以把式(1.4-4)写成

$$v(x,y)=-\int_{(0,0)}^{(x,0)}\frac{\partial u}{\partial y}dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}\frac{\partial u}{\partial x}dy+c \tag{1.4-6}$$

其中 c 为积分常数。

(2)凑成全微分法。 对于某些特殊形式的调和函数，可以把式(1.4-5)的右端凑成一个全微分，这样就自然求出积分了。

(3)不定积分法。 在这种方法中，可以先假定 x(或 y)不变，对 y(或 x)进行积分。例如，先假定 x 不变，这样可以将式(1.4-5)写成

$$v(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dy+\varphi(x) \tag{1.4-7}$$

或先假定 y 不变，有

$$v(x,y)=-\int\frac{\partial u}{\partial y}dx+\psi(y) \tag{1.4-8}$$

然后，再利用 C-R 条件，确定待定函数 $\varphi(x)$或 $\psi(y)$。

例 1 已知调和函数 $u(x,y)=xy$ 是某个解析函数的实部，确定这个解析函数的形式。

解： 根据 $u(x,y)=xy$，可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y \text{ 及 } \frac{\partial u}{\partial y}=x$$

下面采用上述三种不同的方法来确定出这个解析函数的虚部 $v(x,y)$。

(1)曲线积分法

根据式(1.4-6)，可以得到

$$\begin{aligned}v(x,y)&=-\int_{(0,0)}^{(x,0)}x dx+\int_{(x,0)}^{(x,y)}y dy+c\\&=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+c\end{aligned}$$

(2)凑成全微分法

直接根据式(1.4-5)，可以得到

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \int^{(x,y)}(-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) \\
&= -\frac{1}{2}\int^{(x,y)}\mathrm{d}(x^2-y^2) \\
&= -\frac{1}{2}(x^2-y^2)+c
\end{aligned}
$$

(3)不定积分法

根据式(1.4-7),可以得到

$$
\begin{aligned}
v(x,y) &= \int y\mathrm{d}y + \varphi(x) \\
&= \frac{1}{2}y^2+\varphi(x)
\end{aligned}
$$

将上式对 x 求导,则有$\frac{\partial v}{\partial x}=\varphi'(x)$。再利用 C-R 条件$-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$,则可以得到

$$\varphi'(x)=-x$$

完成对 x 的积分后,最后得到

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+c$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{2}(x^2-y^2)+c$$

最后,我们得到解析函数 $f(z)$的形式为

$$
\begin{aligned}
f(z) &= xy - i\frac{1}{2}(x^2-y^2)+ic \\
&= -iz^2/2+ic
\end{aligned}
$$

§1.5 几种简单的解析函数

对于实变函数,有一些初等的函数,如幂函数 x^n,指数函数 e^x,三角函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 等。对于复变函数,同样也有这样一些简单的函数,如 z^n,e^z,$\sin z$ 及 $\cos z$ 等。可以将这些初等复变函数看成是初等实变函数在复数领域的推广,但它们之间的性质有着许多本质的不同。

(1)幂函数

$$f(z)=z^n \tag{1.5-1}$$

当 $n\geqslant 0$ 时,该函数在全复平面上解析;当 $n<0$ 时,该函数在 $z>0$ 的区域内处处解析。幂函数的导数为

$$f'(z)=(z^n)'=nz^{n-1} \tag{1.5-2}$$

对于多项式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}a_nz^n \tag{1.5-3}$$

也具有与幂函数相同的性质,其中系数 a_n 为复常数。

(2)指数函数

$$f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y) \tag{1.5-4}$$

可以证明指数函数在全复平面上解析，且

$$(e^z)'=e^z \tag{1.5-5}$$

但在无穷远点无定义，因为很容易验证它沿实轴和虚轴趋于无穷的极限不一样。此外，很容易证明复变指数函数具有周期性，其周期为 $2\pi i$，即 $e^z=e^{z+2\pi i}$。

(3)三角函数

$$\begin{aligned} f(z)&=\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) \\ f(z)&=\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \end{aligned} \tag{1.5-6}$$

可以证明，$\sin z$ 与 $\cos z$ 在全复平面上解析，且有

$$(\sin z)'=\cos z,\ (\cos z)'=-\sin z \tag{1.5-7}$$

应注意，由于 z 是复变量，$\sin z$ 及 $\cos z$ 的绝对值可以大于1，这一点与对应的实变函数不同。如

$$\sin(i)=\frac{1}{2i}(e^{-1}-e^{1})=1.1755i$$

$$\cos(i)=\frac{1}{2}(e^{-1}+e^{1})=1.54308$$

可见有 $|\sin(i)|>1$ 及 $|\cos(i)|>1$。尽管它们各自的绝对值大于1，但却遵从实数三角函数的公式：

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1 \tag{1.5-8}$$

此外，这两种三角函数的周期为 2π，这一点与实变函数相同。

对于其他复变三角函数，如 $\tan z$，$\cot z$，$\sec z$ 及 $\csc z$，在 $z>0$ 的区域内处处解析。

(4)双曲函数

$$\begin{aligned} f(z)&=\mathrm{sh}z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}) \\ f(z)&=\mathrm{ch}z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}) \end{aligned} \tag{1.5-9}$$

它们在全复平面上处处解析，且

$$(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z,\ (\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z \tag{1.5-10}$$

它们的周期为 $2\pi i$。

§1.6 多值函数

在§1.1节中我们已经看到，对于某些复数，如根式和自然对数，具有多值性。同样，对于一些复变函数也具有多值性，如根式函数、对数函数、反三角函数及反双曲函数等。下面以根式函数

$$w(z)=\sqrt{z} \tag{1.6-1}$$

为例，介绍一下多值函数的一些基本概念。

为了更清楚地看出它的多值性，我们令

$$z=re^{i\theta},\ w=\rho e^{i\varphi}$$

这样有

$$\rho e^{i\varphi}=\sqrt{r}e^{i\vartheta/2}$$

由此可以得到

$$\rho=\sqrt{r}\,,\ \varphi=\frac{\vartheta}{2}=\frac{1}{2}\arg z+n\pi\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.6-2}$$

其中 $\arg z$ 是 z 的主辐角。显然,对于给定的一个 z,有两个 w 与之相对应:

$$w_1=\sqrt{r}e^{i(\arg z)/2}\qquad (\text{对应于 } n=0,\pm2,\cdots) \tag{1.6-3}$$

$$w_2=\sqrt{r}e^{i(\arg z)/2+i\pi}=-\sqrt{r}e^{i(\arg z)/2}\qquad (\text{对应于 } n=\pm1,\pm3,\cdots) \tag{1.6-4}$$

通常称 w_1 和 w_2 是多值函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的两个**单值分支**。这种函数的多值性来源于宗变量 z 的多值性。

复变函数 $f(z)=\sqrt{z}$ 的两个单值分支并不是互相独立的。为了说明这一点,我们在复平面上选一点 z_0,如图 1-4 所示。在该点,有 $w=w_1=\sqrt{r_0}\,e^{i(\arg z_0)/2}$。当 z 从 z_0 点出发,沿着包围 $z=0$ 的闭合围道 l 一周回到 z_0 点时,z 的辐角增加了 2π。根据式(1.6-2),w 的辐角相应地增加了 π,从而 $w=\sqrt{r_0}\,e^{i(\arg z_0)/2+i\pi}$。这样,$w$ 就从 w_1 分支进入了 w_2 分支。因此,多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的两个单值分支 w_1 和 w_2 并不是独立的。如果当 z 从 z_0 点出发,沿着另一个不包围 $z=0$ 的闭合围道 l' 一周而回到 z_0 点时,由于 z 的辐角没有改变,因此 w 仍为 $\sqrt{r_0}\,e^{i(\arg z_0)/2}$,即仍然处于单值分支 w_1 中,没有进入单值分支 w_2。

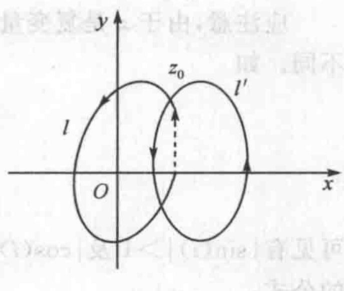

图 1-4

从以上分析可以看出,对于函数 $w=\sqrt{z}$,$z=0$ 点具有这样的特征:当 z 绕着它一周回到原处时,多值函数 $w=\sqrt{z}$ 由一个分支进入另外一个分支。具有这种性能的点称为**多值函数的支点**。

除了 $z=0$ 点外,可以验证无穷远点 $z=\infty$ 也是多值函数 $w=\sqrt{z}$ 的一个支点。令 $t=1/z$,则 $w(z)=w(t)=1/\sqrt{t}$。当 t 绕 $t=0$ 一周回到原处时,$w(t)$ 的值不还原,因此 $t=0$ 是多值函数 $w(t)=1/\sqrt{t}$ 的支点,即 $z=\infty$ 是多值函数 $w(z)=\sqrt{z}$ 的一个支点。

为了更形象化地说明多值函数 $w(z)=\sqrt{z}$ 的变化情况,下面用作图法来进一步地描述,见图 1-5。这里约定,对于上面两个单值分支 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$,其宗变量 z 的取值范围分别是

$$w_1(z):\ 0\leqslant \operatorname{Arg}z\leqslant 2\pi$$

$$w_2(z):\ 2\pi\leqslant \operatorname{Arg}z\leqslant 4\pi$$

在上平面 T_1 上,从 $z=0$ 开始,沿正实轴方向至无穷远点将其割开,并规定割线的上下沿分别对应于 $\operatorname{Arg}z=0$ 和 $\operatorname{Arg}z=2\pi$。这样,当 z 在平面 T_1 上变化时,只要不跨越该割线,它的辐角就被限制在 $0\leqslant \operatorname{Arg}z\leqslant 2\pi$,相应的函数 $w(z)$ 的值位于上半平面,即 $0\leqslant \operatorname{Arg}w\leqslant \pi$,见图 1-5(a)。

在平面 T_2 上,也作类似的割线,但割线的上下沿分别对应于 $\operatorname{Arg}z=2\pi$ 和 $\operatorname{Arg}z=4\pi$。同样,当 z 在平面 T_2 上变化时,只要不跨越该割线,它的辐角就被限制在 $2\pi\leqslant \operatorname{Arg}z\leqslant 4\pi$,相应的函数 $w(z)$ 的值位于下半平面,即 $\pi\leqslant \operatorname{Arg}w\leqslant 2\pi$。