华大精制 高校教材

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学 下册

（经管类）

主编 尤正书 毛 宇

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学下册

（经管类）

主　编　尤正书　毛　宇
副主编　朱　华

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书紧扣经管类各专业人才培养的目标，遵循高等数学的教学规律，依据高等院校经管类本科专业高等数学课程的教学大纲编写而成，力求贯彻以应用为目标，以够用为原则，以可读性为基点，以创新为导向，适当删减和淡化了传统高等数学体系中的难点，力求做到学完够用，学后会用，学以致用。

本书适合三本院校经管类各专业高等数学课程的教学，还可以作为其他大学和自学考试的教材和参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类. 下册/尤正书，毛宇主编. —武汉：华中师范大学出版社，2015. 1
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-5622-6838-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①尤… ②毛… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 263836 号

高等数学下册
(经管类)
©尤正书 毛 宇 主编

责任编辑：刘丽娟 袁正科 **责任校对**：易 雯 **封面设计**：罗明波
编 辑 室：第二编辑室 **电 话**：027—67867362
出版发行：华中师范大学出版社
社 址：湖北省武汉市珞喻路 152 号 **邮 编**：430079
销售电话：027—67863426/67863280(发行部) 027—67861321(邮购) 027—67863291(传真)
网 址：http://www.ccnupress.com **电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印 刷：仙桃市新华印务有限责任公司 **督 印**：章光琼
开 本：787 mm×1092 mm 1/16 **印 张**：15.25 **字 数**：340 千字
版 次：2015 年 2 月第 1 版 **印 次**：2015 年 2 月第 1 次印刷
印 数：1—3000 **定 价**：28.00 元

前　　言

当前，我国的高等教育改革已进入全面发展阶段，高等教育的分类更加细致，应用型人才的培养已成为高等教育改革的一个重要方向。传统高等数学教材的体系结构、内容、深度、广度等方面已不适应我国高等教育当前的发展形势。近些年来，尽管各具特色的应用型高等数学教材陆续推向市场，且对我国高等教育的良性发展起到了很好的推动作用，但仍不足以适应当前应用型高等教育发展的要求和迅猛形势。

为了适应当前高等教育形势发展的现状，我们针对自身特点，组织了湖北大学知行学院和江汉大学文理学院长期工作在教学一线的相关老师编写了本套经管类高等数学教材，分上、下两册，该本为下册。

编写前，我们对三本院校、独立学院及其他同类院校经管类专业的高数课程设置情况进行了深入地调研，并组织相关人员召开了教材编写研讨会，对编写本套高等数学教材的实际背景、编写体例、编写原则以及想要突出的特色等问题进行了充分地交流和深入细致地探讨，了解并掌握了大量的、有价值的教学信息，为本套教材的编写工作提供了坚实的事实依据。

为便于三本高等院校经管类学生学习高等数学课程和掌握必要的数学工具知识，我们在编写本套教材时，重点在以下几个方面着墨：

1. 在保持高等数学的逻辑严密性、体系完整性的基础上，更强调对基本理论、基本方法和基本公式的应用。

2. 力求突出本套教材的经管类特色，在所有数学内容的表述中，均用实例反映高等数学在经济理论及经济活动中的应用。

3. 每章均配备典型例题解析，这些例题都具有一定的难度，可以帮助学生更全面、更深入地掌握相关数学知识，并提高自身的数学解题能力。

参加本教材编写的老师有：刘俊菊、余跃丰、梁军、朱华、吴海燕、尤正书，其中，刘俊菊负责编写第 6 章，吴海燕负责编写第 7、8 章，朱华负责编写 9、10 章，尤正书负责全书的审稿和统稿工作。此外，钱志强、毛宇老师给本书的编写工作提出了许多宝贵的建议，在此，对他们一并表示感谢！

尽管我们十分努力，但由于水平有限，加之编写时间仓促，书中难免会有诸多不妥之处，欢迎广大师生、读者批评指正。

编　者

2014 年 9 月

目　　录

第 6 章　常微分方程和差分方程简介

在研究自然科学及经济学中某些现象的变化过程时，往往不能直接获得所需要的函数关系，却能获得所需函数与其导数之间的关系，这种关系称为**微分方程**。微分方程广泛应用于经济研究及其他学科研究之中。本章主要介绍微分方程的一些基本概念及常用解法，同时也介绍微分方程在经济学中的简单应用。

6.1　常微分方程的基本概念

我们通过两个具体的问题来说明微分方程的基本概念。

例 1　已知一曲线 $y = f(x)$ 上任一点处的切线斜率为 $3x^2$，且此曲线经过点(1,3)，求此曲线的方程。

解　根据导数的几何意义，得以下方程有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2。\tag{6.1}$$

此外，未知函数还应满足以下条件：

$$x = 1 \text{ 时}, y = 3。\tag{6.2}$$

要找出满足这两个等式的曲线，把式(6.1)两端积分，得

$$y = x^3 + C,\tag{6.3}$$

此处 C 是任意常数。

再用条件(6.2)代入得 $3 = 1 + C$，故 $C = 2$，即所求曲线方程为

$$y = x^3 + 2。\tag{6.4}$$

例 2　已知商品的需求弹性 $e = k$（$k > 0$ 为常数），P 是商品价格，求商品的需求函数 $D = f(P)$。

解　根据需求弹性的定义

$$e = -\frac{P}{D} \cdot \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P},$$

可得

$$k = -\frac{P}{D} \cdot \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P},$$

变形得

$$\frac{\mathrm{d}D}{D} = -k\frac{\mathrm{d}P}{P},$$

两边积分得

$$\ln D = -k\ln P + \ln C,\quad \ln D = \ln CP^{-k},$$

故需求函数为

$$D = C \cdot P^{-k}。\tag{6.5}$$

关系式(6.1)和(6.5)中都含有未知函数的导数,它们都是微分方程。一般的,可以归纳得到以下有关微分方程的重要概念:

定义 6.1 含有未知函数的导数或微分,同时也可能含有未知函数和自变量的方程称为**微分方程**。在微分方程里,如果未知函数只与一个自变量有关,此方程称为**常微分方程**。如果未知函数与两个以上的自变量有关,此方程就称为**偏微分方程**。

这里只介绍常微分方程,所以以后凡不特别说明,常微分方程就简称为微分方程或方程。

例如,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x^2,$$

$$y''' + 3y'' + y = 0,$$

$$3x^2 dy - 2y dx = 0$$

都是常微分方程。

定义 6.2 在微分方程里,未知函数的导数或微分的最高阶数,称为**微分方程的阶**。

上面的前三个方程分别是一阶、二阶和三阶的,最后一个方程是一阶的。n 阶微分方程的一般形式可以写为

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0\ (y\text{ 是未知函数},x\text{ 是自变量})。$$

通过例1、例2可以看出,在建立一个微分方程的过程中,即找出自变量、未知函数、未知函数的导数之间的关系式时,往往会同时出现这些量之间需要满足的伴随条件,将这些条件称为**初始条件**,通常初始条件与微分方程放在一起用以下形式表达:

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}。 \end{cases}$$

由上述两例可以看到找满足方程的函数需要积分,进而出现任意常数,而初始条件就是用以确定函数中所含任意常数的。

定义 6.3 若一个函数代入微分方程后,能使方程成恒等式,这样的函数就称为**微分方程的解**,求微分方程解的过程称为**解微分方程**。如果在微分方程的解中含有任意常数,且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,那么这样的解称为**微分方程的通解**,也

称通积分。

上述两例中的(6.3)和(6.5)都是通解。在通解中利用初始条件确定了任意常数的数值代入通解后所得到的解称为**微分方程的特解**。

习题 6.1

1. 试简述常微分方程的概念及其分类。

2. 试简述常微分方程的解的类型及初始条件的作用。

3. $y''-3y'+3y=0$ 和 $y^2-3y+3=0$ 哪个是微分方程，哪个不是？

4. 验证给出的函数是否为下列方程的解，如果是，它是通解还是特解？

(1) $y=3\sin x-4\cos x$，　$y''+y=0$；

(2) $y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数，　$y''+\omega^2 y=0$。

6.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0。$$

一阶微分方程的通解一般都含有一个任意常数，要求出它的特解，也就是要确定这个任意常数，这时必须给出一个初始条件，我们通常是给出 $x=x_0$ 时未知函数的对应值 $y=y_0$，记作

$$y(x_0)=y_0 \text{ 或 } y\big|_{x=x_0}=y_0。$$

一阶微分方程形式很多，要根据方程的特点求解。

6.2.1　可分离变量的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y) \tag{6.6}$$

的一阶微分方程称为**可分离变量方程**。

上述方程的特点是方程右端为只含 x 的函数与只含 y 的函数的积。

形如

$$\varphi(x)\mathrm{d}x=\psi(y)\mathrm{d}y \tag{6.7}$$

的一阶微分方程称为**变量已分离方程**。

对变量已分离方程(6.7)的两边同时积分得

$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\psi(y)\mathrm{d}y。$$

若 $\varphi(x)$ 的原函数是 $\Phi(x)$，$\psi(y)$ 的原函数是 $\Psi(y)$，那么 $\Phi(x)=\Psi(y)+C$ 就是变量已分离方程(6.7)的通解，尽管这个通解的表达式可能是隐函数形式。

对可分离变量方程(6.6)，只要 $g(y)$ 恒不为零，将方程两边同时除以 $g(y)$，再同时乘

以 $\mathrm{d}x$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x。$$

这就是变量已分离方程，只需对两边同时积分即可。我们把这种求解可分离变量方程的方法称为**分离变量法**。

例 1　求微分方程 $xy^2\mathrm{d}x + (1+x^2)\mathrm{d}y = 0$ 的通解。

解　原方程可变为

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}y}{y^2} \quad (y \neq 0),$$

两边积分得

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int -\frac{\mathrm{d}y}{y^2},$$

于是有

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2} = \frac{1}{y} + C, \text{或 } y\ln[C(1+x^2)] = 2$$

即为方程的通解（这里不一定非要解出 y 的显式）。

例 2　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$ 的通解。

解　分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\mathrm{d}x,$$

于是有

$$\ln|y| = x^2 + C_1,\ |y| = \mathrm{e}^{x^2+C_1},\ y = \pm\,\mathrm{e}^{x^2+C_1}。$$

令 $C = \pm\,\mathrm{e}^{C_1}$，那么 $y = C\mathrm{e}^{x^2}$（由于 $C=0$ 时，$y=0$ 也是方程的解，故 C 为任意常数）就是方程的通解。

例 3　（Logistic 曲线）在商品销售预测中，销售量 x 是时间 t 的函数，如果商品销售量的增长速度成正比销售量 x 与销售接近饱和水平的程度 $(B - x(t))$ 的乘积（B 为饱和水平），求销售函数 $x(t)$。

解　根据题意，可建立微分方程

$$x'(t) = kx(B-x),$$

其中 k 为比例系数，这是个变量可分离方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(B-x)} = k\cdot\mathrm{d}t,$$

两边积分得

$$\frac{1}{B}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{B-x}\right)\mathrm{d}x=\int k\mathrm{d}t,$$

$$\frac{1}{B}\ln\left|\frac{x}{B-x}\right|=\int k\mathrm{d}t+C,$$

$$\frac{x}{B-x}=C\mathrm{e}^{Bkt},$$

解得

$$x(t)=\frac{BC\mathrm{e}^{Bkt}}{1+C\mathrm{e}^{Bkt}},$$

可以预测，随着时间的推移，销售量将趋于饱和水平，于是

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{BC\mathrm{e}^{Bkt}}{1+C\mathrm{e}^{Bkt}}=B。$$

特别提示　总结上述解法，我们将分离变量法的步骤分解为：

(1) 对可分离变量方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$分离变量成已分离变量方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x。$$

(2) 两边同时积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x。$$

(3) 求出积分得通解

$$G(y)=F(x)+C,$$

这里

$$G'(y)=\frac{1}{g(y)},F'(x)=f(x)。$$

(4) 如果有初始条件，将其代入通解，求出常数 C。

6.2.2　齐次方程

1. 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g\left(\frac{y}{x}\right)\tag{6.8}$$

的方程称为**齐次方程**。

解此类方程可以作变换 $y=xz$，再两边对 x 求导得 $y'=z+xz'$，代入齐次方程(6.8)，移项后得

$$xz'=g(z)-z,$$

再分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}z}{g(z)-z}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两边积分得

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{g(z)-z}=\int \frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|-\ln|C|=\ln\left|\frac{x}{C}\right|。$$

变形得

$$x=C\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}z}{g(z)-z}}\quad(C\neq 0)。$$

积分后再将 $z=\dfrac{y}{x}$ 回代即可得通解。

例 4　求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{2y}$。

解　这是齐次微分方程，作变换 $y=xz$，则 $y'=z+xz'$，代入原方程得

$$z+xz'=z+\frac{1}{2z},$$

分离变量得

$$2z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}x}{x}。$$

积分得

$$z^2=\ln|x|+\ln|C|,$$

将 $z=\dfrac{y}{x}$ 回代上式得通解为

$$y^2=x^2\ln|Cx|\ (C\neq 0)。$$

例 5　已经生产某种产品的总成本 C 由可变成本与固定成本两部分构成，假设可变成本 y 是产量 x 的函数，且 y 关于 x 的变化率等于产量平方与可变成本平方之和 (x^2+y^2) 除以产量与可变成本之积的 2 倍 $(2xy)$；固定成本为 1；当 $x=1$ 时，$y=3$，求总成本函数。

解　总成本函数 $C(x)=1+y(x)$，依题意有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2+y^2}{2xy},$$

此方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}。$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\tag{6.9}$$

将 y 及$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$代入齐次微分方程式(6.9)后分离变量得

$$-\frac{2\mathrm{u}}{1-u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\ln(1-u^2)=-\ln x+\ln c, \tag{6.10}$$

整理得

$$x(1-u^2)=c,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代回式(6.10)，得通解为

$$y=\sqrt{x^2-cx}, \tag{6.11}$$

即可变成本　$y\geqslant 0$。

故式(6.11)根号前取正号，当 $x=1$ 时 $y=3$，可得 $c=-8$，于是可变成本为

$$y=\sqrt{x^2+8x},$$

故总成本函数为

$$C(x)=1+\sqrt{x^2+8x}。$$

2. 可化为齐次方程的微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}, \tag{6.12}$$

(a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 为常数，其中 c_1,c_2 不全为 0) 的方程，经过适当的变换可以化为齐次方程。

(1) 如果 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\lambda$，即 $a_1=\lambda a_2, b_1=\lambda b_2$，则方程(6.12)可以化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\lambda(a_2x+b_2y)+c_1}{(a_2x+b_2y)+c_2}, \tag{6.13}$$

令 $z=a_2x+b_2y$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

将上述两式代入方程(6.13)得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\frac{\lambda z+c_1}{z+c_2},$$

这是一个可分离变量方程，解出 z 后再用 $z=a_2x+b_2y$ 回代。

(2) 如果 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$，作变换 $\begin{cases}x=u+h,\\ y=v+k,\end{cases}$ 其中，h,k 是待定的常数。

由 $\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{d}u,\\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}v\end{cases}$ 知 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，方程(6.12)化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{a_1u+b_1v+a_1h+b_1k+c_1}{a_2u+b_2v+a_2h+b_2k+c_2}, \tag{6.14}$$

为使方程(6.14)成齐次微分方程，可令

$$\begin{cases}a_1h+b_1k+c_1=0,\\ a_2h+b_2k+c_2=0。\end{cases}$$

由于$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$，两条直线相交于一点，从中一定能解出唯一的 h,k，那么方程(6.14)变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{a_1 u + b_1 v}{a_2 u + b_2 v},$$

这是一个齐次微分方程，再按齐次微分方程的解法求出通解，最后将 $u = x - h, v = y - k$ 回代可得原方程的通解。

例 6　求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y - 1}$。

解　令 $x + 2y = z$，两边同时对 x 求导得 $1 + 2y' = z'$，代入方程得

$$y' = \frac{z' - 1}{2} = \frac{z + 1}{2z - 1},$$

化简为

$$z' = \frac{4z + 1}{2z - 1},$$

分离变量得

$$\frac{(2z - 1)\mathrm{d}z}{4z + 1} = \mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$z - \frac{3}{4}\ln|4z + 1| = 2x + C_1,$$

代回原变量并移项，得

$$\frac{8y}{3} - \frac{4x}{3} = \ln|C(4x + 8y + 1)|,$$

即通解为

$$C^3(4x + 8y + 1)^3 = \mathrm{e}^{4(2y-x)}\,(C \neq 0)。$$

例 7　求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x + y - 1}{x - y + 1}$。

解　令$\begin{cases} x = u + h, \\ y = v + k, \end{cases}$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{(u + v) + (h + k - 1)}{(u - v) + (h - k + 1)},$$

由$\begin{cases} h - k + 1 = 0, \\ h + k - 1 = 0, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} h = 0, \\ k = 1。\end{cases}$

再解$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{u + v}{u - v}$，这是齐次方程，令 $v = uz, v'_u = z + uz'_u$，代入方程后为

$$z + uz'_u = \frac{1 + z}{1 - z},$$

移项、化简得

$$uz'_u=\frac{1+z}{1-z}-z=\frac{1+z^2}{1-z},$$

分离变量得

$$\frac{(1-z)\mathrm{d}z}{1+z^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

两边积分得

$$\arctan z-\frac{\ln(1+z^2)}{2}=\ln|Cu|,$$

代回原变量得通解为

$$\arctan\frac{y-1}{x}-\frac{\ln\left[1+\frac{(y-1)^2}{x^2}\right]}{2}=\ln|Cx|\ (C\neq 0)。$$

6.2.3　一阶线性微分方程

形如

$$y'+p(x)y=q(x) \tag{6.15}$$

的一阶方程称为**一阶线性微分方程**。

上述方程是关于 y 和 y' 的一次方程,因而称为线性微分方程。

在式(6.15)中,如果 $q(x)\equiv 0$,则方程

$$y'+p(x)y=0 \tag{6.16}$$

称为**一阶线性齐次方程**(这不是上节所说的齐次微分方程)。

当 $q(x)$ 不恒为 0 时,方程(6.15)就称为**一阶线性非齐次微分方程**。

先求一阶线性齐次微分方程(6.16)的解。

移项得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-p(x)y,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x,$$

积分得

$$\ln|y|=-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

$$|y|=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x+C_1},$$

$$y=\pm\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}。$$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$,又由于 $y=0$ 也是线性齐次微分方程(6.16)的解,所以方程(6.16)的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},$$