矩阵论

MATRIX THEORY

姚 波 王福忠 主编

辽宁科学技术出版社

矩 阵 论

姚 波 王福忠 主编

辽宁科学技术出版社
沈阳

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论 / 姚波，王福忠主编. —沈阳：辽宁科学技术出版社，2012.8

ISBN 978-7-5381-7515-8

Ⅰ.①矩… Ⅱ.①姚… ②王… Ⅲ.①矩阵论—高等学校—教材 Ⅳ.①0151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 115882 号

出版发行：辽宁科学技术出版社

（地址：沈阳市和平区十一纬路 29 号　邮编：110003）

印 刷 者：沈阳新华印刷厂

经 销 者：各地新华书店

幅面尺寸：184mm×260mm

印　　张：13.75

字　　数：300 千字

出版时间：2012 年 8 月第 1 版

印刷时间：2012 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑：高　鹏

封面设计：杜　江

责任校对：栗　勇

书　　号：ISBN 978-7-5381-7515-8

定　　价：30.00 元

联系电话：024—23284062

邮购热线：024—23284502

E-mail:lnkj1107@126.com

http://www.lnkj.com.cn

本书网址：www.lnkj.cn/uri.sh/7515

本社法律顾问:陈光律师

咨询电话:13940289230

前　　言

作为数学的一个重要分支，矩阵理论是经典数学的基础。它具有极其丰富的内容。它是实用性最强的数学分支，是处理大量有限维空间形式与数学关系强有力的工具。矩阵理论在数值分析、最优化理论、概率统计、控制论、图论、力学、电学、稳定性理论、管理科学与工程等学科都有十分重要的应用。科学、工程计算设计软件 MATLAB，其名称不过是由 Matrix Laboratory（矩阵实验室）缩略而得，由此可看出矩阵研究的重要性。从 20 世纪 80 年代起，此课程就成为研究生的基础理论课。

正基于此，本书主要讲述大多数理学、工学、管理学、经济学等各专业常用的、一般的矩阵基本理论和方法，内容简明，叙述通俗易懂，既注重理论又注重实际，对有些章节利用 MATLAB 给出求法，对书后习题给出了详解。本书教学课时为 50 ~ 60 学时。

沈阳师范大学的胡号、王建华、王嬴男、荣键、安志娟、李丹、李飞飞、周辰红、刘媛媛、武全胜、黄珊等同学在本书的编写过程中做了大量的工作，在此表示感谢。

编者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　线性空间和线性映射

本章所介绍的基本概念是矩阵理论的基础。在近代数学发展中，这些概念和理论已渗透到数学的各个分支。

§1.1　预备知识

定义 1.1.1　设 A，B 是两个非空集合，如果存在一个 A 到 B 的对应法则 f，使得对 A 中的每一个元素 x 都有 B 中唯一的一个元素 y 与之对应，则称 f 是 A 到 B 的一个映射，记为 $y=f(x)$。元素 $y\in B$ 称为元素 $x\in A$ 在映射 f 下的像，称 x 为 y 的原像。集合 A 称为映射 f 的**定义域**。当 A 中元素 x 改变时，x 在映射 f 下的像的全体作成 B 的一个子集，称为映射 f 的**值域**，记为 $\mathrm{R}(f)$。

定义 1.1.2　设 P 是由一些复数组成的集合，其中包括 0 与 1。如果 P 中任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 P 中的数，那么 P 就称为一个**数域**。

显然，全体有理数组成的集合、全体实数组成的集合、全体复数组成的集合都是数域。这三个数域分别用字母 Q、R、C 来表示。全体整数组成的集合就不是数域，因为不是任意两个整数的商都是整数。

定义 1.1.3　令 A，B 是两个集合。由一切从 A，B 里顺序取出的元素组 (a,b) 所做成的集合叫做集合 A，B 的积，记成 $A\times B$。

例 1.1.1　设 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,2\}$，则 $A\times B=\{(1,3),(1,2),(2,3),(2,2)\}$。

定义 1.1.4　设 A，B，C 是三个非空集合，$A\times B$ 到 C 的映射称为 A 与 B 到 C 的一个代数运算。特别地，$A\times A$ 到 C 的映射称为 A 到 C 的**代数运算**；$A\times A$ 到 A 的映射称为 A 的代数运算或 A 的**二元运算**，也称集合 A 对代数运算是封闭的。

§1.2　线性空间

1.2.1　线性空间概念

定义 1.2.1　设 V 是一个非空集合，F 是一个数域（更多情况指的是实数域 R 和复数域 C），在 V 的元素之间定义了一种称为加法的代数运算，记为“+”，即对于 V 中任意两个元素 α 与 β，在 V 中有唯一的元素 γ 与它们相对应，称之为 α 与 β 的和，记为 $\gamma=\alpha+\beta$。在集合 V 的元素与数域 F 中的数之间还定义了一种代数运算，叫做数乘，记为“·”或省略不写，即对于 V 中任一元素 α 与 F 中任一数 k，在 V 中有唯一的一个元素 η 与它们对应，称为 k 与 α 的数乘积，记为 $\eta=k\cdot\alpha$（或 $\eta=k\alpha$）并且加法运算满足如下法则：

（1）交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

（2）结合律：$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$；

（3）零元素：在 V 中有一元素 0（称作零元素），对于 V 中任一元素 α 都有

$$\alpha+0=\alpha;$$

(4) 负元素：对于 V 中每一个元素 α，都有 V 的元素 β，使得

$$\alpha+\beta=0。$$

数乘运算满足如下法则：

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$。

其中 k，l 表示数域 F 中的任意数，α，β，γ 表示 V 中任意元素。

称这样的 V 为数域 F 上的**线性空间**。

例 1.2.1 n 元实向量集合 $\mathrm{R}^n=\{\alpha,\beta,\gamma,\cdots\}$，由线性代数知向量有加法运算与数乘向量运算。向量的加法运算具有四条性质：

(1) 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$ $(\alpha,\beta\in\mathrm{R}^n)$；

(2) 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathrm{R}^n)$；

(3) 存在零向量 “0”，满足 $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$;

(4) 对于 R^n 中任何一个实向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都有对应的负向量 $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$，满足 $\alpha+(-\alpha)=0$。

数乘向量运算也具有四条性质：

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$。

例 1.2.2 n 阶实方阵集合 $\mathrm{R}^{n\times n}=\{A,B,C,\cdots\}$，由线性代数知矩阵有加法运算与数乘矩阵运算。矩阵的加法运算具有四条性质：

(1) 加法交换律：$A+B=B+A$;

(2) 加法结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) 存在零矩阵 “0” 满足 $A+0=0+A=A$;

(4) 对于 $\mathrm{R}^{n\times n}$中任何一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，都有对应的负矩阵 $-A=(-a_{ij})_{n\times n}$,满足 $A+(-A)=0$。

数乘矩阵运算也具有四条性质：

(5) $1A=A$;

(6) $k(lA)=(kl)A$;

(7) $(k+l)A=kA+lA$;

(8) $k(A+B)=kA+kB$;

例 1.2.3 设 $F[x]$ 是数域 F 上的一元多项式的全体作成的集合，按通常多项式加法和数与多项式的乘法运算。多项式的加法运算具有四条性质：

(1) 加法交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

(2) 加法结合律：$[f(x)+g(x)]+h(x)=f(x)+[g(x)+h(x)]$;

(3) 存在零多项式 “0”，满足 $f(x)+0=0+f(x)=f(x)$;

(4) 对于 $F[x]$中任何一个多项式 $f(x)$，都有对应的负多项式 $-f(x)$，满足 $f(x)+(-f$

$(x))=0$。

数乘多项式的运算也具有四条性质：

(5) $1f(x)=f(x)$；

(6) $k(lf(x))=(kl)f(x)$；

(7) $(k+l)f(x)=kf(x)+lf(x)$；

(8) $k(f(x)+g(x))=kf(x)+kg(x)$。

例 1.2.4　设 $F[x]_n$ 是数域 F 上次数小于 n 的一元多项式再添上零多项式的全体作成的集合，按通常多项式加法和数与多项式的乘法运算也构成数域 F 上的线性空间。

例 1.2.5　设 $R[a, b]$ 表示区间 $[a, b]$ 上全体连续实函数作成的集合，按函数的加法和数与函数的数量乘法构成实数域 R 上的线性空间。

例 1.2.6　设 A 为实 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的所有解（包括零解）的集合构成实数域 R 上的线性空间。这个空间为方程组 $Ax=0$ 的解空间，也称为矩阵 A 的核或零空间，常用 $\mathrm{N}(A)$ 或 $\ker(A)$ 表示。

例 1.2.7　设 A 为 $m\times n$ 矩阵，x 为 n 维列向量，则 m 维列向量集合

$$V=\{y\in \mathrm{C}^m \mid y=Ax, x\in \mathrm{C}^n, A\in \mathrm{C}^{m\times n}\}$$

构成复数域 C 上的线性空间，称为 A 的列空间或 A 的值域，常用 $\mathrm{R}(A)$ 或 $\mathrm{Im}(A)$ 表示。

下面给出不构成线性空间的例子。

例 1.2.8　设 V 是实数域 R 上 n 次 $(n\in \mathrm{N}^*)$ 多项式全体作成的集合，按通常多项式加法和数与多项式的乘法运算不构成 R 上线性空间。例如取 $f(x)=x^n+1$，$g(x)=-x^n+1$，则 $f(x)+g(x)=2\notin \mathrm{V}$。

例 1.2.9　非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的所有解的集合（解向量集合）按通常规定向量的加法与数与向量的乘法，不构成 R 上线性空间。

1.2.2　向量的线性相关性

线性空间的元素 α，β，γ，…称为向量，这里所指的向量比线性代数中 n 元向量 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 的含义更为广泛。

向量的线性相关性概念与结论在形式上与线性代数中相同，下面只作简单论述。

定义 1.2.2　设 V 是数域 F 上的线性空间，α_1，α_2，…，α_r（$r\geqslant 1$）是 V 中一组向量，k_1，k_2，…，k_r 是数域 F 中一组数，如果 V 中向量 α 可以表示为

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r$$

则称 α 可由 α_1，α_2，…，α_r **线性表示**（出），也称 α 是 α_1，α_2，…，α_r 的**线性组合**。

例 1.2.10　试证：$\mathrm{R}^{2\times 2}$ 中的矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ 可由 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 线性表示。

证明　因为

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 4\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}+6\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}+4\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

所以，矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 6 & 4\end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 的线性组合。

定义 1.2.3　已给线性空间 V 中一组向量 α_1，α_2，…，α_r（$r\geqslant 1$），如果在数域 F 中有 r 个不全为零的数 k_1，k_2，…，k_r，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0 \tag{1.2.1}$$

则称 α_1，α_2，…，α_r **线性相关**。如果一组向量 α_1，α_2，…，α_r 不线性相关，就称为**线性无关**。换言之，若

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

则只有 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$，便称 α_1，α_2，…，α_r 线性无关。

对于任何一组向量 α_1，α_2，…，α_r，都能满足等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

因此考察一组向量是否线性相关，关键不在于向量是否满足等式（1.2.1），而在于满足等式（1.2.1）中 k_1，k_2，…，k_r 是否只能全为零。若只能全为零，则向量组 α_1，α_2，…，α_r 线性无关。若满足（1.2.1）式中的 k_1，k_2，…，k_r 除了全为零的情况以外，还有不全为零的情况，则向量组线性相关。

例 1.2.11 试证：$\mathrm{R}^{2\times2}$ 中的一组向量（矩阵）

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$ 是线性无关的。

证明 若

$$k_1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+k_2\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+k_3\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+k_4\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0$$

即

$$\begin{bmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{bmatrix}=0$$

所以

$$k_1=k_2=k_3=k_4=0$$

因此满足

$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=0$$

的 k_1，k_2，k_3，k_4 只能全为零，于是 E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22} 线性无关。

例 1.2.12 试证：$\mathrm{R}^{2\times2}$ 中的向量（矩阵）组

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix},\ \alpha_2=\begin{bmatrix}2&1\\-2&1\end{bmatrix},\ \alpha_3=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$$ 是线性相关的。

证明 因为

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0$$

所以 α_1，α_2，α_3 线性相关。

定理 1.2.1 设线性空间 V 中向量组 α_1，α_2，…，α_m 线性无关，且向量组 α_1，α_2，…，α_m，β 线性相关，则 β 可由 α_1，α_2，…，α_m 线性表出，且表出是唯一的。

证明 因为向量组 α_1，α_2，…，α_m，β 线性相关，则存在不全为零的数 k_1，k_2，…，k_m，k_{m+1} 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k_{m+1}\beta=0$$

由 α_1，α_2，…，α_m 线性无关得 $k_{m+1}\neq0$，从而

$$\beta=-\frac{k_1}{k_{m+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{m+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_m}{k_{m+1}}\alpha_m$$

β 可由 α_1，α_2，…，α_m 线性表出。

假设 β 可由 α_1，α_2，…，α_m 线性表示为

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m$$

则

$$(k_1-l_1)\alpha_1+(k_2-l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-l_m)\alpha_m=0$$

由 α_1，α_2，…，α_m 线性无关得 $k_i-l_i=0$，则表示法唯一。

定义 1.2.4　设 α_1，α_2，…，α_s 是线性空间中一组向量，如果 α_1，α_2，…，α_s 中存在 r 个线性无关的向量 α_{i_1}，α_{i_2}，…，$\alpha_{i_r}(1\leqslant i_j\leqslant s, j=1,\cdots,r)$，并且 α_1，α_2，…，α_s 中任一向量都可由向量组 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r} 线性表示，则称向量组 α_{i_1}，α_{i_2}，…，α_{i_r} 为向量组 α_1，α_2，…，α_s 的**极大线性无关组**，数 r 称为向量组 α_1，α_2，…，α_s 的秩，记为 $\mathrm{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}=r$。

§1.3　基与坐标、坐标变换

1.3.1　基与维数、坐标

定义 1.3.1　设在数域 F 上线性空间 V 中有 n 个线性无关向量 α_1，α_2，…，α_n。且 V 中任何一个向量 α 都可由 α_1，α_2，…，α_n 线性表出

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}\tag{1.3.1}$$

则称 α_1，α_2，…，α_n 为 V 的一个基，$(k_1,k_2,\cdots,k_n)^{\mathrm T}$ 为 α 在基 α_1，α_2，…，α_n 下的**坐标**。这时，就称 V 为 n 维线性空间，并记 $\dim V=n$。式（1.3.1）中 $1\times n$ 矩阵$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的元素 α_1，α_2，…，α_n 不是数字而是向量。

例如 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm T}$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0)^{\mathrm T},\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)^{\mathrm T}$ 是 $\mathrm R^n$ 的一组基,称 ε_1，$\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 $\mathrm R^n$ 的标准正交基。

例 1.3.1　试证：线性空间

$$\mathrm R[x]_n=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\mid a_i\in\mathrm R\}$$

是 n 维的，并求 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ 在基 $1,x-a,(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1}$ 下的坐标。

证明　先证 $\mathrm R[x]_n$ 中元素

$$1,\ x,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n-1}$$

是线性无关的。设

$$k_0\cdot 1+k_1\cdot x+k_2\cdot x^2+\cdots+k_{n-1}x^{n-1}=0$$

由于 $\mathrm R[x]_n$ 中 x 是变量，所以欲使上式对于任何 x 都成立的充分必要条件是

$$k_0=k_1=\cdots=k_{n-1}=0$$

于是 1，x，x^2，…，x^{n-1} 线性无关。

对于 $\mathrm R[x]_n$ 中任何一个向量（多项式）

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in\mathrm R[x]_n$$

均由 1，x，x^2，…，x^{n-1} 线性表出，这表明 1，x，x^2，…，x^{n-1} 是 $\mathrm R[x]_n$ 的基，于是 $\mathrm R[x]_n$ 是 n 维的。

不难验证：1，$x-a$，$(x-a)^2$，…，$(x-a)^{n-1}$ 也是 $\mathrm R[x]_n$ 的一组基，因为

$$f(x)=(1,(x-a),(x-a)^2,\cdots,(x-a)^{n-1})\begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) \\ \dfrac{f''(a)}{2!} \\ \vdots \\ \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} \end{pmatrix}$$

故坐标为$\left(f(a),f'(a),\dfrac{f''(a)}{2!},\cdots,\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^{\mathrm{T}}$。

例 1.3.2 在 R^4 中，求向量 $\alpha=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,1,0,1)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(2,1,3,1)^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 下的坐标。

解 设 $\alpha=(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 在所给基 α_1、α_2、α_3、α_4 下的坐标为 k_1、k_2、k_3、k_4，故

$$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$$

即

$$(0,0,0,1)^{\mathrm{T}}=k_1(1,1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(2,1,3,1)^{\mathrm{T}}+k_3(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_4(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}$$

于是

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3=0 \\ k_1+k_2+k_3+k_4=0 \\ 3k_2-k_4=0 \\ k_1+k_2-k_4=1 \end{cases}$$

解之得

$$k_1=1,\ k_2=0,\ k_3=-1,\ k_4=0$$

所以 α 在所给基 ε_1，ε_2，ε_3，ε_4 下的坐标为$(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$。

1.3.2 基变换与坐标变换

n（>0）维线性空间的基不是唯一的，一个向量在不同基下的坐标也是不同的，下面建立它们之间的关系。

设 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 与 β_1，β_2，$\cdots$，β_n 是 V 中两组基，它们之间的关系是

$$\begin{aligned}\beta_i &= a_{1i}\alpha_1+a_{2i}\alpha_2+\cdots+a_{ni}\alpha_n \\ &= (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

把这 n 个关系式用矩阵表示可得

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.3.2}$$

称 n 阶方阵

$$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.3.3}$$

是由基 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 到基 β_1，β_2，$\cdots$，β_n 的**过渡矩阵**。式（1.3.2）可以写成

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P \tag{1.3.4}$$

容易证明下述定理。

定理 1.3.1　过渡矩阵 P 是可逆的。

下面建立 V 中任一向量在两组基下坐标间的关系，即导出坐标变换公式。

设 $\xi\in V$，若 ξ 在基 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 与 β_1，β_2，$\cdots$，β_n 下的坐标分别为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$，即若

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

与

$$\xi=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

把式（1.3.4）代入上式右端得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

由于 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 是线性无关的，所以

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1.3.5}$$

或

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.3.6}$$

式（1.3.5）与（1.3.6）称为坐标变换公式。

例 1.3.3 已知三维向量空间 R^3 的两组基 $\alpha_1=(1,2,1)^T$，$\alpha_2=(2,3,3)^T$，$\alpha_3=(3,7,1)^T$；$\beta_1=(3,1,4)^T$，$\beta_2=(5,2,1)^T$，$\beta_3=(1,1,-6)^T$。向量 α 在两组基下的坐标分别为 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 及 $(y_1,y_2,y_3)^T$，求此两坐标之间的关系。

解
$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\tag{1.3.7}$$

$$\alpha=y_1\beta_1+y_2\beta_2+y_3\beta_3=\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\tag{1.3.8}$$

所以
$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

可得 α 在两组基下的坐标关系为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&1\\1&2&1\\4&1&-6\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}13&\frac{74}{4}&\frac{181}{4}\\-9&-13&-\frac{63}{2}\\7&10&\frac{99}{4}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

§1.4 线性子空间

1.4.1 线性子空间概念

定义 1.4.1 设 W 为域 F 上的 n 维线性空间 V 的子集合，若 W 中元素满足

（1）若 $\forall\alpha$，$\beta\in W$，则 $\alpha+\beta\in W$；

（2）$\forall\alpha\in W$，$\lambda\in F$，则 $\lambda\alpha\in W$，

称 W 是线性空间 V 的一个**线性子空间**，简称子空间。

线性子空间本身也是一个线性空间，因此子空间也有维数、基、坐标等概念。

因为子空间 W 中不可能有比 V 更多的线性无关的向量，所以子空间 W 的维数不能超过 V 的维数。即 $\dim W\leqslant\dim V$。

例 1.4.1 在线性空间 V 中，由单个零向量“0”构成的集合是一个线性子空间，称为 V 的零子空间。在线性空间 V 中，V 本身也可看成是一个线性子空间。这两个子空间称为 V 的平凡子空间。而其他的线性子空间称为 V 的非平凡子空间。

设 α_1，α_2，…，α_s 是线性空间 V 的一组向量，则集合
$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\mid\forall k_i\in F\}\tag{1.4.1}$$
是非空集合，不难证明

定理 1.4.1 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是 V 的线性子空间。

定义 1.4.2 称非空子集 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 叫做向量 α_1，α_2，…，α_s **生成的子空间**。

根据向量组的线性极大无关组与秩的概念，显然有下述结论。

定理 1.4.2 $\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\text{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$，其中 $\text{rank}\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$ 是向量

组 α_1, α_2, …, α_s 的秩(即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中线性极大无关组中向量的个数)。向量组 α_1, α_2, …, α_s 的任何一个极大线性无关组是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的一个基。

例 1.4.2 设 $\alpha_1=(1,2,0,-1)^T$, $\alpha_2=(5,8,0,3)^T$, $\alpha_3=(-2,-2,0,-6)^T$。求 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基与维数。

解 不难验证：α_1, α_2 是线性无关的，且

$$\alpha_3=3\alpha_1-\alpha_2$$

所以 α_1, α_2 为 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的基，$\dim L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，显然 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\alpha_1,\alpha_2)$。

1.4.2 子空间的交、和

定义 1.4.3 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的两个子空间，命

$$V_1\cap V_2=\{\alpha \mid \alpha\in V_1 \text{ 且 } \alpha\in V_2\}$$

可以验证：$V_1\cap V_2$ 构成 V 的线性子空间。称 $V_1\cap V_2$ 为 V_1 与 V_2 的**交空间**。

令

$$V_1+V_2=\{\alpha=\alpha_1+\alpha_2 \mid \alpha_1\in V_1 \text{ 且 } \alpha_2\in V_2\}$$

可以验证：V_1+V_2 构成 V 的线性子空间。称 V_1+V_2 为 V_1 与 V_2 的**和空间**。

例 1.4.3 在二维几何空间中，用 V_1 表示过原点与某给定向量共线的向量集合，V_2 表示过原点并与 V_1 垂直的向量集合。则 V_1+V_2 是整个空间，且 $V_1\cap V_2=\{0\}$。

关于两个生成子空间的和空间有下面定理：

定理 1.4.3 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$，则

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$$

定理 1.4.4 （**维数公式**） 设 V_1 与 V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$$\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2) \tag{1.4.2}$$

证明 设 $\dim V_1=n_1$, $\dim V_2=n_2$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$。取 $V_1\cap V_2$ 的一组基

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$$

它可以扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m}$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m}$$

此即

$$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m})$$
$$V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m})$$

所以

$$V_1+V_2=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_1-m},\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n_2-m})$$

设 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}+q_1\gamma_1+\cdots+q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}=0$

命 $\xi=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+p_1\beta_1+\cdots+p_{n_1-m}\beta_{n_1-m}=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}$

由第一个等式知 $\xi\in V_1$，由第二个等式知 $\xi\in V_2$，于是 $\xi\in V_1\cap V_2$，故可令

$$\xi=l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m$$

因此

$$l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m=-q_1\gamma_1-\cdots-q_{n_2-m}\gamma_{n_2-m}$$

即