现代数学基础

54

代数学（下）

（修订版）

■ 莫宗坚　蓝以中　赵春来

高等教育出版社

现代数学基础

54

代数学(下)

(修订版)

DAISHUXUE

■ 莫宗坚　蓝以中　赵春来

高等教育出版社·北京

内容提要

本书为《代数学》下册，主要讲述交换代数的基本知识，内容包括环论、赋值论、Dedekind 整环及同调代数。这些都是交换代数的精华内容，是学习代数几何、代数数论等现代数学必备的基础。

本书内容丰富，直观性强，推理自然，解释详尽。本书的独到之处是特别注重对于交换代数的背景以及与其他学科的联系的介绍。书中精选了大量的例题与习题。

本书可作为高等学校数学专业研究生教材，也可供数学工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

代数学 ：新 1 版. 下 / 莫宗坚，蓝以中，赵春来编著. --北京：高等教育出版社，2015. 1
ISBN 978-7-04-041420-2

Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①莫… ②蓝… ③赵… Ⅲ. ①代数 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 261616 号

策划编辑 王丽萍　责任编辑 王丽萍　封面设计 张 楠　版式设计 王艳红
责任校对 杨凤玲　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm × 1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.75	版　　次	2015 年 1 月第 1 版
字　　数	330 千字	印　　次	2015 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00 元

物 料 号　41420-00

再版序言

此书的初版序言写于 1984 年, 回首 30 年. 那年暑假, 由陈省身先生召集我们五人 —— 项武义、伍鸿熙、肖荫堂、Morgan 和我举办首届暑期数学讲学. 事后, 丁石孙校长约我, 把讲稿写成书. 我遵嘱写完. 后来本书由北京大学出版社出版. 丁校长知会我, 润笔资 1 万元. 我辞谢不受. 于是北京大学出版社将此 1 万元挂了帐. 几个月后, 武义成立 "苏步青数学教育奖", 奖助中学数学老师, 向我募捐. 我心窃善之, 当即写纸条: 请项武义先生凭此条向北京大学出版社, 取用 1 万元. 多年后, 该书已经绝版, 盗版充斥. 后来, 高等教育出版社的王丽萍女士约我出本书的再版. 我同意了.

我衷心希望此书再版以后, 能再用 30 年以上, 后事如何, 只能付之天意了. 因此, 我尽心修改.

此书再版有三大可看之处: (1) 述古. 我适当加入了一些前人的结果 —— 例如 Euler 的空间旋转轴定理, Sylvester 惯性定理, 等等. (2) 编新. 近 10 年来, google 及百度的 "搜索引擎" 大行于世. 其实, 它们都是 Perron-Frobenius 定理的应用. 本版修定, 列入附录. (3) 全书细改, 及加入更多的习题.

过去 30 年, 中国年轻的数学家们, 才俊辈出, 光彩夺目. 希望未来的 30 年, 中国的数学界能修成正果. 是所祈也.

莫宗坚

2014 年 5 月

初版序言 —— 献给中国的青年人

这本书是根据我在美国的明尼苏达大学及普度大学的讲义编写而成的。当时讲授的对象是一、二年级的研究生。为了便于课堂讲授及读者自习, 我在编写过程中, 力求本书能够易于了解、联系各方。我的目标是:

一、抽象与具体结合, 理论与应用结合。目前的代数学书, 常常单线地朝抽象方向发展, 使读者 —— 甚至一些数学家们 —— 觉得代数学是抽象概念的游戏。即使代数学能联系实际、解决问题, 那也如一些半真半假的电影片的片头语, "如与实际相符, 也纯属偶然"。此书是要力矫此弊, 希望能通过例题、解说等, 阐明代数学与代数几何、代数数论、物理、密码学等的联系。

各科数学都是人类探索知识、解决问题的钥匙。一般的钥匙只有小部分起开锁的作用, 其余部分是防止它开别的锁, 这是一般的钥匙的 "有害部分"。如果把这些 "有害部分" 完全取消, 就成了百灵钥匙了。我想说明, 代数学正是这样的百灵钥匙。

二、理论的整合与统一。各种数学理论的平行发展, 到了代数学中, 取得了整合与统一。例如, 在第四章中, 我们统一了 "有限生成的交换群的基本定理" 及 "矩阵的 Jordan 标准式"; 在第五章中, 我们整合了 "几何作图" 及 "解方程式"; 在第八章中, 我们用 "Dedekind 整环" 统一了 "代数数论" 及 "仿射曲线论" 的讨论, 等等。

在这些理论的整合与统一中, 我们希望能体现数学的内在规律美。但愿读者们能欣赏数学的 "宗庙之美、百官之富"。

对于以上的目标, 我自觉做得不够。向前看中国的未来, 物质的建设可以速成, 精神的建设需要长期的积累, 所谓 "十年树木, 百年树人"。数学 —— 人类

精神活动的最高产物 —— 将促进青年人对真与美的追求, 发展对文化的内省力, 因此丰裕了精神文化的生活。

本书在完成过程中, 得到蓝以中及赵春来两位的协助。他们改正了原稿的许多遗落、误失, 与我共同商订了一些名词, 并补充了习题, 以及写了本书上册的附录一 (蓝以中)。我们联名出书, 正足以纪念我们的共同工作。

莫宗坚

序于 1984 年 8 月

符号说明

$\boldsymbol{A}^n$	n 维仿射空间
$\boldsymbol{P}^n$	n 维射影空间
B_i	i 阶边缘
B^i	i 阶上边缘
$C(S)$	环 S 的因子类群
(C,d)	边缘算子为 d 的复合形 C
$\dim R$	环 R 的维数
D.V.R.	(一秩) 离散赋值环
$\mathscr{D}_{T/R}$	T 对 R 的差积
$e(w/v)$ (简记 e)	赋值 w 对 v 的缩分歧指数
emb-dim S	Noether 局部环 S 的嵌入维数
$f(w/v)$ (简记 f)	赋值 w 对 v 的相对次数 (剩余次数)
g	亏格
$\operatorname{gl}\dim R$	环 R 的整体维数
$G_I(R)$	环 R 的与理想 I 相伴的分次环
$G_I(M)$	模 M 的与理想 I 相伴的分次模
G_Z	分解群
G_T	惯性群
$\operatorname{ht}(I)$	理想 I 的高度
$H_i(C)$	复合形 C 的 i 阶同调模
$H^i(C)$	复合形 C 的 i 阶上同调模

inj. dim M	模 M 的内射维数
$\sqrt{I}$	理想 I 的根理想
$\mathscr{I}(B)$	$\boldsymbol{A}^n$ 的子集 B 的理想, 或 Spec S 的闭集 B 中所有素理想的交
$K[[x_1, x_2, \cdots]]$	域 K 上的形式幂级数环
$K((x_1, x_2, \cdots))$	$K[[x_1, x_2, \cdots]]$ 的比域
$K\{\{x_1, x_2, \cdots\}\}$	赋值域 K 上的收敛幂级数环
length(M)	模 M 的长度
$\mathfrak{m}_v$	赋值 v 的极大理想
mspec$S$	环 S 的极大谱集
$M \bigotimes_R N$	R 模 M 和 N 的张量积
nil rad(S)	环 S 的幂零根理想
proj. dim M	模 M 的投射维数
$P(M, t)$	模 M 的 Poincaré 级数
rad (S)	环 S 的 Jacobson 根理想
rank v	赋值 v 的秩
res-dim$_k v$	k 赋值 v 对 k 的剩余维数
R_v	赋值 v 的赋值环
$R[[x_1, x_2, \cdots]]$	环 R 上的形式幂级数环
Spec S	环 S 的素谱集
S_D	环 S 对分母系 D 的局部化环
$S_\mathfrak{p}$	环 S 对素理想 $\mathfrak{p}$ 的局部化环
v	赋值
v_p	p-adic 赋值
Z_i	i 阶闭链
Z^i	i 阶上闭链
$\delta_{T/R}$	T 对 R 的判别式

下册目录

第六章　环论

§1　环的局部化

本书所说的环都是有幺元的交换环. 读者请参考第三章 §2 关于“比域”的讨论, 特别是定义 3.7 中提出了“局部化环”的概念. 在那里, 我们假定了 S 是一整环, 在本节中, 我们将讨论一般环的情形.

定义 6.1　设 S 为一环. S 的一个非空子集 D 如果满足下列条件:

1) $0 \overline{\in} D$;

2) $d_1, d_2 \in D \Longrightarrow d_1 \cdot d_2 \in D$,

则称为**一分母系**.

讨论　类似于定义 3.7, 我们想要定义 s/d, 这里 $s \in S, d \in D$. 自然地, 就像从整数环 $\mathbf{Z}$ 引出有理数域 $\mathbf{Q}$ 的情形一样, 我们要求

$$\frac{s_1}{d_1} + \frac{s_2}{d_2} = \frac{s_1 d_2 + s_2 d_1}{d_1 d_2}, \quad \frac{s_1}{d_1} \cdot \frac{s_2}{d_2} = \frac{s_1 s_2}{d_1 d_2}.$$

麻烦的问题是 $d \in D$ 可能是一个零因子, 即有 $s \in S, s \neq 0$, 但 $sd = 0$. 则我们不免得出下面的自相矛盾的算式:

$$s = s \cdot 1 = s \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) = (s \cdot d)\frac{1}{d} = 0 \cdot \frac{1}{d} = 0.$$

解决之道是通过商环的步骤消除这个难点. 请见下定理.

定理 6.1　令 D 为环 S 的一个分母系. 又令

$$I = \{s : s \in S, \text{ 存在一个 } d \in D, \text{ 使 } sd = 0\}.$$

则有

1) I 是 S 的一个理想;

2) 令 $\sigma: S \to S/I$ 为典型映射, 则 $\sigma(D)$ 是 S/I 的一个分母系, 而且, 如果 $\sigma(s)\sigma(d)=0$, 必有 $\sigma(s)=0$, 此处 $d \in D$.

证明　1) 如果 $s_1, s_2 \in I$, 则有 $d_1, d_2 \in D$, 使

$$s_1 d_1 = 0, \quad s_2 d_2 = 0.$$

显然立得

$$(s_1 \pm s_2) d_1 d_2 = 0,$$
$$(s\ s_1) d_1 = s(s_1 d_1) = s \cdot 0 = 0, \quad \forall s \in S.$$

于是 I 是理想.

2) 显然, $\sigma(d_1)\sigma(d_2) = \sigma(d_1 d_2) \in \sigma(D)$. 又如果 $0 = \sigma(d) \in \sigma(D)$, 立得 $d \in I$, 即存在 $d_1 \in D$, 使 $0 = dd_1 \in D$. 这与 D 的性质不合, 所以 $0 \overline{\in} \sigma(D)$. 因此 $\sigma(D)$ 是一个分母系.

现设 $\sigma(s)\sigma(d) = 0$, 则 $\sigma(sd) = 0$, 即 $sd \in I$. 故必存在 $d_1 \in D$, 使 $s(dd_1) = (sd)d_1 = 0$. 立得 $s \in I$, 即 $\sigma(s) = 0$. □

讨论　从上面的定理, 我们知道: 给定一个分母系 D 以后, 我们从环 S 转移到环 S/I 来考虑, 则 $\sigma(D)$ 中没有零因子. 因此, 零因子所产生的难点也即消失.

定义 6.2　设 S 是环, D 是分母系. 令 I, σ 如定理 6.1 所设. 又令 $S' = S/I, D' = \sigma(D)$. 则我们定义 S 对 D 的**局部化环** S_D 为下面的集合

$$S_D = S'_{D'} = \left\{ \frac{s'}{d'} : s' \in S', d' \in D' \right\},$$

及其运算规则

$$\frac{s'_1}{d'_1} + \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 d'_2 + s'_2 d'_1}{d'_1 d'_2},$$
$$\frac{s'_1}{d'_1} \cdot \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 s'_2}{d'_1 d'_2}, \quad \frac{s'_1 d'_2}{d'_1 d'_2} = \frac{s'_1}{d'_1}.$$

又如果 $s' = \sigma(s), d' = \sigma(d)$, 则定义

$$\frac{s}{d} = \frac{s'}{d'}.$$

讨论 1) 如果 S 为整环, 则定义 6.2 与定义 3.7 相同.

2) 对于分母系的规定, 我们也可以取消 $0 \overline{\in} D$ 的限制. 自然, 如果 $0 \in D$ 时, $S_D = 0$.

例 1 令 $S = \mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}, D = \{(n,0) : n \neq 0\}$. 则显然 D 是一个分母系. 此时, 不难看出

$$I = \{(0,m) : m \in \mathbf{Z}\},$$
$$S/I \approx \mathbf{Z}, \quad \sigma(D) = \{n : n \neq 0\}.$$

于是, 我们得出 $S_D \approx \mathbf{Q}$. □

我们任取 $s \in S$. 一般可以考虑

$$s \mapsto \sigma(s) \mapsto \frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}.$$

这样把 S 的元素 s, 认同为 S_D 的元素 $\dfrac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}$. 例如, 在例 1 中, 把元素 (nm, m) 认同为 $n/1 = n$. 显然, 这个**认同映射**不是单射.

在下面的讨论中, 我们将证明, 环的局部化法与取商环法是可以**交换的**.

定理 6.2 设 S 是环, D 是分母系, J 是 S 的理想, $D \bigcap J = \varnothing$. 令 $\tau : S \to S_D$ 是认同映射. 再令 $J' = \tau(J) \cdot S_D$, 即 J' 是 J 的元素在认同映射下的像所生成的理想. 又令 $\pi : S \to S/J$ 是典型映射. 则恒有

$$\pi(S)_{\pi(D)} \approx S_D/J'.$$

证明 我们先要说明上面的式子是有意义的. 换句话说, $\pi(D)$ 是 $\pi(S)$ 的分母系. 事实上, 因为 $D \bigcap J = \varnothing$, 自然 $0 \overline{\in} \pi(D)$. 又有 $\pi(d_1)\pi(d_2) = \pi(d_1 d_2) \in \pi(D)$ $(\forall d_1, d_2 \in D)$, 所以 $\pi(D)$ 是一个分母系.

我们定义一个映射 α 如下:

$$\alpha : \pi(S)_{\pi(D)} \to S_D/J',$$
$$\alpha\left(\frac{\pi(s)}{\pi(d)}\right) = \frac{s}{d} + J'.$$

请读者自行证明, 这确实是个单满映射, 故为同构. □

我们常见的局部化环, 是取 $D = S \backslash \mathfrak{p}$, 此处 $\mathfrak{p}$ 是 S 的一个素理想. 请注意, 按照素理想的定义, 我们有

$$ab \in \mathfrak{p} \Longrightarrow a \in \mathfrak{p} \quad 或 \quad b \in \mathfrak{p},$$

也即

$$a \overline{\in} \mathfrak{p}, b \overline{\in} \mathfrak{p} \Longrightarrow ab \overline{\in} \mathfrak{p},$$

$$a \in D, b \in D \Longrightarrow ab \in D,$$

因此, $D = S\backslash\mathfrak{p}$ 确是一个分母系.

符号　设 $D = S\backslash\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ 是素理想, 则我们用 $S_\mathfrak{p}$ 表示 S_D. 又设 $J \subset S, \tau : S \to S_\mathfrak{p}$ 是认同映射, 则我们用 $JS_\mathfrak{p}$ 表示 $\tau(J)S_\mathfrak{p}$, 即由 $\tau(J)$ 生成的理想.

例 2　令 $S = \mathbf{C}[x, y], \mathfrak{p} = (x - a, y - b)$, 则有

$$S_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} : f, g \in S, g(a, b) \neq 0 \right\}.$$

不难看出, $S_\mathfrak{p}$ 即是在点 (a, b) 有定义的有理函数的集合.

又令 $R = \{(f(x), g(y)) : f, g \in S, f(0) = g(0)\}$, 即定义在 x 轴及 y 轴上的多项式组 (任何一组中的两个多项式在原点取值相等) 的集合. 令 $\mathfrak{q} = \{(xf(x), yg(y))\}$, 则有

$$R_\mathfrak{q} = \left\{ \left(\frac{f(x)}{r(x)}, \frac{g(x)}{s(x)} \right) : r(0) \neq 0, s(0) \neq 0, \frac{f(0)}{r(0)} = \frac{g(0)}{s(0)} \right\}.$$

不难看出, $R_\mathfrak{q}$ 即是在原点有定义的 x 轴及 y 轴上的有理函数组 (每组中的两个有理函数在原点取值相等) 的集合. □

定义 6.3　设环 S 中只有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则称 S 为**局部环**.

讨论　定理 3.23 中已经证明, 在任意环 S 中必有一极大理想. 在局部环的定义中, 我们强调只有唯一的极大理想.

定理 6.3　1) 环 S 是局部环 $\Longleftrightarrow J = \{s \in S : s \text{ 非可逆元}\}$ 是一个理想. 于是 J 是 S 的唯一的极大理想;

2) 设 $\mathfrak{p}$ 是环 S 的素理想, 则 $\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ 是 $S_\mathfrak{p}$ 的唯一的极大理想. 于是 $S_\mathfrak{p}$ 是局部环.

证明　1)$\Longrightarrow$. 令 $\mathfrak{m}$ 是 S 的极大理想, 则显然 $\mathfrak{m} = J$.

$\Longleftarrow$. 任取理想 $I \neq S$, 显然有 $I \subset J$. 于是 J 是 S 的唯一的极大理想.

2) 令 $s/d \in S_\mathfrak{p}$, 其中 $d \overline{\in} \mathfrak{p}$. 显然

$$\frac{d}{s} \in S_\mathfrak{p} \Longleftrightarrow s \overline{\in} \mathfrak{p}.$$

所以 s/d 为可逆元当且仅当 $s \overline{\in} \mathfrak{p}$, 也即 s/d 为非可逆元当且仅当 $s \in \mathfrak{p}$. 于是, $\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$ 是 $S_\mathfrak{p}$ 中的所有非可逆元的集合, 它显然是 $S_\mathfrak{p}$ 的一个理想. 由 1), 即知 2) 成立. □

例 3 一般言之, 任取环 S 的一个分母系 D, 则 S 对 D 的局部化环 S_D 不一定是局部环. 最简单的例子, 令 $D=\{1\}$, 则 $S_D=S$, 显然不一定是局部环.

现在我们取一个实例. 令 $S=\mathbf{C}[x,y], \mathfrak{p}=(y-x^2)$. 请注意 $y-x^2=0$ 定义一条抛物线. 我们考虑 $S_{\mathfrak{p}}$, 不难看出

$$S_{\mathfrak{p}}=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}: g(x,x^2)\neq 0\right\}.$$

此时, 分母 $g(x,y)$ 不在抛物线 $y-x^2=0$ 上恒等于零. 然而, 在抛物线的个别点上, $g(x,y)$ 可以是零. 例如, y 即可以当作分母, 而此多项式 y 在原点 $(0,0)$ 等于零. 自然, $(0,0)$ 是抛物线上的一点. □

值得我们注意的是 S 的理想在局部化后的变动情形, 即在 S_D 中生成的理想如何. 我们有下面的定理.

定理 6.4 1) 设 D 是环 S 的分母系, J 是 S 的理想. 则

$$JS_D=S_D \Longleftrightarrow J\bigcap D\neq\varnothing;$$

2) 设 $\mathfrak{p}$ 及 J 是 S 的素理想, $J\subset\mathfrak{p}$. 则下面的映射是由 S 中含于 $\mathfrak{p}$ 的素理想集合到 $S_{\mathfrak{p}}$ 的素理想集合的单满映射:

$$J\to JS_{\mathfrak{p}}.$$

证明 1) $\Longrightarrow$. 令 $\tau: S\to S_D$ 是认同映射. 已知 $JS_D=S_D$, 所以有

$$1=\sum_i \tau(a_i)\frac{\tau(s_i)}{\tau(d_i)}=\frac{\tau(a)}{\tau(d)},\quad s_i\in S; a_i, a\in J; d_i, d\in D.$$

即

$$\tau(a)=\tau(d),\quad a-d\in\ker(\tau).$$

于是存在 $d'\in D$, 使 $(a-d)d'=0$. 立得 $J\ni ad'=dd'\in D$.

$\Longleftarrow$. 显然.

2) 任取 I 为 $S_{\mathfrak{p}}$ 的素理想. 令

$$J=\{a: a\in S, aS_{\mathfrak{p}}\subset I\}.$$

则 J 显然是 S 的一个理想, 以及 $JS_{\mathfrak{p}}\subset I$. 又任取 $a/d\in I$, 则 $a\in J$, 以及 $a/d=a(1/d)\in JS_{\mathfrak{p}}$. 于是 $I=JS_{\mathfrak{p}}$. 又设 $ab\in J$, 则 ${}^{a}bS_{\mathfrak{p}}\subset I$. 用 I 是素理想这个条件, 立得 $aS_{\mathfrak{p}}\subset I$ 或 $bS_{\mathfrak{p}}\subset I$, 即 $a\in J$ 或 $b\in J$. 所以 J 是 S 的一个素理想. 这样, 我们证明了映射 $J\to JS_{\mathfrak{p}}$ 是满射.

现在我们假设 $JS_{\mathfrak{p}} = J'S_{\mathfrak{p}}$, J 与 J' 都是含于 $\mathfrak{p}$ 的素理想, 求证 $J = J'$. 任取 $a \in J$, 则有 $a/1 \in JS_{\mathfrak{p}} = J'S_{\mathfrak{p}}$. 所以有

$$\frac{a}{1} = \sum_i a_i' \frac{s_i}{d_i} = \frac{a'}{d}, \quad a_i', a' \in J'; s_i \in S; d_i, d \,\overline{\in}\, \mathfrak{p}.$$

也即

$$ad - a' \in \ker(\tau).$$

于是, 存在 $d' \,\overline{\in}\, \mathfrak{p}$, 使 $(ad - a')d' = 0 \in J'$. 但 $J' \subset \mathfrak{p}$, 所以 $d' \,\overline{\in}\, J'$, 而 J' 为素理想, 立得

$$ad - a' \in J', \quad ad \in J', \quad a \in J'.$$

因此 $J \subset J'$. 同法可证 $J' \subset J$. 即得 $J = J'$. 故映射 $J \to JS_{\mathfrak{p}}$ 是单射. □

例 4 对一般分母系 D 而言, $J \to JS_D$ 不一定是单射. 例如, 取 $S = \mathbf{Z} \bigoplus \mathbf{Z}, D = \{(2n, 0) : n \neq 0\}$. 则不难看出

$$S_D = \left\{ \frac{m}{2n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0 \right\},$$

以及 $(0)S_D = (\{0\} \bigoplus \mathbf{Z})S_D$, 其中 (0) 表示 S 中的零理想. 显然 $\{0\} \bigoplus \mathbf{Z}$ 是 S 的一个非零理想. □

任给一环 S 及两个非零因子 a, b. 则显然 ab 也为非零因子. 所以, 所有的非零因子的集合是一个分母系 D. 此时, S_D 称为 S 的**全比环**. 不难看出, 当 S 是整环时, S 的全比环即是 S 的比域.

习 题

1. 证明局部化环可定义如下: 设 A 是环, S 是 A 的乘法封闭子集. 一个环 X 称为 A 关于 S 的局部化环, 如果存在一个环映射 $f : A \to X$, 使得对任一环映射 $g : A \to B$, 只要 $g(s)$ 在 B 中可逆 $(\forall s \in S)$, 必存在唯一的环映射 $h : X \to B$, 使得下面的图表交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\
X \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

2. 设 R 是环, S 是 R 的乘法封闭子集. 如果对 R 的每个素理想 $\mathfrak{p}$ 而言,

$$S \bigcap \mathfrak{p} \neq \varnothing,$$

问零是否一定在 S 中?

3. 求 $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ 的全比环, 其中 $m \in \mathbf{Z}$.

4. 设 R 是主理想整环, 证明局部化环 R_D 也是主理想整环.

5. 设 R 是唯一分解环, 证明 R_D 也是唯一分解环.

6. 设 R 是一个局部环, I 是 R 的真理想. 证明 R/I 仍是局部环.

7. 证明 $K[[x_1, x_2, \cdots, x_n]]$ 是一个局部环, 这里 K 是一个域.

8. 证明在零点附近的复解析函数集 $\mathbf{C}\{\{x\}\}$ 是一个局部环.

9. 证明 $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 是一个局部环, 其中 p 为素数, $n \in \mathbf{N}$.

10. 令 $R = \mathbf{Z}/(60), \mathfrak{p} = 2R$. 求 $R_\mathfrak{p}$ 的基数.

11. 设 R 是整环. 证明 $R = \bigcap R_\mathfrak{m}$, 此式右端的交集是对 R 的所有极大理想 $\mathfrak{m}$ 而言的.

12. 设 $\mathbf{Z} \subset R \subset \mathbf{Q}, R$ 是一个局部环. 证明 $R = \mathbf{Z}_{(p)}$ 或 $\mathbf{Q}$, 此处 p 是一个素数.

13. 设 K 是域, $K[x] \subset R \subset K(x), R$ 是局部环. 证明 $R = K[x]_{(f(x))}$ 或 $K(x)$, 此处 $f(x)$ 是 $K[x]$ 中一个不可约多项式.

§2 整 数 扩 充

我们考虑 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. 任意有理数 $\alpha \in \mathbf{Q}$ 都满足下面形式的整系数方程式:

$$nx - m = 0, \quad n, m \in \mathbf{Z}, (n, m) = 1.$$

而且

$$\alpha \in \mathbf{Z} \Longleftrightarrow n = 1.$$

又, 我们熟悉的 $\sqrt{2} \in \mathbf{Q}$ 的一个古典证法如下: 首先, $\sqrt{2}$ 满足

$$x^2 - 2 = 0,$$

然后再应用下面的定理.

定理 6.5 设 α 为有理数. 如果 α 满足下面的整系数首一多项式:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in \mathbf{Z},$$

则 α 必为整数.