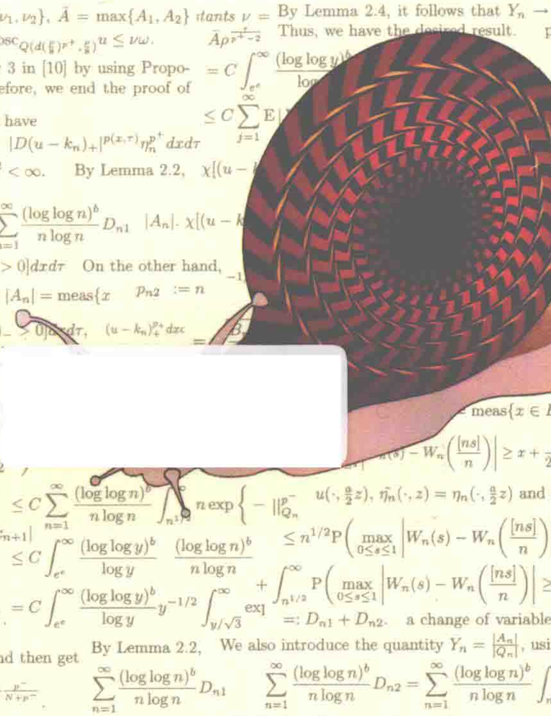
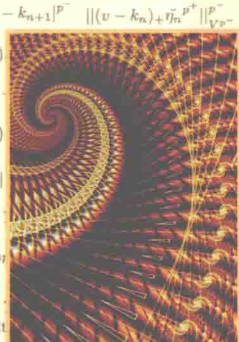
# 数论中的美学

# THE AESTHETICS IN NUMBER THEORY

● 邹青 编著



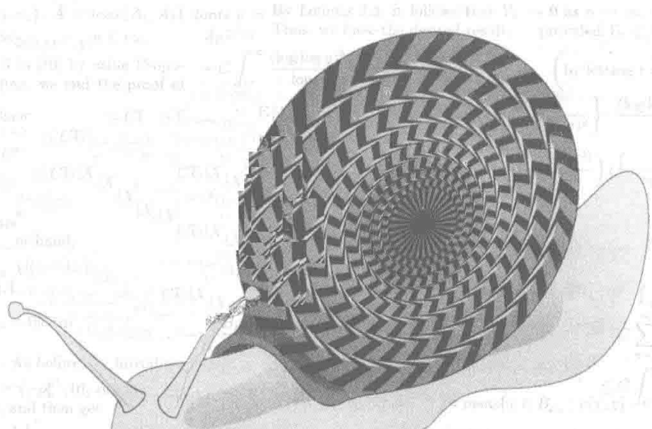


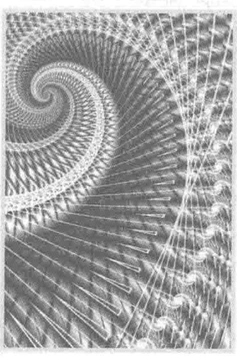
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 数论中的美学

## THE AESTHETICS IN NUMBER THEORY

邹青 编著





哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容提要

本书是为适应21世纪人文数学的发展及科学普及的需求，按照数论发展的时间顺序编著而成. 全书分为6章以及4个附录. 本书主要介绍数论和美学两门交叉学科的内容，注重跨学科领域的运用，着力讲述数论中的经典问题和前沿问题，并以美学的角度对这些问题加以审视. 全书以点带面，为数论和美学的研究起到抛砖引玉的作用.

本书可作为大、中学生的科普读物，也可作为本科数学专业人文数学类选修课程的教材或参考书目.

**图书在版编目(CIP)数据**

数论中的美学/邹青编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2014.12

ISBN 978-7-5603-5105-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①邹… Ⅲ.①数论-青少年读物 Ⅳ.①O156-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第303520号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 马静怡 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张18 字数352千字
版　　次 2014年12月第1版 2014年12月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5105-6
定　　价 38.00元

# 序①

生活在当今社会, 我们每一个人都会在不同的层面意识到数学科学的重要. 然而, 由于这门科学的严谨性和抽象性, 使得许多人对其常怀敬畏之心而鲜有欣赏之趣. 其实, 正如罗素所说: “数学, 如果正确地看它, 不但拥有真理, 而且也具有至高的美, 正像雕像的美, 是一种冷而严肃的美, 这种美不是投合我们天性微弱的方面, 这种美没有绘画或音乐的那些华丽装饰, 它可以纯净到崇高的地步, 能够达到只有最伟大的艺术才能显示的那种严格完美的境地.”

谈到数学美学, 就不能不追溯到古希腊时期. 从哲学的层面来看, 希腊文化的本质是对人与宇宙、人与社会的和谐的探索. 毕达哥拉斯提出“美就是和谐”, 正是这种艺术精神的理论概括以及受这种观念的影响, 古希腊的数学家们在某种形式上亦是美学家, 他们在整理和研究数学问题时, 也受到了美学观点的影响. 例如亚里士多德便认为: “美的主要形式为‘秩序、对称与明确……’, 又因为这些形式显然是许多事物的原因, 数理诸学自然也必须研究以美学为目的的这一类因果原因.” 在古希腊数学家的眼里, 数学本身就是美学的四大构件之一. 这四大构件包括史诗、音乐、造型 (绘画、建筑等) 和数学. 因而, 认识数学之美也是审美素质教育的一部分.

然而, 数学美既不纯粹是外部自然的客观存在, 也不纯粹是主体内部的主观状态, 它既不同于绘画、音乐等艺术之美, 也不等同于鲜花、彩虹等自然之美, 它起源于数学思维对自然规律的洞悉与领悟, 表现为主体情感上的某种愉悦和快意. 同时, 由于感官仅能认识事物的表象, 而只有理性才能把握自然界或理想界的内在规律, 因而数学美实质上是一种理性美.

随着社会的进步和教育的发展, 对美的欣赏与追求正日益广泛地渗透到社会

①本序作者系扬州大学数学科学院教授, 普通高等教育“十一五”国家级规划教材《数学史》一书作者.

的各个领域中. 人们不仅可以通过音乐、绘画、艺术得到美的熏陶, 而且也可以通过自然、社会、科学来美化愉悦精神. 我们在学习、研究数学的过程中, 通过对数学美的感受、鉴赏和应用, 可以进一步激发对数学的兴趣和热情, 提高认知水平和处理问题的能力, 全面提升我们的综合素质.

《数论中的美学》一书的作者试图从数论这一数学的古老而又充满无限活力的分支中挖掘数学之美, 通过许多有趣的问题给我们展示了数学的抽象美、统一美、和谐美、对称美和形式美等. 我们有理由相信, 通读这本小书, 可以使我们领略数学美的同时, 对数学产生应有的兴趣.

**朱家生**

**2012 年 10 月**

# 前　言

在数学专业中, 基础课程 (分析、代数、几何) 的主体地位导致了许多数学分支面临着一个重要的问题 —— 地位不断下降, 这一点致使数学在中国的基础教育阶段发展极为缓慢. 但值得欣慰的是许多社会教育机构为了弥补这一不足, 开展了"人文数学"兴趣培养的讲座, 通过讲述数学分支的人文性从而将一些课程提上日程.

本书的内容是根据在讲述"人文数学之数论与美学"时的讲稿加以系统化、书面化所编著的. 在讲述"人文数学之数论与美学"时我发现学生对于人文数学一块具有浓厚的兴趣, 而这一点对于数学的教育和发展具有良好的促进作用, 于是在学生的热情帮助下决定将此课题更详细地加以阐述, 也就形成了现在的《数论中的美学》一书. 此书的基础—— 人文数学之数论与美学的讲稿在上课时吸引了学生的极大兴趣, 这是对人文数学和数学科学发展的莫大支持.

在此, 首先要感谢在本书成书之前 CTeX 论坛的一些同志提供的帮助. 本书经过两年时间终于得以完成, 在此段时间内, 本书中的内容经过两次大修改, 使得本书内容变的更为顺畅和完善. 而在这两次大修改中不得不感谢许多高校的老师的指点和修改意见. 另外, 还要感谢扬州大学朱家生教授在百忙之中抽空为本书作序.

**作者**

**2012 年 9 月于苏州**

在全书付梓之前, 十分高兴听到了北大 78 级校友张益唐先生在孪生素数上取得了重大突破这一惊人消息, 当时在脑海中浮现的第一念头就是一定要将这一成果在《数论中的美学》一书中加以介绍. 恰巧全书还未出版, 所以有机会增写

这一成果, 我想这或许是冥冥之中自有天意吧.

我十分感谢叶润萍教授以及顾江永、李红玲夫妇对我的无私帮助. 在今年 6 月份我恰巧遇到了中国科学院院士、中国科学院数学与系统科学研究院研究员、博士生导师林群. 林院士一生热爱科普事业, 在与林院士的谈话中, 他对本书极为关注, 同时也给予了我极大的支持, 在这里我对林院士表示深深的谢意. 我的导师: 江苏大学博士生导师、渥太华卡尔顿大学兼职教授、加州大学讲座教授黄骏在本书的写作过程中对我十分关心并提供给我良好的写作环境, 同时帮我完成了本书的最后一个附录, 使本书更为完善. 另外, 特别要感谢本书的编辑杜莹雪对本书的细致审查和校对, 是她的细致工作让本书增色不少.

千言万语道不尽美学之冰山一角, 我们在本书中讲述的数论美学主要是引导学生进行美学探索. 因此, 本书不可能将所有数论美学都讲述到位. 当然, 由于作者水平所限以及两年来陆陆续续的修改, 书中也不免存在诸多疏漏, 希望读者指正.

**邹青**

**2013 年 7 月于苏州**

# 目 录

# 第零章　绪论 —— 数论中的美学

哪里有数, 哪里就美.

—— 普罗克洛斯

只有音乐堪与数学媲美.

—— A.H. 怀海德

数学和诗歌都具有永恒的性质.

—— R.D. 卡迈克尔

提及美学, 很多人首先联想到的就是艺术, 但经千年发展, 人们发现数学中也蕴藏美学. 故从某种角度讲, 数学不仅是一门自然科学, 同时也是一门社会科学—— 艺术性与人文性并存的社会科学.

正是因为数学具有艺术性与人文性, 越来越多的数学家及数学工作者开始将数学与美学联系在一起, 并将数学美学总结归纳为: 符号美、抽象美、统一美、和谐美、对称美、形式美、奇异美、有限美、神秘美 (朦胧美)、常数美.

本书选取数学的一个方向—— 数论来讲述数学美, 而在讲述数论中的美学时, 读者会发现, 虽然我们从数学的一个角度出发, 但最终也会回到以上这些美中, 即数论中的美学也可以总结为上述几种美.

数学美学这个话题是 21 世纪的重要课题, 它的研究具有重要意义. 刚踏入 21 世纪不久, 吴振奎以及吴旻两位教授就书写了《数学中的美》一书, 两位教授通过数学美的简洁性、数学美的和谐性、数学美的奇异性、美的扭曲、数学美学的研究意义 5 个方面阐述了数学美学, 全书从数学的整体角度出发, 统一地书

写了数学美学. 现今, 随着社会的进步, 我们对数学美学的研究应该进一步扩大, 更重要的是要将数学美学进一步细化. 由于数学科学的复杂性以及包含内容的广阔性, 统一地讲述数学美学已是不现实了, 当然也不可能写出来. 故从数学的各个方向, 各个角度讲述数学美学就成为了重要课题. 本书从数论方向讲述数学美学, 即讲述数论中的美学.

虽然, 数论仅是数学的一个方向, 但是数论却又有多个分支. 至今为止, 发展的较为全面且已作为一门独立科学来研究的数论分支包括: 初等数论、解析数论、代数数论、算术代数几何、几何数论、计算数论、超越数论、组合数论、模形式. 本书将讲述几个主要数论分支中的美学, 并且, 每个分支选取的都是在这个分支中公认的经典问题, 我们从这些经典问题出发讲述数论中的美学.

吴振奎以及吴旻两位教授的书写内容较为广泛, 尤其是其中包含了许多初等数论的东西. 本书的目的在于引导读者发现蕴含在数论中的美学, 所以, 我们避免在许多书中已经讲的很多的东西, 我们尽量选择原始的材料来讲述, 因此, 在讲述初等数论中的内容时, 本书可能讲的比较少, 因为初等数论中的美学已经在许多书籍中有讲述. 我们侧重于后面章节, 因为其他数论分支方面的美学在现今的书籍中讲述得非常少, 另外, 本书对于许多书中写过的例子如果不可避免地讲述的话, 也会讲得极其简单.

笔者认为, 只有当生活与数学高度结合时, 数学美学才能体现的淋漓尽致. 而且, 自然界和人类社会本身就是一本“最经典的美学教材”, 蜂巢的排布, 雪花的形状 …… 无一不体现着最本质、最简洁但却又是最真实无华的美. 因此, 我们在后面的讲述中, 将“不厌其烦”的从自然界和人类社会这本“美学教材”中取材, 将最为朴实的美展现在读者面前.

这么多数论分支虽然都已形成自己的体系, 但在几个分支中仍存在着许许多多尚未解决的问题. 比如说, 超越数论虽已形成体系, 且拥有自己所要研究的问题和研究问题的方法, 但是其仍然是一个朦胧的数论分支, 因为其中还有很多尚未解决的问题, 这些问题也就成了数论中的混沌部分. 在本书的讲述中, 我们不会避讳这些问题, 当这些问题与我们的课题相关时, 我们同样会讲述. 一来, 这样做可以完善我们所要讲述的数论中的美学这一课题; 二来, 提出这些问题供大家思考, 更利于推动数论科学的发展.

数论中的美学, 顾名思义既讲数论又讲美学, 但何为重点呢? 马克思主义哲

学中有两点论和重点论一说, 但在我们的这个课题中, 有的只是“两个重点”, 我们不会离开数论讲美学, 更不会离开美学讲数论.

毕达哥拉斯 (Pythagoras) 学派 (也叫毕氏学派) 认为整个天体宇宙就是和谐与数. 因此, 数在很早时期就被认为是数学亦或是整个人类社会最主要的一个组成部分. 正因如此, 我们首先选择了数论这个方向来阐述数学美.

在绪论开篇的名句中,A.H. 怀海德就说: “只有音乐堪与数学媲美.” 而最早将音乐和数学联系在一起的就是毕达哥拉斯学派. 他们曾提出一个声调对比关系公式: 八度音 : 基本音调 =1 : 2, 八度音 : 五度音 =2 : 3, 八度音 : 四度音 =3 : 4. 由此, 我们可以看出, 在古时候, 人们就开始用数字来表达音乐中的一些规律. 因此, 我们可以认为初等数论是最早与音乐联系在一起的, 即这是人们最早将数学与美学联系在一起的例子.

伽利略认为: 数是上帝用来书写宇宙的文字.

爱因斯坦说: 这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学的公式组成.

在文学中有一个概念叫做“回文”(这个概念其实对阿贝尔和伽罗瓦发展群论有着重要影响的, 这一点在《无法解出的方程》一书中也稍有叙述), 其定义是把相同的词汇或句子在下文中调换位置或颠倒过来, 产生回环的情趣. 有时也叫“回环”. 现在我们来看一首中华民族特有的回文诗,

| 思妻诗 | 思夫诗 |
|---|---|
| 枯眼望遥山隔水, | 儿忆父兮妻忆夫, |
| 往来曾见几心知? | 寂寥长守夜灯孤. |
| 壶空怕酌一杯酒, | 迟回寄雁无音讯, |
| 笔下难成和韵诗. | 久别离人阳路途. |
| 途路阳人离别久, | 诗韵和成难下笔, |
| 讯音无雁寄回迟. | 酒杯一酌怕空壶. |
| 孤灯夜守长寥寂, | 知心几见曾往来, |
| 夫忆妻兮父忆儿. | 水隔山遥望眼枯. |

这是宋代李禺的《两相思》, 当位置颠倒时, 产生别样的情趣, 表达了不同的感情. 根据文学中的回文诗, 我们在数论中发展了回文质数这一概念, 将原来的文字情趣发展为了数论美. 所谓回文质数就是指某数是质数, 把该数的各个数字倒

过来写, 所得到的数仍然是质数. 例如:

$$13\text{和}31,\quad 17\text{和}71,\quad 113\text{和}311,\quad 347\text{和}743,\quad 769\text{和}967$$

都是回文质数正是在这些数字的位置变换中, 数论中的美学也就产生了, 虽然这个简单的例子可能并没有引起强烈的视觉及心灵的震撼 (后面给出的一些例子将会使读者产生强烈的视觉及心灵的震撼), 但数论中的美学确确实实在其中慢慢发展起来了, 因为有时颠倒也是一种美 (对称美).

整除理论是初等数论一个重要的组成部分, 而我们可以将整除这个概念文学化, 使之除了具有数学独有的美外另具其他美. 如:

$$\frac{\text{一个原子}}{\text{一滴水}}=\frac{\text{一滴水}}{\text{整个地球}}.$$

这个整除性比喻从数论的角度展示了生活中的一些物质关系. 同时它也体现了数论整除性的文学美 (形式美).

数论中, 特殊的不定方程自古以来就是重要的课题. 现在, 我们给出一个不定方程:

$$X+Y+Z=A.$$

读者在看到这个不定方程后, 脑海中的第一印象是什么? 我们在这里给出一个解答, 爱因斯坦对这个不定方程赋值: 若 $X=$ 艰苦的劳动, $Y=$ 正确的方法, $Z=$ 少说空话, 则 $A=$ 成功. 不得不说, 当这个不定方程这样赋值时, 数论的美就被体现出来了 (抽象美).

对于上述的不定方程, 当我们赋予不同的东西 (可以是数字, 可以是文字, 可以是矩阵, 可以是 ······) 时, 它就能从各个角度体现不同的美, 而这些美都是数论所特有的. 对数论的抽象美而言, 还有一个经典例子就是爱迪生用来比喻灵感与劳动的百分比关系.

接下来, 我们举 5 个体现数论中常数的奇异美的例子来结束我们的绪论, 同时, 这几个例子也当作是第一章“常数的魅力”的开篇引例.

1. 数字黑洞—— 1(角谷游戏)

任取一个正整数, 如果它是偶数, 就除以 2, 如果它是奇数, 就用它乘 3 再加 1. 将所得到的结果不断地重复上述运算, 最后的结果总是 1.

例如正整数 7:

$$
\begin{array}{lll}
7\times3+1=22, & 22\div2=11, & 11\times3+1=34,\\
34\div2=17, & 17\times3+1=52, & 52\div2=26,\\
26\div2=13, & 13\times3+1=40, & 40\div2=20,\\
20\div2=10, & 10\div2=5, & 5\times3+1=16,\\
16\div2=8, & 8\div2=4, & 4\div2=2,\\
2\div2=1, & 1\times3+1=4, & 4\div2=2,\\
2\div2=1. & &
\end{array}
$$

正整数 10:

$$
\begin{array}{lll}
10\div2=5, & 5\times3+1=16, & 16\div2=8,\\
8\div2=4, & 4\div2=2, & 2\div2=1,\\
1\times3+1=4, & 4\div2=2, & 2\div2=1.
\end{array}
$$

2. 数字黑洞——123

任取一个正整数, 将组成这个数的偶数的数字个数, 奇数的数字个数和这个数的数字位数依次写下来, 组成一个新的数, 重复上述步骤, 你会发现, 最后的结果始终是 123.

例如正整数 13246670125:

$$13246670125\rightarrow6511\rightarrow134\rightarrow123.$$

3. 折纸问题

一张薄纸, 不断对折, 折 30 次后, 纸叠得有多厚?