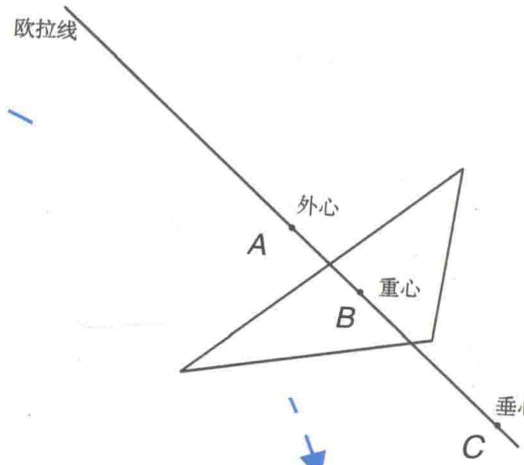
QIDONGZHONGXUEAOSAIJINGTIXIANGJIE

丛书主编：王　生
本册主编：曹瑞彬



$AB=\frac{1}{2}BC$

启东中学奥赛精题详解

高中数学

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

启东中学

QIDONGZHONGXUEAOSAIJINGTIXIANGJIE

奥赛 精题详解

高 中 数 学

主 编 曹瑞彬
作 者 王晓东 沈蒋峰
顾卫海 曹瑞彬

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛精题详解．高中数学 / 曹瑞彬主编
．—4版．—南京：南京师范大学出版社，2013.5
ISBN 978-7-5651-1206-5

Ⅰ．①启…　Ⅱ．①曹…　Ⅲ．①中学数学课—高中—题解　Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第007152号

书　　名	启东中学奥赛精题详解(高中数学)
主　　编	曹瑞彬
责任编辑	孙　涛
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路122号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598919(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://www.njnup.com
电子信箱	nspzbb@163.com
印　　刷	南京新洲印刷有限公司
开　　本	787毫米×1092毫米　1/16
印　　张	15.5
字　　数	377千
版　　次	2013年5月第4版　2013年5月第1次印刷
书　　号	978-7-5651-1206-5
定　　价	32.00元

曹瑞彬 男，1962 年 11 月出生，1983 年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，江苏省数学特级教师，数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学奥赛中心副主任，全国教育系统模范教师，全国中小学优秀班主任。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作，近年来培养了一大批数学尖子，其中有 100 多人获得全国数学联赛一等奖，10 多位同学入选国家冬令营，7 位同学进入国家集训队，其中陈建鑫同学获第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌。任班主任所送的 2003 届高三(1)班有 20 位同学考入清华、北大，还有 20 位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》、《向 45 分钟要效益》、《大学自主招生真题汇编与训练・数学》等数十本教辅用书，在《中学数学》、《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年"世界第一才女"毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力同学获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺同学获第38届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,并被授予"全国优秀共青团员"称号;2012年李天然同学获第44届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为"奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地"。

"启东中学现象"自然也成为出版界瞩目的焦点,与"黄冈"一样,"启东"很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩,应该说,建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映,如《向45分钟要效益》、《特级教师优化设计》、《奥林匹克竞赛指导》、《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行,是我社依托名校名师,实施"名品"战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步,是我社与启东中学多年合作的结果,倚天时地利人和的优势,水到而渠成。

迈开这一步,是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社"理念教辅"、"名品教辅"的关心与厚爱以及他们的需求,已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础,根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写,将竞赛与升学结合起来,尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养,由浅入深,循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《启东中学奥赛训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答,方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士,各分册的主编均是启东中学金牌教练,参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作,有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力,领略启东中学的风采,解读启东中学的奥秘,欣赏启东中学的智慧,分享启东中学的成功!

南京师范大学出版社

目　录

第一章　集　合

第一节　集合的概念与运算 …………………………………………………… (1)
第二节　有限集合的元素个数 ………………………………………………… (4)
第三节　子集的性质……………………………………………………………… (7)
第四节　综合题解………………………………………………………………… (10)

第二章　函　数

第一节　函数概念………………………………………………………………… (14)
第二节　函数的性质与图象 …………………………………………………… (17)
第三节　二次函数、幂函数、指数函数与对数函数 ………………………… (23)
第四节　函数的最大值与最小值 ……………………………………………… (29)
第五节　函数方程与迭代 ……………………………………………………… (34)

第三章　数　列

第一节　等差数列与等比数列 ………………………………………………… (39)
第二节　数列的和与通项 ……………………………………………………… (42)
第三节　递归数列………………………………………………………………… (48)
第四节　综合题解………………………………………………………………… (52)

第四章　数学归纳法

第一节　数学归纳法的基本形式 ……………………………………………… (57)
第二节　数学归纳法的其他几种形式 ………………………………………… (59)
第三节　归纳猜想与归纳构造 ………………………………………………… (61)
第四节　综合题解………………………………………………………………… (64)

第五章　三角函数

第一节　三角函数的性质 …………………………………………………… (71)
第二节　三角函数的恒等变形 ………………………………………………… (73)
第三节　三角不等式与三角极值 ……………………………………………… (77)
第四节　反三角函数及三角方程 ……………………………………………… (79)
第五节　综合题解 ……………………………………………………………… (82)

第六章　向　量

第一节　向量的概念及运算…………………………………………………… (86)
第二节　向量的应用 …………………………………………………………… (88)

第七章　不等式

第一节　不等式的解法 ………………………………………………………… (92)
第二节　证明不等式的常用方法 ……………………………………………… (95)
第三节　重要不等式 …………………………………………………………… (100)
第四节　不等式的综合应用…………………………………………………… (105)
第五节　综合题解 ……………………………………………………………… (107)

第八章　解析几何

第一节　直线与圆 ……………………………………………………………… (115)
第二节　圆锥曲线 ……………………………………………………………… (120)
第三节　轨迹与解析几何中的不等式 ………………………………………… (125)
第四节　综合题解 ……………………………………………………………… (129)

第九章　立体几何

第一节　直线与平面的位置关系 ……………………………………………… (134)
第二节　空间角与距离 ………………………………………………………… (138)
第三节　多面体与转体 ………………………………………………………… (141)
第四节　球……………………………………………………………………… (146)
第五节　综合题解 ……………………………………………………………… (150)

第十章　平面几何

第一节　平面几何中的几个重要定理 …………………………………………（157）
第二节　三角形的五心 ……………………………………………………（160）
第三节　面积法与等积变换……………………………………………………（163）
第四节　平面几何中的常用证题方法 …………………………………………（167）
第五节　综合题解 ……………………………………………………………（169）

第十一章　排列组合与二项式定理

第一节　计数原理 ……………………………………………………………（174）
第二节　排列组合 ……………………………………………………………（176）
第三节　二项式定理 …………………………………………………………（179）
第四节　综合题解 ……………………………………………………………（182）

第十二章　复　数

第一节　复数的概念与运算……………………………………………………（185）
第二节　复数与三角 …………………………………………………………（191）
第三节　复数与几何 …………………………………………………………（196）
第四节　综合题解 ……………………………………………………………（200）

第十三章　极限与导数

第一节　极限 …………………………………………………………………（205）
第二节　导数与函数的性质……………………………………………………（208）
第三节　导数与函数的最值……………………………………………………（211）
第四节　综合题解 ……………………………………………………………（213）

第十四章　排列组合和概率

……………………………………………………（218）

第十五章　数论初步

第一节　整数与数的整除性……………………………………………………（221）

第二节　同余及其应用 …………………………………………………………… (223)
第三节　不定方程 ……………………………………………………………… (225)
第四节　综合题解 ……………………………………………………………… (227)

第十六章　多项式

第一节　多项式的概念 …………………………………………………………… (230)
第二节　多项式的根与韦达定理 …………………………………………………… (232)
第三节　多项式的插值与差分 ……………………………………………………… (234)
第四节　综合题解 ……………………………………………………………… (237)

第一章　集　　合

第一节　集合的概念与运算

一、填空题

1. 若非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，则能使 $A\subseteq A\cap B$ 成立的所有 a 的集合是________.

解析　$\because A\cap B\subseteq A$，又 $A\subseteq A\cap B$，$\therefore A=A\cap B$. $\therefore A\subseteq B$.

$$\therefore \begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\ 3a-5\leqslant 22,\\ 2a+1\leqslant 3a-5.\end{cases}\Rightarrow 6\leqslant a\leqslant 9.$$

2. 设全集是实数集，若集合 $A=\{x\mid \sqrt{x-2}\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid 10^{x^2-2}=10^x\}$，则 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=$________.

解析　由 $\sqrt{x-2}\leqslant 0$，得 $x=2$，故 $A=\{2\}$.

由 $10^{x^2-2}=10^x$，得 $x^2-x-2=0$，故 $B=\{-1,2\}$.

$\therefore A\cap \complement_{\mathbf{R}}B=\varnothing$.

3. 已知 a 为给定的实数，那么集合 $M=\{x\mid x^2-3x-a^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$ 的子集的个数为________.

解析　$\because \Delta=9-4(2-a^2)=1+4a^2>0$，$\therefore M$ 恒有 2 个元素，

$\therefore M$ 子集的个数为 $2^2=4$.

4. 若集合 $M=\{(x,y)\mid |\tan\pi y|+\sin^2\pi x=0\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2\}$，则 $M\cap N$ 的元素个数是________.

解析　由非负数的和为零，得 $\begin{cases}\tan\pi y=0,\\ \sin\pi x=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=k(k\in\mathbf{Z}),\\ y=h(h\in\mathbf{Z}),\end{cases}$ 即集合 M 为坐标平面上整点的全体.

又由 $x^2+y^2\leqslant 2=(\sqrt{2})^2$，得集合 N 为以原点为中心、$\sqrt{2}$ 为半径的闭圆内点所组成的点集. 可用画图来表明，闭圆内部共有 9 个整点 .

5. 设集合 $M=\{-1,0,1\}$，$N=\{2,3,4,5,6\}$，映射 $f:M\to N$，则对任意的 $x\in M$，使得 $x+f(x)+xf(x)$ 恒为奇数的映射 f 的个数为________.

解析　令 $y=x+f(x)+xf(x)$.

显然，当 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 取定，则 $f(x)$ 随之确定.

当 $x=-1$ 时，$y=x+f(x)-f(x)=x=-1$，y 恒为奇数，故 $f(-1)$ 有 5 种选择；

当 $x=0$ 时，$y=f(0)$，$f(0)$仅能为 3 和 5，有 2 种选择；

当 $x=1$ 时，$y=1+2f(x)$，因 $f(x)$是正整数，y 恒为奇数，故$f(1)$有 5 种选择.

∴由乘法原理知，使 y 恒为奇数的映射 f 共有 $5\times2\times5=50$(种).

6. 设集合 $M=\{1,2,\cdots,1\ 000\}$. 现对 M 的任一非空子集 X，令 a_x 表示 X 中最大数与最小值之和，那么，所有这样的 a_x 的算术平均值为________.

解析 将 M 中非空子集进行配对，对每个非空子集 $X\subset M$，令 $X'=\{1\ 001-x\mid x\in X\}$，则当 X_1 也是 M 的非空子集，且 $X\neq X_1$ 时，有 $X'\neq X_1'$，于是所有非空子集除$\{1,2,\cdots,1\ 000\}$以外分为两类：(1) $X'\neq X$；(2) $X'=X$.

对于(2)中的 X，必有 $a_x=1\ 001$.

对于(1)中的一对 X 与 X'，有 $a_x+a_{x'}=1\ 001\times2=2\ 002$.

由此可见所有 a_x 的算术平均值为 1 001.

7. 若集合 M 中的元素是连续自然数，$\text{card}(M)\geqslant2$，且 M 中元素之和为 1 996，那么这样的集合 M 共有______个.

解析 设 $M=\{a,a+1,\cdots,a+n-1\}$.

由于$\dfrac{a+a+n-1}{2}n=1\ 996$，有 $n(2a+n-1)=8\times499$.

又 n 与 $2a+n-1$ 有不同的奇偶性，且 $n<2a+n-1$，499 为质数，只能是 $n=8$，解得 $a=246$. 故 M 只有 1 个.

8. 点集$\left\{(x,y)\ \middle|\ \lg\left(x^3+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\right\}$中元素的个数为________.

解析 $\lg\left(x^3+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{9}\right)=\lg x+\lg y\Leftrightarrow x^3+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{9}=xy,x>0,y>0.$

由均值不等式得 $x^3+\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{1}{9}\geqslant3\sqrt[3]{x^3\cdot\dfrac{1}{3}y^3\cdot\dfrac{1}{9}}=xy.$

当且仅当 $x^3=\dfrac{1}{3}y^3=\dfrac{1}{9}$，即 $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$，$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$时上式等号成立. 故元素个数为 1.

9. 集合 $S=\{1,2,3,\cdots,18\}$的五元子集 $S_5=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$中，任何两个元素之差不为 1，这样的子集 S_5 的个数共有________个.

解析 作子集 $S_5'=\{a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4\}$，则 S_5'与 S_5 一一对应，而 S_5'是$\{1,2,\cdots,14\}$的五元子集，有 $C_{14}^5=2\ 002$(个).

10. 已知 $A=\{x\mid x^2-4x+3<0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 2^{1-x}+a\leqslant0,x^2-2(a+7)x+5\leqslant0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

解析 易得 $A=(1,3)$.

设 $f(x)=2^{1-x}+a$，$g(x)=x^2-2(a+7)x+5$.

要使 $A\subseteq B$，只需 $f(x)$，$g(x)$在(1,3)上的图象均在 x 轴下方，其充要条件是：同时有 $f(1)\leqslant0$，$f(3)\leqslant0$，$g(1)\leqslant0$，$g(3)\leqslant0$ 成立. 由此推出$-4\leqslant a\leqslant-1$.

11. 已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{2x-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=k(x+1)\}$，当 $M\cap N\neq\varnothing$时，k 的取值范围是________.

解析 $M\cap N\neq\varnothing$不仅要求 $\Delta\geqslant0$ 还要求根在$[0,2]$之间，等价于方程 $k(x+1)=$

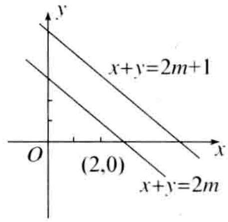
$\sqrt{2x-x^2}$, $k\geqslant 0$ 有实数解. 显然 $0\leqslant x\leqslant 2$, 两边平方并整理, 有 $(k^2+1)x^2+2(k^2-1)x+k^2=0$. x 有实数解, 则 $\Delta=4(k^2-1)^2-4k^2(k^2+1)\geqslant 0$.

解得 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $k\geqslant 0$, $\therefore k$ 的取值范围是 $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

12. 设集合 $A=\left\{(x,y)\left|\dfrac{m}{2}\leqslant(x-2)^2+y^2\leqslant m^2, x,y\in\mathbf{R}\right.\right\}$, $B=\{(x,y)\mid 2m\leqslant x+y\leqslant 2m+1, x,y\in\mathbf{R}\}$, 若 $A\cap B\neq\varnothing$, 则实数 m 的取值范围是________.

解析 首先, $\because A\cap B\neq\varnothing$, $\therefore A\neq\varnothing$, $\therefore \dfrac{m}{2}\leqslant m^2$, 即 $m\geqslant\dfrac{1}{2}$, 或 $m\leqslant 0$.

其次, 考虑点 $(2,0)$ 与两平行线 $x+y=2m$, $x+y=2m+1$ 的位置关系:



(第 12 题)

(1) 如图, 若点 $(2,0)$ 在直线 $x+y=2m$ 下方, 则要使 $A\cap B\neq\varnothing$, 点 $(2,0)$ 到直线 $x+y=2m$ 的距离不大于 $|m|$.

即 $\begin{cases}2<2m,\\ \dfrac{2m-2}{\sqrt{2}}\leqslant|m|.\end{cases}$ 解之得: $1<m\leqslant 2+\sqrt{2}$.

(2) 若点 $(2,0)$ 在直线 $x+y=2m$, 与 $x+y=2m+1$ 之间, 则 $A\cap B\neq\varnothing$, 即 $\begin{cases}2\geqslant 2m,\\ 2\leqslant 2m+1.\end{cases}$ 解之得: $\dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant 1$.

(3) 若点 $(2,0)$ 在直线 $x+y=2m+1$ 上方, 则要使 $A\cap B\neq\varnothing$, 点 $(2,0)$ 到直线 $x+y=2m+1$ 的距离不大于 $|m|$.

即 $\begin{cases}2>2m+1,\\ \dfrac{2-2m-1}{\sqrt{2}}\leqslant|m|,\\ m\leqslant 0.\end{cases}$ 此时 m 解集为 $\varnothing$.

故 $m\in\left[\dfrac{1}{2},2+\sqrt{2}\right]$.

二、解答题

13. 设集合 $M=\{u\mid u=12m+8n+4l, m,n,l\in\mathbf{Z}\}$, $N=\{v\mid v=20p+16q+12r, p,q,r\in\mathbf{Z}\}$. 求证: $M=N$.

证明 若 $u\in M$, 则存在 $m,n,l\in\mathbf{Z}$, 使得 $u=12m+8n+4l=20n+16l+12(m-n-l)\in N$. 从而 $M\subseteq N$. ①

若 $v\in N$, 则存在 $p,q,r\in\mathbf{Z}$, 使得 $v=20p+16q+12r=12r+8(2q)+4(5p)\in M$. 从而 $N\subseteq M$. ②

由①②得 $M=N$.

14. 已知集合 $A=\{x,xy,\lg(xy)\}$, $B=\{0,|x|,y\}$, 若 $A=B$, 则 $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2\,003}+\dfrac{1}{y^{2\,003}}\right)$ 的值是多少?

解析 求值归结于求出 x,y,而这有两个未知数,需从 $A=B$ 中导出两个独立的等量关系,如两个集合的元素之和、之积分别相等.即

$$\begin{cases}x+xy+\lg(xy)=|x|+y,\\ x\cdot xy\cdot\lg(xy)=0.\end{cases}$$

这个方程组解起来比较复杂,如果注意到集合 B 中含有元素 0,从它出发,逐一讨论便可确定 x,y 的值.

根据元素的互异性,由 B 知 $x\neq0,y\neq0$.

$\because$ $0\in B$,且 $A=B$,$\therefore$ $0\in A$,故只有 $\lg(xy)=0$,从而 $xy=1$.

又由 $1\in A$ 及 $A=B$,得 $1\in B$,

$\therefore$有$\begin{cases}xy=1,\\|x|=1\end{cases}$或$\begin{cases}xy=1,\\y=1.\end{cases}$其中 $x=y=1$ 与元素互异性矛盾,$\therefore$ $x=y=-1$,

$\therefore$ $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)+\cdots+\left(x^{2003}+\dfrac{1}{y^{2003}}\right)=-2+2-2+\cdots+2-2=-2.$

15. 以某些整数为元素的集合 P 具有下列性质:① P 中的元素有正数,有负数;② P 中的元素有奇数,有偶数;③ $-1\notin P$;④ 若 $x,y\in P$,则 $x+y\in P$. 试证明:

(1) $0\in P$;

(2) $2\notin P$.

解析 (1) 设存在正整数 m 与负整数 n,且 $m,n\in P$,则

$m\cdot n\in P$,$(-n)\cdot m\in P$,$0=m\cdot n-m\cdot n\in P$.

(2)(反证法)若 $2\in P$,则 P 中的负数全为偶数;不然的话,存在奇数 $-2k-1\in P$,$k\in\mathbf{N}$. 但 $-1=(-2k-1)+2\cdot k\in P$ 与③矛盾.

由②必有正奇数 $2n-1\in P$,负偶数 $-2m\in P$,$m,n\in\mathbf{N}$.

取 K,使 $K\cdot|-2m|>2n-1$,

则负奇数 $-2m\cdot K+(2n-1)\in P$ 矛盾. 故 $2\notin P$.

第二节 有限集合的元素个数

一、填空题

1. 对某班 30 个学生进行调查,结果如下:19 人喜欢数学,17 人喜欢物理,11 人喜欢化学,12 人喜欢数学和物理,7 人喜欢物理和化学,5 人喜欢化学和数学,2 人喜欢数学、物理和化学,则对数学、物理、化学都不喜欢的人数为________.

解析 (利用容斥原理 2)设 $A_1=\{$喜欢数学的人$\}$,$A_2=\{$喜欢物理的人$\}$,$A_3=\{$喜欢化学的人$\}$,I 为全集,则

$\mathrm{card}[\complement_I(A_1\cap A_2\cap A_3)]=\mathrm{card}(I)-\mathrm{card}(A_1)-\mathrm{card}(A_2)-\mathrm{card}(A_3)+\mathrm{card}(A_1\cap A_2)+\mathrm{card}(A_2\cap A_3)+\mathrm{card}(A_1\cap A_3)-\mathrm{card}(A_1\cap A_2\cap A_3)=30-(19+17+11)+12+7+5-2=5.$

2. 在不大于 600 的正整数中,至少可被 3,5,7 之一整除的个数为________.

解析 设 $S=\{1,2,3,\cdots,600\}$,A_3,A_5,A_7 分别表示 S 中的 3,5,7 的倍数集. 则

$\mathrm{card}(A_3\cup A_5\cup A_7)=\mathrm{card}(A_3)+\mathrm{card}(A_5)+\mathrm{card}(A_7)-\mathrm{card}(A_3\cap A_5)-\mathrm{card}(A_5\cap$

$A_7)-\text{card}(A_3\cap A_7)+\text{card}(A_3\cap A_5\cap A_7)=\left[\frac{600}{3}\right]+\left[\frac{600}{5}\right]+\left[\frac{600}{7}\right]-\left[\frac{600}{3\times5}\right]-\left[\frac{600}{3\times7}\right]-\left[\frac{600}{5\times7}\right]+\left[\frac{600}{3\times5\times7}\right]=200+120+85-40-17-28+5=325.$

3. 1 到 300 的整数中，与 2，3，5 都互质的整数的个数为________.

解析 设 $S=\{1,2,3,\cdots,300\}$. A_2,A_3,A_5 分别表示 S 中的 2，3，5 的倍数集. $\text{card}[\complement_S(A_2\cap A_3\cap A_5)]=\text{card}(S)-\text{card}(A_3)-\text{card}(A_5)-\text{card}(A_2)+\text{card}(A_2\cap A_3)+\text{card}(A_3\cap A_5)+\text{card}(A_2\cap A_5)-\text{card}(A_2\cap A_3\cap A_5)=300-\left[\frac{300}{3}\right]-\left[\frac{300}{5}\right]-\left[\frac{300}{2}\right]+\left[\frac{300}{2\times3}\right]+\left[\frac{300}{3\times5}\right]+\left[\frac{300}{2\times5}\right]-\left[\frac{300}{2\times3\times5}\right]=300-100-60-150+50+20+30-10=80.$

4. 集合 A,B 的并集 $A\cup B=\{a_1,a_2,a_3\}$，当 $A\neq B$ 时，(A,B) 与 (B,A) 视为不同的对，则这样的 (A,B) 对的个数有________个.

解析 若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，则满足题意的 B 有：

$\varnothing,\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_1,a_2\},\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\},\{a_1,a_2,a_3\}$，

即这样的配对个数为：$C_3^3(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)=8.$

依此，若 $A=\{a_1,a_2\}$（或 $\{a_1,a_3\}$ 或 $\{a_2,a_3\}$），则

满足题意的 B 的个数，即配对个数为：$C_3^2(C_2^0+C_2^1+C_2^2)=12.$

于是，全部配对个数为：$C_3^3(C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3)+C_3^2(C_2^0+C_2^1+C_2^2)+C_3^1(C_1^0+C_1^1)+C_3^0C_0^0=27.$

5. 设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1\ 995\}$，$A$ 是 M 的子集且满足条件：当 $x\in A$ 时，$15x\notin A$，则 A 中元素的个数最多是______.

解析 由于 $1\ 995=15\times133$，所以只要 $n\geqslant133$，就有 $15n\geqslant1\ 995$. 故取出所有大于 133 而不超过 1995 的整数. 由于这时已取出了 $15\times9=135,\cdots,15\times133=1\ 995$，故 9 至 133 的整数都不能再取. 还可取 1 至 8 这 8 个数，即共取出 $1\ 995-133+8=1\ 870$（个）数，这说明所求数 $\geqslant1\ 870$.

另一方面，把 k 与 $15k$ 配对（k 不是 15 的倍数，且 $1\leqslant k\leqslant133$），共得 $133-8=125$（对），每对数中至多能取 1 个数为 A 的元素，这说明所求数 $\leqslant1870$.

6. 设 $A=\{n\mid100\leqslant n\leqslant600,n\in\mathbf{N}\}$，则集合 A 中被 7 除余 2 且不能被 57 整除的整数的个数为______.

解析 被 7 除余 2 的数可写为 $7k+2$，由 $100\leqslant7k+2\leqslant600$，知 $14\leqslant k\leqslant85$.

又若某个 k 使 $7k+2$ 能被 57 整除，则

可得 $7k+2=57n$，即 $k=\frac{57n-2}{7}=\frac{56n+n-2}{7}=8n+\frac{n-2}{7}$，

即 $n-2$ 应为 7 的倍数. 设 $n=7m+2$，代入得 $k=57m+16$.

$\therefore$ $14\leqslant57m+16\leqslant85$，$m=0,1$. 于是所求的个数为 $85-(14-1)-2=70$.

7. 已知集合 $M=\{x\mid x=2^n,0\leqslant n\leqslant1\ 000,n\in\mathbf{Z}\}$，把 M 中最高位数字是 1 的数全部抽取出来，组成一个新的集合 S，则 S 中的元素共有______个（取 $\lg2=0.301\ 0$）.

解析 令 $10^k\leqslant2^n<2\times10^k$，则有 $\frac{k}{\lg2}\leqslant n<1+\frac{k}{\lg2}$，

于是 $k=0,1,2,\cdots,301$，且使得 $0\leqslant n\leqslant1000$，从而可以计算得 S 的个数为 302.

8. 有 5 对夫妇站成一排，没有任何 1 对夫妇相邻的站法有______种.

解析　设 $I=\{5$ 对夫妇的全排列$\}$，$A_i=\{$第 i 对夫妇相邻的全排列$\}$，$i=1,2,\cdots,5$，易知 $\mathrm{card}(I)=10!$.

我们将第 i 对夫妇相邻看作 1 个人，将其与另外 8 个人一起进行全排列，而夫妇相邻有两种方法，故 $\mathrm{card}(A_i)=2\cdot 9!$，$i=1,2,\cdots,5$.

同理，$\mathrm{card}(A_i\cap A_j)=2^2\cdot 8!$，$1\leqslant i<j\leqslant 5$；

$\mathrm{card}(A_i\cap A_j\cap A_k)=2^3\cdot 7!$，$1\leqslant i<j<k\leqslant 5$；

$\mathrm{card}(A_i\cap A_j\cap A_k\cap A_p)=2^4\cdot 6!$，$1\leqslant i<j<k<p\leqslant 5$；

$\mathrm{card}(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)=2^5\cdot 5!$.

故夫妇不相邻的排法数为

$$\mathrm{card}\left(\bigcap_{i=1}^{5}\complement_I A_i\right)=10!-\mathrm{C}_5^1\cdot 2\cdot 9!-\mathrm{C}_5^2\cdot 2^2\cdot 8!-\mathrm{C}_5^3\cdot 2^3\cdot 7!-\mathrm{C}_5^4\cdot 2^4\cdot 6!-\mathrm{C}_5^5\cdot 2^5\cdot 5!=1148160.$$

9. 已知集合 $\{1,2,3,\cdots,3n-1,3n\}$ 可以分为 n 个互不相交的三元组 $\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$，则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是______.

解析　由题意，设三元组为 $\{x_i,y_i,z_i\}$，且 $x_i+y_i=3z_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i+y_i+z_i)=4\sum\limits_{i=1}^{n}z_i$，即 $4\sum\limits_{i=1}^{n}z_i=\dfrac{3n(3n+1)}{2}$.

$\therefore$ 当 $2\mid n$ 时，$8\mid n$，得 n 的最小值为 8；

当 $2\nmid n$ 时，$8\mid 3n+1$，得 n 的最小值为 5.

当 $n=5$ 时，三元组有 $\{1,11,4\}$，$\{2,13,5\}$，$\{3,15,6\}$，$\{9,12,7\}$，$\{10,14,8\}$.

当 $n=8$ 时，三元组有 $\{1,14,5\}$，$\{2,19,7\}$，$\{3,21,8\}$，$\{4,23,9\}$，$\{6,24,10\}$，$\{15,18,11\}$，$\{16,20,12\}$，$\{17,22,13\}$.

10. 集合 $M=\{x\mid \cos x+\lg\sin x=1\}$ 中元素的个数是________.

解析　由于 $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，

因此 $\cos x+\lg\sin x=1$ 有解，唯一可能的是 $\cos x=1$，$\sin x=1$，但这种 x 显然不存在，

$\therefore M$ 是空集．故元素个数是 0.

二、解答题

11. 集合 $\{1,2,3,\cdots,100\}$ 的某些子集满足条件：没有一个数是另一个数的 2 倍．这样的子集中所含元素个数最多是多少？

解析　取出所有 2 倍大于 100 的数 $A_1=\{51,52,\cdots,100\}$，去掉 1～50 中 2 倍大于 50 的数 $\{26,27,\cdots,50\}$，再取出 2 倍在 26 至 50 之间的数 $A_2=\{13,14,\cdots,25\}$．又去掉 $\{7,8,9,10,11,12\}$，取出 $A_3=\{4,5,6\}$. 最后去掉 $\{2,3\}$，取出 $A_4=\{1\}$，则

取出 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$，共 $50+13+3+1=67$(个)数．其中没有任何一数是另一数的倍数，即所取满足条件的集合中元素个数 $\geqslant 67$.

又取集合 $\{2k-1,4k-2\}$($k=1,2,\cdots,25$) 及 $\{4,8\}$，$\{12,24\}$，$\{16,32\}$，$\{20,40\}$，$\{28,56\}$，$\{36,72\}$，$\{44,88\}$，$\{48,96\}$ 共 33 个集合．每个集合至多能取 1 个数，故所取满足条件的集合中元素个数 $\leqslant 100-33=67$.

12. 甲、乙两副纸牌各有 n 张编号从 1 至 n 的牌，把牌洗过，然后配成 n 对，每对甲、乙牌各 1 张．如果同一对的两张牌同号，就说有 1 个相合．问至少有 1 个相合的配牌方法有多少种？

解析 记至少有 1 个相合的配牌方法的全体为 A，并设 $A_i=\{i$ 号牌相合的配牌方法$\}$，$i=1,2,\cdots,n$. 显然 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

A_i 中的配牌方法可这样得到：i 号牌相合，然后把乙牌的其余$n-1$张牌在甲牌的 $1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 上随意排列，放在一起配对，故有 $\mathrm{card}(A_i)=(n-1)!$，$i=1,2,\cdots,n$.

同理 $\mathrm{card}(A_i\cap A_j)=(n-2)!$，$1\leqslant i<j\leqslant n$；

$\mathrm{card}(A_i\cap A_j\cap A_k)=(n-3)!$，$1\leqslant i<j<k\leqslant n$.

……

$\mathrm{card}(A_1\cap A_2\cap A_3\cdots\cap A_n)=0!=1$.

再由容斥公式，得

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(A)&=\mathrm{C}_n^1\cdot(n-1)!-\mathrm{C}_n^2\cdot(n-2)!+\mathrm{C}_n^3\cdot(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}\mathrm{C}_n^n\cdot 0!\\&=n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

13. 已知某中学共有 900 人，其中男生 528 人，高中学生 312 人，团员 670 人，高中男生 192 人，男团员 336 人，高中团员 247 人，高中男团员 175 人．试问这些统计数据是否有误？

解析 若统计无误，应有 $900\geqslant(528+312+670)-(192+336+247)+175=910$，

矛盾，说明统计数据有误.

14. 设 n 是正整数，我们说集合$\{1,2,\cdots,2n\}$的一个排列$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$具有性质 P，是指在$\{1,2,\cdots,2n-1\}$当中至少有一个 i，使得 $\mathrm{card}(x_i-x_{i+1})=n$，求证：对于任何 n，具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列的个数多.

解析 只需证明具有性质 P 的排列数 m 大于全部排列数的一半. 设$(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$中，k 与 $k+n$ 相邻的所有排列的集合为 A_k，则

$$m\geqslant\sum_{k=1}^{n}\mathrm{card}(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{card}(A_i\cap A_j)=2n(2n-1)!-\mathrm{C}_n^2\cdot 4(2n-2)!>\frac{1}{2}(2n)!$$

第三节　子集的性质

一、填空题

1. 已知集合 $A=\{x\mid x-a=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $A\cap B=B$，则实数 $a=$________.

解析 $\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

若 $B=\varnothing$，即 $a=0$ 时，$B\subseteq A$成立.

若 $B\neq\varnothing$，即 $a\neq0$ 时，$B=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{a}\right\}$，$A=\{x\mid x=a\}$，$B\subseteq A$，

$\therefore \dfrac{1}{a}=a$，即 $a=\pm1$.

综上，$a=0$，$a=-1$ 或 $a=1$.

2. 已知集合 $M=\{-1,0,1\}$，$S=\{-2,-1,0,1,2\}$，映射 $f:M\to S$，使 M 中的元素 x 与 S 中的 $f(x)$ 对应．其中，对每个 $x\in M$，使 $x+f(x)$ 是偶数的映射的个数是________.

解析 可取 $f(-1)=-1$ 或 $f(-1)=1$，有 2 种可能；

$f(0)=-2$ 或 $f(0)=0$ 或 $f(0)=2$，有 3 种可能；

$f(1)=-1$ 或 $f(1)=1$，有 2 种可能.

故符合条件的不同映射 f 只有 $2\times3\times2=12$(个).

3. 设集合 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_{10}\}$ 的五元子集满足：T 的任意两个元素最多在两个子集内出现，这样的五元子集最多有________.

解析 一元素与另外 9 个元素之一组成的"二元素组"在所有满足题设的五元子集中出现的机会不多于两次，因此，它参与组成的"二元素组"出现的总次数不多于 18 次，由于是五元子集，所以该元素出现的次数不多于 4 次，n 个五元素共 $5n$ 个数，于是 $5n\leqslant4\times10$，$n\leqslant8$，此外，集合 $\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$\{x_1,x_6,x_7,x_8,x_9\}$，$\{x_1,x_3,x_5,x_6,x_8\}$，$\{x_1,x_2,x_4,x_7,x_9\}$，$\{x_2,x_3,x_6,x_7,x_{10}\}$，$\{x_3,x_4,x_7,x_8,x_{10}\}$，$\{x_4,x_5,x_8,x_9,x_{10}\}$，$\{x_2,x_5,x_6,x_9,x_{10}\}$ 是符合条件的 8 个五元素组.

4. 已知 a 为非零实数，x 为某一实数，记命题 P：$x\in\{-a,a\}$，命题 Q：$|x|=a$，则命题 P 成立是命题 Q 成立的________条件(选填"充分"、"必要"、"充要"或"既不充分也不必要").

解析 若 Q 真，则 $x=a$ 或 $x=-a$，均有 $x\in\{-a,a\}$，P 也真.

但 $a=-1$ 时，P 真而 Q 不真，即由 $x\in\{1,-1\}$ 不能得出 $|x|=-1$.

∴ 命题 P 成立是命题 Q 成立的必要不充分条件.

5. 满足条件 $\{1,2,3\}\subseteq X\subseteq\{1,2,3,4,5,6\}$ 的集合 X 的个数为______.

解析 X 中一定包含 1，2，3 这三个数，至于另外三个数 4，5，6 可以属于 X，也可以不属于 X，因此不同的 X 共有 $2^3=8$(个).

6. 方程 $x^2-2x+p=0$ 的解集为 A，方程 $x^3+qx^2+rx=0(r\neq0)$ 的解集是 B，$A\cup B=\{0,-1,3\}$，$A\cap B=\{3\}$，则 $r=$______.

解析 由题设知 3 是方程 $x^2-2x+p=0$ 的一个根．由韦达定理知另一个根为 $2-3=-1$，可见 0 和 3 是方程 $x^3+qx^2+rx=0$ 的根，而 -1 不是此方程的根，故 $B=\{0,3\}$.

再由 $r\neq0$，知 0 不是重根，∴3 是方程 $x^3+qx^2+rx=0$ 的二重根，

由 $(x-3)^2=x^2+qx+r$. ∴ $r=9$.

7. 若 $\{\sqrt{a},1\}\subsetneqq\{1,2,a\}\subsetneqq\{1,2,4,a^2\}$，则 a 的值是________.

解析 由 $\{\sqrt{a},1\}\subsetneqq\{1,2,a\}$，知 $\sqrt{a}=2$ 或 $\sqrt{a}=a$.

若 $\sqrt{a}=2$，则 $a=4$；若 $\sqrt{a}=a$，则 $a=0$ 或 1.

当 $a=4$ 时，$\{\sqrt{a},1\}=\{2,1\}$，$\{1,2,a\}=\{1,2,4\}$，$\{1,2,4,a^2\}=\{1,2,4,16\}$，满足题意.

当 $a=0$ 时，$\{\sqrt{a},1\}=\{0,1\}$，$\{1,2,a\}=\{1,2,0\}$，$\{1,2,4,a^2\}=\{1,2,4,0\}$，也满足题意.

当 $a=1$ 时，$\{\sqrt{a},1\}=\{1,1\}$，不满足集合的元素必须互异的要求.

∴ $a=0$ 或 4.

8. 满足条件 $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leqslant4|x_1-x_2|$ 的函数 $\varphi(x)$ 形成一个集合 M，其中 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1^2\leqslant1$，$x_2^2\leqslant1$，则得 $y=f(x)=x^2+3x-2(x\in\mathbf{R})$ 与集合 M 间的关系是__________.