



中国科学院科学出版基金资助出版

信息科学技术学术著作丛书

量子光学

张智明 著



科学出版社

信息科学技术学术著作丛书

量子光学

张智明 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

量子光学是研究光场的量子统计性质、量子相干性质,以及光与物质相互作用中的量子效应的一门学科。本书重点介绍量子光学的基本内容,包括经典光场与原子的相互作用(光与原子相互作用的半经典理论);光场本身的量子统计性质和量子相干性质;量子光场与原子的相互作用(光与原子相互作用的全量子理论);耗散的量子理论以及量子光学实验中常用的物理系统。同时,简要介绍量子信息科学和冷原子物理。

本书可供从事量子光学、量子信息、冷原子物理及相关学科研究的科技人员、教师、研究生和高年级本科生参考,也可用作相关专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

量子光学/张智明著. —北京:科学出版社,2015

(信息科学技术学术著作丛书)

ISBN 978-7-03-043370-1

I. 量… II. 张… III. 量子光学-研究 IV. O431.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 030272 号

责任编辑:魏英杰 / 责任校对:桂伟利

责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬



科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年2月第一版 开本:720×1000 1/16

2015年2月第一次印刷 印张:16

字数:320 000

定价:90.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《信息科学技术学术著作丛书》序

21 世纪是信息科学技术发生深刻变革的时代,一场以网络科学、高性能计算和仿真、智能科学、计算思维为特征的信息科学革命正在兴起。信息科学技术正在逐步融入各个应用领域并与生物、纳米、认知等交织在一起,悄然改变着我们的生活方式。信息科学技术已经成为人类社会进步过程中发展最快、交叉渗透性最强、应用面最广的关键技术。

如何进一步推动我国信息科学技术的研究与发展;如何将信息技术发展的新理论、新方法与研究成果转化为社会发展的新动力;如何抓住信息技术深刻发展变革的机遇,提升我国自主创新和可持续发展的能力?这些问题的解答都离不开我国科技工作者和工程技术人员的求索和艰辛付出。为这些科技工作者和工程技术人员提供一个良好的出版环境和平台,将这些科技成就迅速转化为智力成果,将对我国信息科学技术的发展起到重要的推动作用。

《信息科学技术学术著作丛书》是科学出版社在广泛征求专家意见的基础上,经过长期考察、反复论证之后组织出版的。这套丛书旨在传播网络科学和未来网络技术,微电子、光电子和量子信息技术、超级计算机、软件和信息存储技术,数据知识化和基于知识处理的未来信息服务业,低成本信息化和用信息技术提升传统产业,智能与认知科学、生物信息学、社会信息学等前沿交叉科学,信息科学基础理论,信息安全等几个未来信息科学技术重点发展领域的优秀科研成果。丛书力争起点高、内容新、导向性强,具有一定的原创性;体现出科学出版社“高层次、高质量、高水平”的特色和“严肃、严密、严格”的优良作风。

希望这套丛书的出版,能为我国信息科学技术的发展、创新和突破带来一些启迪和帮助。同时,欢迎广大读者提出好的建议,以促进和完善丛书的出版工作。

中国工程院院士
原中国科学院计算技术研究所所长



序

现代量子光学诞生于 20 世纪 60 年代。美国著名学者 Glauber 研究了 Hanbur-Brown 和 Tuiss 的强度关联实验(通常称为 HBT 实验)现象,首先预言光子反聚束的非经典效应,并引进相干态的概念,开创了量子光学发展的新时代。由于这项贡献,Glauber 教授在 2005 年荣获了诺贝尔物理学奖。迄今量子光学已成为物理学领域中的重要学科,并不断获得重大研究进展和广泛的应用。我国的量子光学发展始于 20 世纪 80 年代,近 30 年的发展已取得巨大进步,在国际学术界占有一席之地。越来越多的大学开设了“量子光学”的研究生课程,张智明教授的这本书恰好适合当前我国在这个领域科研和教育的需要。

量子光学是一门运用量子力学研究光以及光与物质相互作用的学科。量子光学与光学领域其他学科的根本区别在于光场是量子化的。处理光与物质相互作用的理论大致可以划分为三类,第一类是全量子理论,即光和物质均采用量子力学描述;第二类是半经典理论,即光场量子化,而物质则采用经典描述,如折射系数等;第三类是半量子化理论,光场是经典光场,而物质是量子化描述。例如,在原子物理中,原子是量子化后的能级描述,而光场是经典电磁场。广义上的量子光学教科书包括上述这三类理论体系,当然作者按自己的观点会有不同的取舍。

量子光学学科经历了近半个世纪的发展,其理论体系已趋于完善。量子信息的诞生更有力地促进了量子光学基础理论和实验技术的飞速发展,量子光学学科进入到蓬勃兴旺的新阶段,正吸引越来越多年轻人步入这个领域,因此人们期待着更多适合他们需要的量子光学著作的出版。目前国内外已有许多优秀的量子光学著作。张智明教授根据自己 30 余年的相关教学和研究经历,编写了这本《量子光学》著作,书中凝聚了他对该领域的深刻体会,同时简单介绍了近年来量子信息和冷原子物理的研究进展。

相信此书的出版将有助于年轻人迈进量子光学的大门,为我国量子光学事业的发展做出贡献。

郭光灿
中国科学院院士

前 言

国内外已经出版了许多量子光学方面的著作,为什么还要写这本书呢?主要原因是:作者学习、讲授、研究量子光学已经 30 余年,对量子光学的一些基本概念和理论体系有一些自己的体会,也做出了一些科研成果,希望能够写出来,与大家分享;不同的作者由于自己的教学和科研经历不同,面对受众(授课时的听众和著作的读者)的不同,著作的侧重点也就不同。本书就是按照作者本人的教学和科研经历以及面对的受众而写的。

量子光学是研究光场的量子统计性质、量子相干性质,以及光与物质(原子、离子等)相互作用中的量子效应的一门学科。按照作者的理解,可以将量子光学的研究内容分为三大部分。

第一部分是量子光学的基础部分,也是从事量子光学研究必须掌握的部分,包括经典光场与原子的相互作用(光与原子相互作用的半经典理论);光场本身的量子统计性质和量子相干性质;量子光场与原子的相互作用(光与原子相互作用的全量子理论);耗散的量子理论等。

第二部分是在量子光学发展史上曾经很活跃,但在目前看来已相对成熟的论题,如激光理论,共振荧光、超荧光、超辐射,光学双稳态等。

第三部分是量子光学的新进展,主要包括量子信息科学和冷原子物理。

本书重点介绍第一部分,对第二部分不予介绍,对第三部分只作简单介绍。

本书第 1 章介绍量子力学基础,为学习后面的章节做准备。第 2 章介绍经典光场与原子的相互作用(光与原子相互作用的半经典理论)。在这一章中,我们首先给出多模光场与多能级原子相互作用的一般形式。然后讨论单模光场与多能级原子的相互作用。由此讨论得出结论,在研究单模光场与原子的相互作用时,原子可取二能级近似(尽管实际存在的原子都是多能级系统)。最后详细讨论单模光场与二能级原子的相互作用以及双模光场与三能级原子的相互作用。第 3 章~第 6 章讨论光场本身的量子统计性质和量子相干性质。第 3 章讨论电磁场量子化,即将描述电磁场的物理量(电场强度、磁场强度、哈密顿量等)用算符表示。第 4 章讨论电磁场的各种量子态,包括光子数态(Fock 态)、相干态、压缩态、相干态的相干叠加态和非相干叠加态、热态等,同时还介绍了光学分束器及其对量子态的变换,以及单模压缩态光场和双模压缩态光场的实验产生和探测。第 5 章介绍电磁场量子态在相干态表象中的表示(电磁场量子态在相空间中的表示),讨论电磁场量子态的几种重要准概率分布函数,包括 $P(\alpha)$ 函数、 $Q(\alpha)$ 函数和 Wigner 函数,以及与

准概率分布函数密切相关的特征函数。第 6 章介绍电磁场的相干性质,包括经典的一阶和二阶相干性质,以及量子的一阶、二阶和高阶相干性质。第 7 章讨论量子电磁场与原子的相互作用(光与原子相互作用的全量子理论),与第 2 章类似,依次讨论多模光场与多能级原子相互作用的一般形式、单模光场与多能级原子的相互作用、单模光场与二能级原子的相互作用。此外,该章还介绍了原子自发辐射的 Weisskopf-Wigner 理论。第 8 章介绍耗散和消相干的量子理论,包括量子跳跃理论、密度算符方程方法、Fokker-Planck 方程方法、Heisenberg-Langevin 方程方法、耗散的输入-输出形式等。由于量子光学的理论结果最终要接受实验的检验,第 9 章介绍量子光学实验中常用的一些物理系统,包括腔量子电动力学系统、超导电路量子电动力学系统、囚禁离子系统和光学系统等,同时介绍了一些重要的代表性实验。第 10 章和第 11 章分别简单介绍与量子光学密切相关的两个新领域,量子信息科学和冷原子物理。第 10 章介绍量子信息科学,按照作者的理解,可将量子信息科学分为量子通信和量子计算。在量子通信部分,介绍量子密集编码、量子隐形传态、量子密钥分发等。在量子计算部分,介绍量子寄存器、量子逻辑门、量子算法等。第 11 章介绍冷原子物理,分别介绍光场对原子的作用力、激光冷却原子的机理和温度极限、几种囚禁原子的阱(包括激光阱、静磁阱、磁光阱等)、玻色-爱因斯坦凝聚和相干原子波激射器等。

在本书出版之际,作者要向许多老师、学生、同行表示感谢。感谢王志诚教授,是他将作者引进了量子光学研究的大门;感谢郭光灿院士和彭堃堃院士,在作者 30 余年从事量子光学的研究中始终得到他们的大力支持和帮助;感谢刘颂豪院士,作者长期在他的直接领导下工作,得到他的诸多关心和帮助;感谢谢绳武教授,作者在上海交通大学工作期间曾得到他的大力支持和帮助;感谢 Prof. Chi S. (台湾新竹交通大学)、Prof. Oh C. H. (新加坡国立大学)、Prof. Walther H. (德国马普量子光学研究所)、Prof. Zhu S. Y. (香港浸会大学),作者曾有幸到他们的课题组进行科研合作,开阔了视野,受益匪浅;感谢作者长期的科研合作者冯勋立教授,与他的科研合作是愉快而富有成效的。此外,感谢华南师范大学的量子光学与量子信息研究团队的朱诗亮、於亚飞、王发强、王金东、魏正军、颜辉、张新定、薛正远、邹平、王瑞强、艾保全等,我们的团队是一个团结、和谐的团队,大家的科研合作是愉快和富有成果的;感谢作者的历届研究生们,这里要特别提到的是熊锦博士、欧永成博士、袁春华博士、严明博士、杨健博士、张建奇博士、梅锋博士、吴琴博士、马鹏程博士、魏朝平博士。

感谢胡利云、肖银、陈俊、张达森和胡亚云,他们仔细阅读了本书初稿并提出了不少宝贵的建议。感谢李青,他帮助绘制了部分插图。

再次感谢郭光灿院士,他在百忙之中抽出时间为本书作序。

感谢科学出版社的魏英杰先生,他为本书的出版做了大量的工作。感谢中国

科学院科学出版基金对本书出版的资助。

感谢国家自然科学基金委员会长期以来对我科研工作的资助(项目编号: 61378012;91121023; 60978009;60578055;60178001;10074046)。

最后也是最要感谢的是我的家人,感谢他们一直以来对我的理解和支持。

作 者

2014年3月

目 录

《信息科学技术学术著作丛书》序

序

前言

第 1 章 量子力学基础	1
1.1 量子力学和量子光学发展简史	1
1.2 量子力学的基本原理	2
1.3 态矢量和力学量算符的表象及表象变换	6
1.3.1 表象的概念	6
1.3.2 态矢量在具体表象中的表示	6
1.3.3 算符在具体表象中的表示	8
1.3.4 表象变换	8
1.3.5 幺正变换的性质	9
1.4 纯态、混合态、密度算符.....	10
1.4.1 算符	10
1.4.2 纯态和混合态举例	12
1.4.3 密度算符的运动方程	12
1.5 一维谐振子.....	13
1.5.1 一维谐振子的本征态和本征能量	13
1.5.2 量子态 $ n\rangle$ 在坐标表象中的表示式	14
1.6 两态系统、泡利自旋算符	15
1.7 多体系统、约化密度算符、纠缠态、von Neumann 熵	17
1.8 量子力学中的绘景.....	19
1.8.1 常用的三种绘景(薛定谔绘景、海森堡绘景、相互作用绘景)	19
1.8.2 一般绘景之间哈密顿量的变换	22
1.8.3 绘景变换举例	22
参考文献	25
第 2 章 经典电磁场与原子的相互作用	26
2.1 多模电磁场与多能级原子相互作用的一般形式.....	26
2.1.1 哈密顿量的形式	26
2.1.2 薛定谔方程的求解	27
2.2 单模电磁场与多能级原子的相互作用.....	28

2.3 单模电磁场与二能级原子的相互作用·····	31
2.3.1 哈密顿量的形式·····	31
2.3.2 薛定谔方程和密度矩阵方程的求解·····	32
2.3.3 耗散的唯一象描述·····	41
2.4 双模电磁场与三能级原子的相互作用·····	42
2.4.1 哈密顿量的形式·····	42
2.4.2 薛定谔方程的求解·····	43
2.4.3 相干布居数囚禁、囚禁态、暗态、相干布居数转移·····	44
2.4.4 电磁诱导透明·····	47
2.4.5 无吸收而折射率增强·····	50
2.4.6 无反转激光·····	53
参考文献·····	54
第3章 电磁场物理量的算符表示 ·····	56
3.1 电磁场的驻波(正则模)形式·····	57
3.2 电磁场的行波形式·····	61
参考文献·····	64
第4章 电磁场的量子态 ·····	65
4.1 单模场的量子态·····	65
4.1.1 光子数态(Fock 态)·····	65
4.1.2 相干态·····	67
4.1.3 压缩态·····	72
4.1.4 相干态的叠加态·····	83
4.1.5 热态·····	91
4.2 多模光场的量子态·····	92
4.2.1 双模压缩真空态·····	93
4.2.2 其他多模光场态·····	97
4.2.3 电磁场的量子态小结·····	97
4.3 光学分束器的理论描述及其对电磁场量子态的变换·····	97
4.3.1 光学分束器的经典描述·····	97
4.3.2 光学分束器的量子力学描述·····	99
4.3.3 光学分束器对电磁场量子态的变换·····	99
参考文献·····	101
第5章 电磁场量子态在相干态表象中的表示 ·····	103
5.1 光子数态表象(离散变量表象)、光子数概率分布函数·····	103
5.2 相干态表象(连续变量表象)、准概率分布函数·····	104
5.2.1 $P(\alpha)$ 函数·····	105
5.2.2 $Q(\alpha)$ 函数·····	108

5.2.3 Wigner 函数	111
5.3 特征函数	112
5.4 本章小结	116
参考文献	117
第 6 章 电磁场的相干性	119
6.1 经典一阶相干函数	119
6.2 量子一阶相干函数	122
6.3 经典二阶相干函数	124
6.4 量子二阶相干函数	126
6.5 量子高阶相干函数	128
6.6 本章小结	128
参考文献	130
第 7 章 量子电磁场与原子的相互作用	131
7.1 量子多模电磁场与多能级原子相互作用的哈密顿量	131
7.2 量子单模电磁场与多能级原子的相互作用	132
7.3 量子单模电磁场与二能级原子的相互作用——JC 模型	134
7.3.1 系统的哈密顿量	134
7.3.2 薛定谔方程的求解	135
7.4 缀饰态	145
7.5 原子在自由空间的自发辐射: Weisskopf-Wigner 理论	148
7.5.1 电磁场的模密度	148
7.5.2 二能级原子的自发辐射	149
7.5.3 三能级原子的双光子级联发射	153
参考文献	155
第 8 章 耗散和退相干的量子理论	157
8.1 量子跳跃理论	157
8.1.1 量子跳跃与非幺正演化	157
8.1.2 退相干	159
8.2 密度算符方程和 Fokker-Planck 方程	161
8.2.1 密度算符方程的一般形式	161
8.2.2 二能级原子的辐射	165
8.2.3 单模腔场的衰减	168
8.3 Heisenberg-Langevin 方程	173
8.3.1 单模腔场的衰减与涨落	173
8.3.2 腔场的双时关联函数和光谱线型	177
8.4 腔场耗散的输入-输出形式	178
8.5 本章小结	182

参考文献	183
第 9 章 量子光学实验中常用的物理系统	184
9.1 腔量子电动力学系统	184
9.1.1 JC 模型的实验实现	188
9.1.2 原子纠缠态的制备	189
9.1.3 腔场薛定谔猫态(相干态的相干叠加态)的制备	190
9.1.4 光子数的非破坏性测量	192
9.2 超导电路量子电动力学系统	193
9.3 囚禁离子系统	195
9.4 光学系统	197
9.4.1 单光子 Mach-Zehnder 干涉仪	197
9.4.2 纠缠光子源:自发参量下转换	199
9.4.3 Hong-Ou-Mandel 干涉仪	202
参考文献	203
第 10 章 量子信息科学简介	205
10.1 量子信息科学中的若干基本概念	205
10.2 量子通信	207
10.2.1 量子密集编码	207
10.2.2 量子隐形传态	208
10.2.3 量子密钥分发	209
10.3 量子计算	212
10.3.1 量子寄存器	212
10.3.2 量子逻辑门	213
10.3.3 量子算法	217
参考文献	218
第 11 章 冷原子物理简介	220
11.1 光场对原子的作用力	221
11.2 光学黏团、激光冷却原子的机理和温度极限	223
11.3 囚禁原子的阱	225
11.4 玻色-爱因斯坦凝聚和相干原子波激射器	227
参考文献	228
附录	229

第 1 章 量子力学基础

1.1 量子力学和量子光学发展简史

1900 年,普朗克(Planck),黑体辐射,能量量子化

$$\varepsilon = h\nu$$

1905 年,爱因斯坦(Einstein),光电效应,光量子 - 光子

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda} \left(p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \right)$$

1913 年,玻尔(Bohr),原子光谱和原子结构,定态、量子跃迁及跃迁频率

$$\nu_{mn} = (E_m - E_n) / h$$

1923 年,德布罗意(de Broglie),物质粒子的波动性,物质波

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

1925 年,海森堡(Heisenberg),矩阵力学。

1926 年,薛定谔(Schrödinger),波函数 $\psi(\mathbf{r}, t)$, 波动方程-薛定谔方程,波动力学

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = H\psi(\mathbf{r}, t)$$

1926 年,波恩(Born),波函数的统计诠释: $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ 为概率密度,满足归一化条件

$$\int d\nu |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1$$

1926 年,狄拉克(Dirac),狄拉克符号、态矢量 $|\psi\rangle$ 、量子力学的表象理论。

1927 年,Dirac,电磁场的量子化。

1928 年,Dirac,相对论性波动方程。

至此,量子力学的基本架构已经建立,起初主要用其处理原子、分子、固体等实物粒子问题。尽管量子力学在实际问题的处理中获得了巨大成功,但是关于量子力学的基本解释和适用范围一直存在争论,最著名的有 1935 年薛定谔猫态和 1935 年 EPR 佯谬。

薛定谔猫态和 EPR 佯谬都涉及量子纠缠态,纠缠态在量子力学的基础研究和应用研究中,如量子信息处理等有着广泛而重要的应用。

1960年前后,量子理论用于电磁场(量子光学)。

1956年,Brown和Twiss,强度关联实验。

1963年,Glauber(2005年诺奖得主),光的量子相干性。

1963年,Jaynes & Cummings,JC模型,量子单模电磁场与二能级原子的相互作用。

1962—1964年,激光理论(Lamb、Haken、Lax三个主要学派)。

1970年前后,光学瞬态、共振荧光、超荧光、超辐射。

1980年前后,光学双稳态。

1990年前后,光场的非经典性质(反群聚效应、亚泊松分布、压缩态等)。

量子光学新发展主要有以下两个方面。

量子信息科学:量子通信、量子计算等。

冷原子物理:原子的激光冷却与囚禁、atom optics(通常直译为“原子光学”,但作者认为意译为“原子波学”更为合适,因为它研究的是由原子的波动性引起的物理效应)、玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)、atom laser(通常直译为“原子激光(器)”,但作者认为意译为“相干原子波激射(器)”更合适)、nonlinear atom optics(建议意译为“非线性原子波学”)等。

1.2 量子力学的基本原理^[1-3]

1. 量子体系状态的描述

在量子理论中,量子体系的状态用一个态矢量 $|\psi\rangle$ (这种形式的态矢量称为右矢)描述。态矢量满足下列线性叠加性,即

$$|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \quad (1.1a)$$

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \quad (1.1b)$$

其中, c_n 为普通的数,一般为复数。

式(1.1)称为**态叠加原理**,它是量子力学中非常重要的一条原理。

右矢的厄米共轭(Hermitian conjugate)定义为左矢,记为

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^+ \quad (1.2)$$

态矢量 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$ 的内积记为

$$\langle\psi|\varphi\rangle \equiv \langle\psi|\varphi\rangle \quad (1.3a)$$

内积为普通的数,其复数共轭为

$$\langle\psi|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|\psi\rangle \quad (1.3b)$$

态矢量 $|\psi\rangle$ 和 $|\varphi\rangle$ 的正交性表示为

$$\langle\psi|\varphi\rangle = 0 \quad (1.4a)$$

态矢量 $|\psi\rangle$ 的归一化条件表示为

$$\langle\psi|\psi\rangle=1 \quad (1.4b)$$

2. 量子体系力学量的描述

在量子理论中,量子体系的力学量用一个**线性算符**描述,线性算符 \hat{F} 满足下式,即

$$\hat{F}[c_1|\psi_1\rangle+c_2|\psi_2\rangle]=c_1\hat{F}|\psi_1\rangle+c_2\hat{F}|\psi_2\rangle \quad (1.5a)$$

$$\hat{F}\sum_n c_n|\psi_n\rangle=\sum_n c_n\hat{F}|\psi_n\rangle \quad (1.5b)$$

有时将量子力学算符称为 q 数。相应的,将经典的数称为 c 数。以后为了书写方便,在不引起混淆的情况下,我们将算符 \hat{F} 简单写为 F 。

算符 F 的厄米共轭算符记为 F^+ 。算符乘积的厄米共轭满足下式,即

$$(ABC)^+=C^+B^+A^+ \quad (1.6)$$

如果

$$F^+=F \quad (1.7)$$

那么 F 称为**厄米算符**。

算符的**本征方程**为

$$F|\psi_n\rangle=F_n|\psi_n\rangle \quad (1.8)$$

其中, F_n 称为算符 F 的本征值; $|\psi_n\rangle$ 称为算符 F 的本征矢量(**本征矢**或**本征态**)。

可以证明,线性厄米算符的本征值和本征矢具有下列性质。

① 本征值为实数: $A_n^*=A_n$ 。

② 属于不同本征值的本征矢彼此正交: $\langle\psi_m|\psi_n\rangle=0(m\neq n)$,可将本征矢的正交性和归一性统一写为

$$\langle\psi_m|\psi_n\rangle=\delta_{nm}\equiv\begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases} \quad (1.9)$$

称为本征矢 $|\psi_n\rangle$ 的**正交归一性**。

③ 本征矢张起一个**完备**的矢量空间

$$\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|=I \quad (1.10)$$

其中, I 为单位算符(或恒等算符)。

式(1.10)称为本征矢 $|\psi_n\rangle$ 的**完备性**。基于此,任意态矢量 $|\psi\rangle$ 可以用算符的本征态 $|\psi_n\rangle$ 展开为

$$|\psi\rangle=\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n||\psi\rangle=\sum_n c_n|\psi_n\rangle \quad (1.11a)$$

其中

$$c_n=\langle\psi_n||\psi\rangle\equiv\langle\psi_n|\psi\rangle \quad (1.11b)$$

由于线性厄米算符具有上述性质,实验可观测的力学量,如坐标、动量、能量、角动量、自旋等均可用线性厄米算符表示。但是,我们也会遇到一些非常重要的非

厄米算符,如光子产生算符、光子湮灭算符等。

算符 F 在量子态 $|\psi\rangle$ 中的期望值(平均值)记为

$$\langle F \rangle = \langle \psi | F | \psi \rangle \quad (1.12a)$$

平均值为 c 数。若将态矢量 $|\psi\rangle$ 按式(1.11a)用算符的本征态 $|\psi_n\rangle$ 展开,则平均值的计算公式为

$$\langle F \rangle = \langle \psi | F | \psi \rangle = \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \psi_m | F | \psi_n \rangle \quad (1.12b)$$

进一步,若 $|\psi_n\rangle$ 为 F 的本征态,即 $F|\psi_n\rangle = F_n|\psi_n\rangle$,则

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \sum_{m,n} c_m^* c_n \langle \psi_m | F | \psi_n \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_m^* c_n F_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle \\ &= \sum_{m,n} c_m^* c_n F_n \delta_{mn} \\ &= \sum_n c_n^* c_n F_n \\ &= \sum_n |c_n|^2 F_n \end{aligned} \quad (1.12c)$$

可见, $|c_n|^2$ 表示当量子体系处于量子态 $|\psi\rangle$ 时,测量力学量 F 得到其本征值 F_n 的概率。

上面讨论的是本征值不连续变化的情况(离散情况),对本征值连续变化的情况有如下性质。

① 正交归一性

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad (1.13)$$

② 完备性

$$\int dx |x\rangle \langle x| = I \quad (1.14)$$

一般态矢量的展开式,即

$$|\psi\rangle = \int dx |x\rangle \langle x | \psi \rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle \quad (1.15a)$$

其中

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle \equiv \langle x | \psi \rangle \quad (1.15b)$$

期望值

$$\begin{aligned} \langle F \rangle &= \langle \psi | F | \psi \rangle \\ &= \int dx \psi^*(x) \langle x | F \int dx' \psi(x') |x'\rangle \\ &= \int dx \int dx' \psi^*(x) \psi(x') \langle x | F | x' \rangle \end{aligned} \quad (1.16a)$$

进一步,若 $|x\rangle$ 为 F 的本征态,即 $F|x\rangle = F(x)|x\rangle$,则

$$\begin{aligned}\langle F \rangle &= \int dx \int dx' \psi^*(x) \psi(x') \langle x | F | x' \rangle \\ &= \int dx \int dx' \psi^*(x) \psi(x') F(x') \delta(x - x') \\ &= \int dx \psi^*(x) \psi(x) F(x) \\ &= \int dx |\psi(x)|^2 F(x)\end{aligned}\quad (1.16b)$$

作为特例,若 $F=x$,则 $F(x)=x$

$$\langle x \rangle = \int dx |\psi(x)|^2 x \quad (1.16c)$$

可见, $|\psi(x)|^2$ 为概率密度。

3. 量子态随时间的演化

量子体系的状态随时间的演化服从薛定谔方程,即

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle \quad (1.17a)$$

其中, H 是体系的哈密顿量(Hamiltonian)。

若 H 不显含时间,则有

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle \quad (1.17b)$$

其中

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht\right) \quad (1.17c)$$

称为时间演化算符。

4. 量子力学中的测量问题

① 设算符 A 的本征方程为 $A|\psi_n\rangle = A_n|\psi_n\rangle$,若系统处于算符 A 的本征态 $|\psi_n\rangle$,则测量力学量 A 得到相应的本征值 A_n ,测量后系统仍处于本征态 $|\psi_n\rangle$;若系统处于任意态(本征态的线性叠加态) $|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle$,则测量力学量 A 时以概率 $|c_n|^2$ 得到本征值 A_n ,若测量得到本征值 A_n ,则测量后系统塌缩到相应的本征态 $|\psi_n\rangle$ 。

② 若两个力学量算符 A 和 B 彼此对易,即 $[A, B] \equiv AB - BA = 0$,则 A 和 B 具有共同本征态,可以同时具有确定值;若 A 和 B 彼此不对易,即 $[A, B] \neq 0$,则 A 和 B 不具有共同本征态,不能同时具有确定值,其不确定度服从不确定度原理,即

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle| \quad (1.18)$$