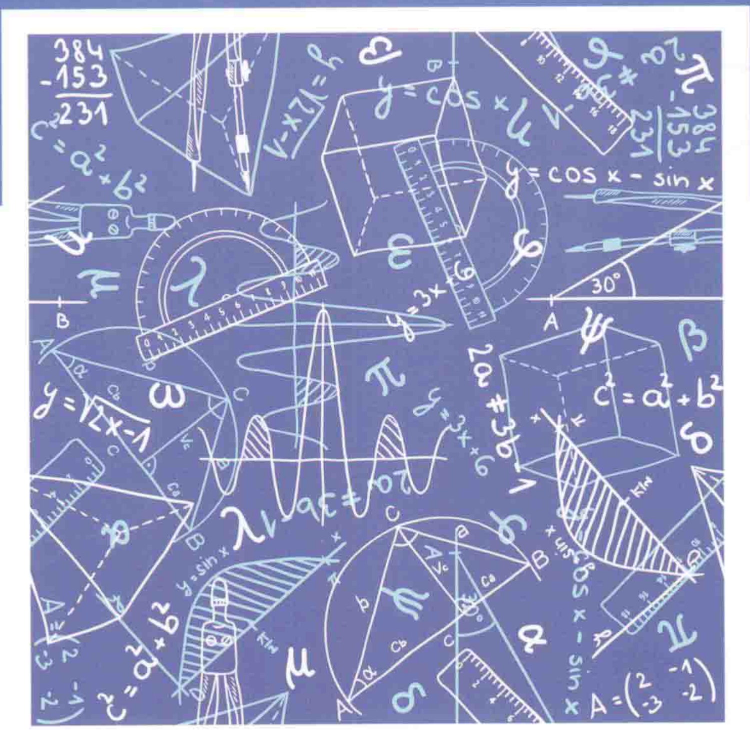
线性代数

学习指导暨习题详解



主　编：戴跃进

副主编：蔡丽娟　陈桂芝　林玉闽

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

线性代数学习指导暨习题详解

主　编：戴跃进
副主编：蔡丽娟　陈桂芝　林玉闽

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS
国家一级出版社
全国百佳图书出版单位

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导暨习题详解/戴跃进主编.—厦门:厦门大学出版社,2014.12
ISBN 978-7-5615-5353-4

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戴… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 299107 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号 邮编:361008)
总编办电话:0592-2182177 传真:0592-2181253
营销中心电话:0592-2184458 传真:0592-2181365
网址:http://www.xmupress.com
邮箱:xmup @ xmupress.com
厦门集大印刷厂印刷
2014 年 12 月第 1 版 2014 年 12 月第 1 次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:15.5
字数:380 千字 印数:1～2 000 册
定价:29.00 元

前　言

线性代数是从以矩阵为工具探求线性方程组的解的存在、数量、结构及应用等问题入手，进而研究数域上有限维向量空间及其线性映射等相关问题的一门代数学科，揭示了现代数学中几何观念与代数方法的巧妙联系，因而在数学、自然科学、工程技术、计算机图形学以及经济管理等诸多领域有着广泛的应用。

线性代数对于培养学生的抽象思维能力、运算能力、逻辑推理能力和自学能力，以及综合运用所学知识去分析并解决问题的能力，使学生基本掌握线性代数的基础理论并理解线性代数的数学思想与方法及其应用前景都是至关重要的。但因线性代数的学科特性(主要是抽象性)，故对于初学者而言，理解并掌握线性代数的基本理论和方法，提高解题能力和水平是相当迫切的要求。为此，编者依据线性代数的学科特征，结合所编教材的特点，并融入自己多年来的教学经验，编写了这本学习指导书。书中对教材中的每一章均分四个部分陈述：

1. 基本概念(即陈列本章最主要的概念)；
2. 主要结果(即陈列本章最主要的结果)；
3. 范例解读(对一些经典范例进行分析并详细解答)；
4. 习题解答(对教材中全部练习题和复习题进行分析并详细解答).

限于编者的水平，书中难免有疏漏之处，恳请同仁及读者批评指正，顺致敬意。

编者

2014 年 8 月于鹭岛

目　录

第一章　矩　阵

矩阵不仅是线性代数中一个最重要的基本概念，也是许多其他学科的最主要的工具之一，就是说，掌握了矩阵代数等于把握了线性代数的关键．我们知道，矩阵理论中的难点主要有矩阵的乘法、高阶行列式的计算、可逆矩阵（含初等矩阵）的应用以及矩阵秩的性质论证．因此，本章将就矩阵的概念、运算及其性质通过一些相关的范例进行研讨，并对笔者所编教材《线性代数》中第一章的所有练习及复习题进行详解，以飨读者。

一、基本概念

数域、矩阵、矩阵的线性运算、矩阵的乘法、分块矩阵、对换、奇（偶）排列、方阵的行列式、转置矩阵、对称矩阵、反称矩阵、伴随矩阵、可逆矩阵、行（列）初等变换、初等矩阵、行（列）等价、k 阶子式、矩阵的秩．

二、主要结果

1．数域 F 上全体 $m\times n$ 矩阵关于矩阵的加法及数与矩阵的乘法作成 F 上一个 $m\times n$ 维线性空间（即满足 8 条算律的代数系统，详见教材的第五章）．

2．矩阵的乘法满足结合律及其对加法的分配律，但不满足交换律和消去律．

3．设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上 $n\times \boldsymbol{p}$ 矩阵，则有 $(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$．

4．数域 F 上任意一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都能表示成一个 n 阶对称矩阵与一个 n 阶反称矩阵的和．

5．矩阵的分块是（数字）矩阵的运算及理论分析的一种技巧，故分块矩阵的运算规则与（数字）矩阵的运算规则相类似（但要求较多），并在运算可行时有相同的运算性质．

6．对换改变排列的奇偶性．

7．行列式的计算主要有“转置法则”、“互换法则”、“数乘法则”、“分拆法则”、“消元法则”和“降阶法则”．

8．任一 n 阶行列式都可经有限次消元变换化为上（下）三角形行列式．

9．设 $\boldsymbol{A}^*$ 是数域 F 上 $n(>1)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，那么，$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵，而且，$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$．

10．n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 满足下列条件之一：

（1.1）存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$；

（1.2）存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$；

（1.3）$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^T$ 是可逆矩阵；

(1.4)$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是可逆矩阵；

(1.5)$\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$；

(1.6)$\boldsymbol{A}$ 可经有限次行(列)初等变换化为单位矩阵；

(1.7)$\boldsymbol{A}$ 能表示成一些初等矩阵的乘积；

(1.8)$\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A}) = n$；

(1.9)$\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，且 $R(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = n$；

(1.10)$\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，且对任意 n 阶实矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的秩相等.

11. 初等矩阵是可逆矩阵，且它的逆矩阵及转置矩阵均为与其同类的初等矩阵.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，那么，用一个 m 阶初等矩阵**左乘** $\boldsymbol{A}$ 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次相应的**行初等变换**；而用一个 n 阶初等矩阵**右乘** $\boldsymbol{A}$ 相当于对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次相应的**列初等变换**.

13. 数域 F 上每个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都**行等价于**一个行最简形矩阵 $\boldsymbol{A}_0$(是唯一的).

14. 数域 F 上任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都**等价于**一个形如 $F_A = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 的矩阵，其中 $\boldsymbol{E}_r$ 是 r 阶单位矩阵(r 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩)，F_A 称为 $\boldsymbol{A}$ 的等价标准形矩阵，且它是唯一的.

15. 矩阵的行(列)初等变换不改变矩阵的秩.

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵. 那么，$R(\boldsymbol{A}) = r$ 的充分必要条件是存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

17. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times \boldsymbol{p}$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times q$ 矩阵，则有

$$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

18. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上 $n\times \boldsymbol{p}$ 矩阵，则有

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n\leqslant R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}.$$

三、范例解读

例 1. 计算下列各题：

(1) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & c\\ 2 & b & a\\ 3 & c & b\end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$；

(2) 设 $\boldsymbol{A} = [2\quad -1\quad 3]$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$ 与 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$；

(3) 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{A}^n$，其中 n 为正整数.

分析 本题涉及矩阵的计算，故可从矩阵的相关运算的定义来解题. 当命题的结果与自然数关联时，通常先计算 $n = 1,2$ 的情形，并找出规律，再采用数学归纳法论证.

解 (1) 依矩阵乘法之定义知，

$$AB=\begin{pmatrix}a+2b+3c & a^2+b^2+c^2 & ac+ba+bc\\ c+2a+3b & ca+ab+bc & c^2+b^2+a^2\\ 14 & a+2b+3c & c+2a+3b\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}a+ac+c & b+a^2+2c & c+ab+3c\\ 2a+bc+a & 2b+ab+2a & 2c+b^2+3a\\ 3a+c^2+b & 3b+ac+2b & 3c+bc+3b\end{pmatrix};$$

(2) 依矩阵乘法之定义知，$\boldsymbol{AB}=(-7)$，$\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=(-7)$，故 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{O}$，

而 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 6 & -3 & 9\\ -4 & 2 & -6\end{pmatrix}$.

(3) 对 n 作数学归纳法. 当 $n=1,2$ 时，依矩阵乘法之定义知，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix},$$

假设当 $n=k(>1)$ 时，有 $\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$,

则当 $n=k+1$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{AA}^k=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ 0 & 0 & \lambda^k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \frac{k(k+1)}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{pmatrix},$$

故依归纳法原理知，对一切自然数 $n(>0)$，恒有

$$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{pmatrix}.$$

例 2. 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m(a_m\neq 0)$，$\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，定义：$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$，称之为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式.

令 $f(x)=x^2-5x+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & 2\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$，试求 $f(\boldsymbol{A})$.

分析 此题涉及矩阵多项式的计算，故可从矩阵运算的定义及性质来考虑.

解 因 $f(x)=x^2-5x+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&5&2\\0&3&-1\end{pmatrix}$，故依矩阵多项式的定义知，

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-7&-3&-4\\24&23&20\\12&12&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&10&-15\\-20&-25&-10\\0&-15&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-9&7&-19\\4&1&10\\12&-3&15\end{pmatrix}.$$

例 3. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{pmatrix}$，试求 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{X}\in F^{n\times n},\quad \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}\}$.

分析 本题涉及矩阵的交换性问题，至于 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})$（即所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵集合）的求解，通常运用“待定系数法”，并注意到 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{E}$ 的交换性，故只需求 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{B})$ 即可，其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$.

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&2\\3&1&1\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{BX}$ 可得

$$\begin{pmatrix}3x_{13}&x_{13}&2x_{12}+x_{13}\\3x_{23}&x_{23}&2x_{22}+x_{23}\\3x_{33}&x_{33}&2x_{32}+x_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2x_{31}&2x_{32}&2x_{33}\\3x_{11}+x_{21}+x_{31}&3x_{12}+x_{22}+x_{32}&3x_{13}+x_{23}+x_{33}\end{pmatrix},$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&0&0\\x_{21}&x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}&\frac{2}{3}x_{31}\\x_{31}&\frac{1}{3}x_{31}&x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}+\frac{1}{3}x_{31}\end{pmatrix}$，其中 $x_{k1}(k=1,2,3)$ 为任意的数.

因此，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\left\{\begin{pmatrix}x_{11}&0&0\\x_{21}&x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}&\frac{2}{3}x_{31}\\x_{31}&\frac{1}{3}x_{31}&x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}+\frac{1}{3}x_{31}\end{pmatrix}\middle|\, x_{k1}(k=1,2,3)\text{ 为任意的数}\right\}$.

例 4. 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵，而 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是一个 $n\times n$ 矩阵. 证明：

1) 如果 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，则当 $k\neq 1$ 时，$a_{k1}=0$，当 $k\neq 2$ 时，$a_{2k}=0$；

2) 如果 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，则当 $k\neq i$ 时，$a_{ki}=0$，当 $k\neq j$ 时，$a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$；

3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 n 阶矩阵都可交换，则 $\boldsymbol{A}$ 一定是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

分析 本题是由特殊到一般的情形来讨论矩阵的交换性问题，且环环紧扣，故可依可

交换矩阵的定义来解题,并注意特殊矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 的乘法作用.

证明 1) 因 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,故由 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$ 可得

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

于是,当 $k\neq 1$ 时,$a_{k1}=0$,而当 $k\neq 2$ 时,$a_{2k}=0$,$(k=1,2,\cdots,n)$.

2) 因 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,故由 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$,可得

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故当 $k\neq i$ 时,$a_{ki}=0$,而当 $k\neq j$ 时,$a_{jk}=0$,且 $a_{ii}=a_{jj}$,$(i,j,k=1,2,\cdots,n)$.

3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 n 阶矩阵都可交换,则有 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$,$(i,j=1,2,\cdots,n)$. 这样,依结论 2) 知,当 $k\neq i$ 时,$a_{ki}=0$,而当 $k\neq j$ 时,$a_{jk}=0$,且 $a_{ii}=a_{jj}$,$(i,j,k=1,2,\cdots,n)$. 因此,$\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$ 为数量矩阵.

例 5. 证明:任一 n 阶矩阵都可以表示为一个 n 阶对称矩阵与一个 n 反称矩阵的和.

分析 此题涉及一般矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 及反称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的关系,注意到,对称矩阵与反称矩阵都是通过它的转置矩阵来定义的,故可从它们的转置矩阵来考虑.

令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}^T=-\boldsymbol{C}$,则由 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{B}^T+\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$,解得 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$,且 $\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$.

证明 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵,则 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}$ 与 $\boldsymbol{C}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}$ 均为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{B}^T=\left(\dfrac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^T}{2}\right)^T=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}^T=\left(\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^T}{2}\right)^T=-\boldsymbol{C}$.

因此,$\boldsymbol{A}$ 可以表示为一个 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与一个 n 反称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的和.

例 6. 计算 n 阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

分析　本题涉及高阶行列式的计算，故可依行列式的基本法则解题. 注意到，所给的行列式的元素特征，即它的各行元素之和是一个定值，故可将其各列元素和至第 1 列，提出公因子后再进行计算.

解　将行列式的各列和至第 1 列，则依行列式的性质，可得

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

例 7. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵. 证明：$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵，并求它的逆矩阵.

分析　本题涉及矩阵的可逆性的判定及逆矩阵的求解，故可依可逆矩阵的特征性质及题设条件解题. 因 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶矩阵，故需寻求一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求.

证明　依题设知，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB}$ 是可逆矩阵，故存在 n 阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 于是，$\boldsymbol{C}-\boldsymbol{ABC}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 这样，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{ABC}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.
从而，$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{ABC}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$. 即 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA}-\boldsymbol{BABCA}-\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$.
进而，有 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA})=\boldsymbol{E}$. 因此，$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{BA})^{-1}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BCA}$.

例 8. 设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_p\ (p>1)$ 均为数域 F 上的 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_p=\boldsymbol{O}$.

证明： $\sum\limits_{k=1}^{p}R(\boldsymbol{A}_k)\leqslant(p-1)n$，并举例说明其等号可以成立.

分析　本题涉及矩阵乘积的秩，故可从矩阵乘积的秩的性质来考虑，即若 $\boldsymbol{AB}$ 有定义，则有 $\min\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\geqslant R(\boldsymbol{AB})\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})-n$，其中 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数.

证明　设 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 均为数域 F 上的 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{O}$，则依矩阵乘积的秩的性质知，

$$0=R(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\geqslant R(\boldsymbol{A}_1)+R(\boldsymbol{A}_2)-n,$$

故 $R(\boldsymbol{A}_1)+R(\boldsymbol{A}_2)\leqslant n=(2-1)n$. 即结论成立.

一般地，由 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{s+1}=\boldsymbol{O}$ 可得，

$$0=R(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{s+1})\geqslant R(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)+R(\boldsymbol{A}_{s+1})-n$$

$$\geqslant R(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{s-1}) + R(\boldsymbol{A}_s) + R(\boldsymbol{A}_{s+1}) - 2n \geqslant \cdots$$
$$\geqslant R(\boldsymbol{A}_1) + R(\boldsymbol{A}_2) + \cdots + R(\boldsymbol{A}_s) + R(\boldsymbol{A}_{s+1}) - sn.$$

因此，当 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_{s+1} = \boldsymbol{O}$ 时，有 $\sum\limits_{k=1}^{s+1} R(\boldsymbol{A}_k) \leqslant sn$.

上面的不等式可以取等号.

如令 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}$，且 $R(\boldsymbol{A}_1) + R(\boldsymbol{A}_2) = 1 + 1 = 2$.

四、习题解答

练习 1.1

A1. 证明：数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ 为数域，但数集 $\mathbf{Z}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$ 不是数域.

分析　本题涉及数域的判定，故可依数域的定义来解题，其关键是验证除法.

证明　因 $1 = 1 + 0\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$，故 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ 是含有非零数的数集.

对任意的 $a + b\sqrt{-1}, c + d\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{-1})$，因 $\mathbf{Q}$ 为有理数域，故有

$$(a + b\sqrt{-1}) - (c + d\sqrt{-1}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{-1}),$$

且当 $c + d\sqrt{-1} \neq 0$ 时，c, d 不全为 0. 于是

$$\frac{a + b\sqrt{-1}}{c + d\sqrt{-1}} = \frac{(a + b\sqrt{-1})(c - d\sqrt{-1})}{(c^2 + d^2)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\sqrt{-1} \in \mathbf{Q}(\sqrt{-1}),$$

这样，依数域的定义知，$\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$ 是数域.

又 $1 = 1 + 0\sqrt{3}, 2 = 2 + 0\sqrt{3} \in \mathbf{Z}(\sqrt{3})$，但 $\dfrac{1}{2} \notin \mathbf{Z}(\sqrt{3})$，

故 $\mathbf{Z}(\sqrt{3})$ 不是数域.

A2. 证明：任何数域都是无穷集合.

分析　本题涉及数域所含元素有多少的问题，故可依数域关于加法封闭的特性来解题，其关键是找到它的无穷多个元素.

证明　设 $\mathbf{F}$ 是一个数域，则依定义知，存在数 $a \in \mathbf{F}$，且 $a \neq 0$.
于是，$0 = a - a \in \mathbf{F}$，$-a = 0 - a \in \mathbf{F}$，$2a = a - (-a) \in \mathbf{F}$，那么，$na = (n-1)a - (-a) \in \mathbf{F}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$，且当 $m \neq n$ 时，$ma - na = (m - n)a \neq 0$，其中 m, n 均为正整数. 因此，$\mathbf{F}$ 是一个无穷集合.

A3. 证明：连和号的可交换性：$\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$.

分析　因数的连和号是(有限个)数的求和的简化表示式，故连和号的可交换性问题可通过数的加法性质(即交换律和结合律)来推证.

证明　对任意的 mn 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$，因数的加法满足交换律

和结合律，故有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij} &= (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})+\cdots+(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})\\ &= (a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{m1})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{m2})+\cdots+(a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{mn})\\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.\end{aligned}$$

A4. 数域 $\mathbf{F}$ 上的零矩阵共有多少个，为什么？

分析 本题涉及零矩阵的数量，故可由零矩阵的定义来解题.

解 因为零矩阵 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 的行数 m 与列数 n 均可以是任何正整数，而正整数有无穷多个，故数域 $\mathbf{F}$ 上的零矩阵共有无穷多个. 但是，当行数 m 与列数 n 均确定时，零矩阵 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 是唯一的.

A5. 二人零和对策问题. 两个儿童玩石头 — 剪子 — 布的游戏，每人的出法只能在{石头，剪子，布}中选择一种，当他们各选定一种出法时，就确定了一个“局势”，也就决定了各自的输赢. 若规定胜者得1分，负者的 -1 分，平手各得零分，则对于各种可能的局势(每一局势得分之和为零即零和)，试用矩阵表示他们的输赢状况.

分析 依题设知，两个儿童玩石头 — 剪子 — 布的游戏实质上是二人零和对策问题. 若以矩阵的每一个元素表示他们的对局状况，即可得到相应的矩阵.

解 依题设知，若以矩阵的每一行表示他们中的一个人的出手状况(依次设为“石头”、“剪子”和“布”)，而相应的列表示他们中的另一个人的出手状况(也依次设为“石头”、“剪子”和“布”)，则所求的矩阵是

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

B1. 证明：数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}\mid a,b,c,d\in\mathbf{Q}\}$ 是数域.

分析 本题涉及数域的验证，故可依数域的定义解题，难点是验证除法.

证明 因 $1=1+0\sqrt{2}+0\sqrt{3}+0\sqrt{6}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$，故数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 含非零的数.

对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$，$\boldsymbol{\beta}=x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}+w\sqrt{6}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$，因 $\mathbf{Q}$ 是数域，故 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=(a-x)+(b-y)\sqrt{2}+(c-y)\sqrt{3}+(d-w)\sqrt{6}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$，且当 $\boldsymbol{\beta}\neq 0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}=\dfrac{[(a+b\sqrt{2})+(c+\sqrt{2})\sqrt{3}][(x+y\sqrt{2})-(z+w\sqrt{2})\sqrt{3}]}{[(x+y\sqrt{2})+(z+w\sqrt{2})\sqrt{3}][(x+y\sqrt{2})-(z+w\sqrt{2})\sqrt{3}]}=$

$$\frac{[(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})\sqrt{3}][(x+y\sqrt{2})-(z+w\sqrt{2})\sqrt{3}][(x^2+2y^2-3z^2-6w^2)-2(xy-3zw)\sqrt{2}]}{(x^2+2y^2-3z^2-6w^2)^2-8(xy-3zw)^2}$$

$\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

因此，依数域的定义知，$\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ 是数域.

B2. 证明：有理数域是最小数域，即任何数域都包含有理数域.

分析 本题涉及数域的属性问题，故需从有理数域的特性来论证.

证明 设 $\mathbf{F}$ 是一个数域，则存在 $a\in\mathbf{F}$，且 $a\neq 0$.

于是，依数域的定义知，$0=a-a\in\mathbf{F}$，$1=\dfrac{a}{a}\in\mathbf{F}$.

从而,对任意的 $x,y\in\mathbf{F}$,有 $-y=0-y,x+y=x-(-y)\in\mathbf{F}$.

进而,对任意的正整数 $m,n\neq 0$,有 $m=1+1+\cdots+1\in\mathbf{F}$,进而,$-m=0-m,\frac{m}{n}\in\mathbf{F}$.

因此,$\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{F}$.

B3. 设在 n 阶方阵 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ 中,除了次对角线(即从右上角到左下角的斜线)上的元素外的其余元素全为 0,试确定 $\mathbf{A}$ 的元素所满足的条件.

分析　本题涉及矩阵的元素特征的确定,故可从矩阵的次对角线上元素的特性来解题.

解　因 n 阶方阵中有且仅有次对角线上的元素的行标与列标之和为 $n+1$,故满足题设条件的 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的元素所满足的条件是 $a_{ij}=0,(i+j\neq n+1,\quad i,j=1,2,\cdots,n)$.

B4. 现有 5 支足球队参加循环赛,比赛成绩如下:甲队胜乙队、丙队和戊队,但负于丁队;乙队胜丙队和戊队,平丁队;丙队胜丁队,平戊队;丁队平戊队. 若规定:胜一场得 3 分,平一场各得 1 分,负一场得 0 分. 试用矩阵表示各队的比赛状况.

分析　本题涉及矩阵的应用,可以用矩阵的行(列)表示参赛队比赛状况.

解　依题设知,若用矩阵的每一行表示某支球队循环赛(得分)状况,且按球队甲、乙、丙、丁、戊的顺序排列,则所求的矩阵是

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}\text{甲}&\text{乙}&\text{丙}&\text{丁}&\text{戊}\end{array}\\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&3&3&0&3\\0&0&3&1&3\\0&0&0&3&1\\3&1&0&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\text{甲}\\\text{乙}\\\text{丙.}\\\text{丁}\\\text{戊}\end{array}\end{array}$$

练习 1.2

A1. 计算下列矩阵:

(1) $3\begin{bmatrix}0&1\\2&-3\\5&8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3&2\\1&8\\0&2\end{bmatrix}$;　(2) $2\begin{bmatrix}1&-2\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&10\\5&3\end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&b&a\\-3&-2&-1\end{bmatrix}^T$;　(4) $[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

分析　本题涉及矩阵的计算,故可依矩阵的运算定义解题.

解　(1) $3\begin{bmatrix}0&1\\2&-3\\5&8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3&2\\1&8\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3\\6&-9\\15&24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&4\\2&16\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\8&7\\15&28\end{bmatrix}$;

(2) $$2\begin{bmatrix}1&-2\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&10\\5&3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\times7+(-2)\times5&1\times10+(-2)\times3\\3\times7+5\times5&3\times10+5\times3\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-3&4\\46&45\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-6&8\\92&90\end{bmatrix};$$

$$(3)\begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&b&a\\-3&-2&-1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\a&b&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&-3\\b&-2\\a&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}c+2b+3a&-10\\b^2+2ac&-3a-2b-c\end{bmatrix};$$

$$(4)\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{bmatrix}$$

$$=[x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_2)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3)+x_3(a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)]$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\right];$$

A2. 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&x\\y&0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}u&2y\\3&5v\end{bmatrix}$. 若 $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,试求 x,y,u,v 的值.

分析 本题涉及矩阵相等及其线性运算,故可依矩阵的相关概念解题.

解 依题设知,$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}4+3u&2x+6y\\2y+9&0+15v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.

解得 $x=\dfrac{27}{2},y=-\dfrac{9}{2},u=-\dfrac{4}{3},v=0$.

A3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}$,求所有与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵作成的集合.

分析 本题涉及矩阵的交换性问题,故可依可交换矩阵的定义及待定系数法来解题.

解 令 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\mid\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\}$,其中 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$. 那么,

$$\boldsymbol{XA}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&2a+3b\\c&2c+3d\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\3c&3d\end{bmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}$,解得 $c=0,b=d-a,a,d\in F$.

因此,$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\left\{\begin{bmatrix}a&d-a\\0&d\end{bmatrix}\middle|\ a,d\in F\right\}$.

A4. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $n\times t$ 矩阵. 证明:$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

分析 本题涉及矩阵运算性质的验证,故可依矩阵的乘法、加法及相等的定义论证.

证明 令 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$,$\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{n\times t}$,则依矩阵的乘法定义知,$\boldsymbol{AC}$,$\boldsymbol{BC}$ 及 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times t$ 矩阵,故 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ 为同型矩阵.

进而,依矩阵乘法的定义知,矩阵 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列元素为

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj},$$

再依数的运算性质知,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj},(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,t).$$

上式右端恰好是矩阵 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$ 的第 i 行第 j 列元素 $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,t)$.

因此，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

A5. 证明：对任意两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，均有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$.

分析　本题涉及矩阵运算性质的验证，故可依矩阵的转置、加法及相等的定义论证.

证明　令 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$，

则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$，且 $\boldsymbol{A}^T=[a_{ji}]_{n\times m}$，$\boldsymbol{B}^T=[b_{ji}]_{n\times m}$.

于是，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=[a_{ji}+b_{ji}]_{n\times m}=[a_{ji}]_{n\times m}+[b_{ji}]_{n\times m}=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$.

A6. 证明：对任意两个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，均有 $Tr(\boldsymbol{AB})=Tr(\boldsymbol{BA})$.

分析　本题涉及矩阵的迹的性质的验证，故可依矩阵的乘法和迹的定义论证.

证明　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$，则

$$Tr(\boldsymbol{AB})=Tr\left(\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},$$

$$Tr(\boldsymbol{BA})=Tr\left(\left[\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki},$$

故 $Tr(\boldsymbol{AB})=Tr(\boldsymbol{BA})$.

A7. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换. 设

(1)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　　(2)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$，

求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

分析　本题涉及矩阵的交换性问题，故可依可交换矩阵的定义及“待定系数法”来解题.

解　(1) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$可交换，则有$\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{bmatrix}$.

解得 $c=0$，$a=d$. 故 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\0&a\end{bmatrix}\middle|\ a,b\in F\right\}$.

(2) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}a&b&c\\x&y&z\\u&v&w\end{bmatrix}$与$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&2&0\\-2&0&1\end{bmatrix}$可交换，则有

$$\boldsymbol{XA}=\begin{bmatrix}3a+b-2c&2b&c\\3x+y-2z&2y&z\\3u+v-2w&2v&w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3a&3b&3c\\a+2x&b+2y&c+2z\\-2a+u&-2b+v&-2c+w\end{bmatrix}=\boldsymbol{AX},$$

解得 $b=0$，$c=0$，$v=0$，$z=0$，$x=a-y$，$u=w-a$.

故 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A})=\{\boldsymbol{X}\mid \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\}=\left\{\begin{bmatrix}a&0&0\\a-y&y&0\\w-a&0&w\end{bmatrix}\middle|\ a,y,w\in F\right\}$.

A8. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，求证：对任意正整数 n，均有 $\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$.

分析　本题涉及矩阵方幂的运算性质，故可运用数学归纳法解题.

证明　(对 n 作数学归纳法) 当 $n=1$，$\boldsymbol{A}=2^0\boldsymbol{A}$，故命题成立.

假设命题当 $n=k$ 时成立，即 $\boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}$，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=2^{k-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=2^{k-1}(2\boldsymbol{A})=2^k\boldsymbol{A}.$$

这样，依数学归纳法原理知，$\boldsymbol{A}^n=2^{n-1}\boldsymbol{A}$ 对一切正整数 n 成立.

A9. 证明：矩阵的共轭运算具有下列性质（假设矩阵的运算都是可行的）：

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$；

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=\overline{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$；

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

分析　本题涉及矩阵的共轭运算性质的验证，注意到共轭矩阵的定义，故可依复数的共轭运算及矩阵运算的定义论证.

证明　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$，则依复数的共轭运算及矩阵运算的定义知，

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=[\overline{a_{ij}+b_{ij}}]=[\overline{a_{ij}}+\overline{b_{ij}}]=[\overline{a_{ij}}]+[\overline{b_{ij}}]=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$；

(2) $\overline{k\boldsymbol{A}}=[\overline{ka_{ij}}]=[\overline{k}\,\overline{a_{ij}}]=\overline{k}[\overline{a_{ij}}]=\overline{k}\,\overline{\boldsymbol{A}}$；

(3) $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}=\left[\overline{\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}}\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ik}b_{kj}}\right]=\left[\sum_{k=1}^{n}\overline{a_{ik}}\,\overline{b_{kj}}\right]=[\overline{a_{ij}}][\overline{b_{ij}}]=\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}$.

B1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$，证明：对任意正整数 k，有 $\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\cos k\varphi & \sin k\varphi\\ -\sin k\varphi & \cos k\varphi\end{bmatrix}$.

分析　本题涉及矩阵方幂的运算性质，故可运用数学归纳法解题，注意到矩阵的元素是三角函数，故还需应用三角函数的运算性质.

证明（对 k 作数学归纳法）当 $k=1$ 时，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$，故结论成立；

假设结论当 $k=m$ 时成立，即 $\boldsymbol{A}^m=\begin{bmatrix}\cos m\varphi & \sin m\varphi\\ -\sin m\varphi & \cos m\varphi\end{bmatrix}$，则当 $k=m+1$ 时，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{m+1}=\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}\cos m\varphi & \sin m\varphi\\ -\sin m\varphi & \cos m\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\cos(m+1)\varphi & \sin(m+1)\varphi\\ -\sin(m+1)\varphi & \cos(m+1)\varphi\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

故依数学归纳法原理知，结论对一切正整数 k 成立.

B2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶对称矩阵. 证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

分析　本题涉及对称矩阵的运算性质的验证，而“取转置不变”是对称矩阵的特征性质，故可依矩阵转置的性质解题.

证明　依题设知，$\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，且 $\boldsymbol{B}^T=\boldsymbol{B}$，故 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.
因此，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

B3. 证明：对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，均有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}_n$（$n$ 阶单位矩阵）.

分析　本题涉及矩阵特殊运算（“**对称差**”）的性质，故需用特殊方法解题.

证明　设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，则依矩阵迹的性质知，$Tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=Tr(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$.
于是，$Tr(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})=0$，而 $Tr(\boldsymbol{E}_n)=n$. 因此，对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，必有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{E}_n$.

B4. 求下列矩阵的方幂，并用数学归纳法证明之.