理工社®

[2015 · 张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（精解分册 · 数学 二）

史上最全
含1987–2014年
全部真题

AUTHENTIC EXAMINATION PAPERS WITH ANSWERS

Mr. Zhang

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

理工社®

[张宇考研数学系列丛书]

张宇

CLASSIC

考研数学
真题大全解

（精解分册 · 数学二）

张宇 ◎ 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学真题大全解. 精解分册. 数学二 / 张宇主编 . —北京:北京理工大学出版社,2014.7
ISBN 978-7-5640-9481-2

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解　Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 148154 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
82562903(教材售后服务热线)
68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 13
字　　数 / 316 千字
版　　次 / 2014 年 7 月第 1 版　2014 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 / 40.00 元(共 2 册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

——给读者一个全面的考研数学历史资料

先给读者讲个故事.1637 年,法国律师费马到图书馆看书,在书上读到一句话:“方程 $x^2+y^2=z^2$ 有正整数解.”现在说来,小学生都知道:$3^2+4^2=5^2$,上述命题显然成立.然而,费马没有就此罢休,他违反图书馆规定,在书上“乱写乱画”:“你们不要以为这个事情很简单,方程 $x^3+y^3=z^3$ 一定没有正整数解,方程 $x^4+y^4=z^4$ 一定没有正整数解,…,也就是说,对于方程 $x^n+y^n=z^n$,只要 $n\geqslant 3$ 为正整数,则这样的方程就一定没有正整数解了.”这等于是提出了一个前所未有的定理,是公然向数学界提出挑战.不仅如此,费马还在这个定理后写了更让人惊讶的一句话:“我已经给上述定理做了完整美妙的证明,只是这个位置太小了,所以我就不写了.”——这哪里是挑战?简直就是挑衅!

数学界应战吗?那是当然,数学界绝不缺乏天才,怎么会被一个“外行”难倒?于是,读者所熟悉的大数学家高斯、罗尔、莱布尼兹等等均开始研究费马的这个定理,可是历史就是这么奇妙,他们都没有证明出来.一百年过去了,两百年过去了,三百年过去了……直到 1993 年,也就是在费马提出这个定理的 356 年之后,才被美籍英裔数学家外尔斯证明出来,单单证明就写了 1000 多页.外尔斯的证明举世震惊,因此他也获得了至今唯一一个最高数学奖——菲尔兹奖(“唯一”是因为菲尔兹奖只授予 40 岁以前的数学家,但是当时的外尔斯已经 45 岁了,由于他的贡献太大,所以破例授予他这个数学上的最高奖).

费马的这个定理,被数学界称为“会下金蛋的鸡”,因为在证明这个定理的数百年中,产生了好多独立的数学分支,使得数学得到了蓬勃发展,这正是:提出一个好的问题,往往比解决它更有价值.因此,费马的这个定理被正式命名为:**费马大定理**.你见过有几个定理叫“大定理”?很少很少.一个“大”字,足以体现这个定理的分量.

故事讲完了,这里讲了什么道理呢?读者自己体会吧——其实,我什么道理都没讲——我只想借用“费马大定理”的“大”字,把我的这本书命名为:真题“大”全解.因为,这本书,我以为,相对于其他真题书来讲,是最有分量的.

一、真题的重要性不言而喻

从 1987 年开始,考研数学实行了全国统一考试的形式,考研数学的命题也由此走上了正轨——其科学性、严肃性、稳定性逐渐达到了国家标准.直到今天,几十年下来,考研数学的命题可以说极其成熟了,也逐渐出现了如下两大特点:

第一,**考研数学命题的风格稳定:重视基础,淡化技巧,计算量大**.考研数学试题是命题组集体智慧的结晶,在确定了上述命题的风格和原则后,考题受到命题组各位成员自身“喜好”的影响很小.所以,做好历年真题,是熟悉考研数学风格的好路子.

第二,**考研数学命题的形势特殊:命题时间短,任务重,参考以往考题成为必须**.为了确保考研数学命题的安全性,不出现泄漏考题的情况,现在的考研命题时间很短,已经不再像多年前那样宽松(以前命题都是提前半年出好题,有足够的时间来校对和检验试题的正确性和科学性)——在考前集中命题,几乎没有时间去校对和检验了.所以,为了保证试题不出错且难度适中,命题人盯上了从

1987 年到今天积累下来的命制过的试题（这里还包括从未考过的备考卷上的试题），以此为基础，“参考”“改编”甚至“照搬”这些题.故，读者应该懂得，做好历年真题，是预测考研数学考题的好路子.

二、做好真题解析的两大原则

考研数学的历年真题解析需要贯彻两个原则.

第一，**考研数学试题收录的全面性**.收录从全国统考以来所有的考研数学试题，给读者提供一个完整的历史资料，而不是部分试题．从而，力图给读者提供原汁原味的历年的实考题，是本书坚持的第一个原则.

第二，**考研数学试题解析的权威性**.凡是有当年命题人自己写的答案，忠实其答案；凡是有当年考试中心组织的专家写的答案，参考其答案.总之，本书对真题的答案解析，是最权威、最深刻的，这是本书坚持的第二个原则.

这两个原则，事实上，就是本书分量最重的地方——每一道题的收录，都有根有据；每一道题的解析，都有源有头.

三、本书使用说明

本书共分两册——试卷分册和精解分册.试卷分册中，我将 1987 年至 2014 年的真题试卷完整地展现给读者，供读者检测、演练之用；精解分册中，试题及其解析则按章节进行分类，方便读者按照章节的逻辑性研读真题.其中，为了不影响考生有针对性地备考，有些较早年份的超纲题目，我做了必要的删除.那么在试卷分册中，被删除题目的套卷中，余下试题的分值稍作调整以使其总分仍为满分.当然，考虑到读者在做题之余需查阅答案及解析，我们不仅在每套试卷后安排了答案速查栏目，同时也将试卷分册与精解分册做了全面的索引.值得注意的是，本书仅为数学二的真题大全解，需考数学二的考生若做完了这本书的题目，想再多做演练，亦可参考数学一与数学三的真题大全解.

对于真题大全解的使用，与习题集的使用有类似之处.我在《张宇考研数学题源探析经典 1000 题》中已经给读者提出了建议：把题目的演算过程写到草稿纸上去，把做题后看着答案详解做的标注写到笔记本上去，总之，不要在题目上做任何标记——这样做的目的很明确——如果此题你第一次做的时候不会做或者做错了，当你下次再做这个题目时，不要有任何提示的情况下，你能保证自己一定会做吗？“干干净净”的真题集，事实上是对读者提出了高标准、严要求，希望读者把真题全部做完一遍后，第二遍就能够查漏补缺、扫清死角.

感谢从命题组中退下来的老专家们，在数学原题的收集、确认与解析中，他们作出了重要贡献.感谢北京理工大学出版社的各位领导和编辑，感谢高等教育出版社的刘佳同志，他们给作者提供了很多便利和帮助.

张宇

2014 年 7 月 于北京

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇

高等数学

第1章　函数、极限与连续

一、选择题

1.1.[1987－Ⅲ]　$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是

(A)有界函数.　(B)单调函数.　(C)周期函数.　(D)偶函数.

答　应选(D).

解　由于$f(-x)=|-x\sin(-x)|e^{\cos(-x)}=|x\sin x|e^{\cos x}=f(x)$,则$f(x)$为偶函数.

1.2.[1987－Ⅲ]　函数$f(x)=x\sin x$

(A)当$x\to\infty$时为无穷大.　(B)在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C)当$(-\infty,+\infty)$内无界.　(D)当$x\to\infty$时有有限极限.

答　应选(C).

解　由于$f(2k\pi)=2k\pi\sin 2k\pi=0$,$f\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无界,但$x\to\infty$时,$f(x)$不是无穷大,也没有有限极限.则应选(C).

1.3.[1990－Ⅲ]　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中$a,b$是常数,则

(A)$a=1,b=1$.　(B)$a=-1,b=1$.

(C)$a=1,b=-1$.　(D)$a=-1,b=-1$.

答　应选(C).

解　由$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$知,

$$1-a=0,a+b=0,\text{则 }a=1,b=-1.$$

1.4.[1992－Ⅲ]　当$x\to0$时,$x-\sin x$是x^2的

(A)低阶无穷小.　(B)高阶无穷小.

(C)等价无穷小.　(D)同阶但非等价无穷小.

答　应选(B).

解法1　由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2}=0$,则当$x\to0$时,$x-\sin x$是$x^2$的高阶无穷小.

解法2　由泰勒公式可知

$$x-\sin x=x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)=\frac{x^3}{3!}+o(x^3),$$

显然$x-\sin x$为x^2的高阶无穷小.

1.5.[1992－Ⅲ]　设$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则

(A)$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　(B)$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$

(C)$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　(D)$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant0.\end{cases}$

答　应选(D).

解　$f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant0,\\ (-x)^2-x, & -x>0,\end{cases}$即$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$

1.6.［1992－Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ］ 当 $x\to1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

(A)等于 2. (B)等于 0. (C)为 ∞. (D)不存在但不为 ∞.

答 应选(D).

解 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0$，

而
$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$
则极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 不存在，但不是 ∞.

1.7.［1993－Ⅲ］ 当 $x\to0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A)无穷小. (B)无穷大.

(C)有界的，但不是无穷小的. (D)无界的，但不是无穷大.

答 应选(D).

解 取 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$f(x_n)=(n\pi)^2\sin n\pi=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，取 $y_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$，
$$f(y_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2,\lim_{n\to\infty}f(y_n)=+\infty,$$
则当 $x\to0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是无界的，但不是无穷大.

1.8.［1994－Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ］ 曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有

(A)1 条. (B)2 条. (C)3 条. (D)4 条.

答 应选(B).

解 由
$$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{\pi}{4},$$
可知原曲线有水平渐近线 $y=\frac{\pi}{4}$. 又 $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}=\infty$，则原曲线有垂直渐近线 $x=0$，虽然原题中当 $x=1$，$x=-2$ 时分母为零，但 $\lim\limits_{x\to1}y$ 和 $\lim\limits_{x\to-2}y$ 都不是 ∞，则原曲线的渐近线有两条.

1.9.［1995－Ⅲ］ 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点. (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

答 应选(D).

解法 1 反证法.

设 $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 处处连续，则 $\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$，从而 $\varphi(x)$ 处处连续，与原题设矛盾.

解法 2 排除法.

举反例 $f(x)\equiv1$，$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $\varphi[f(x)]\equiv1$，处处连续，不能选(A)；$[\varphi(x)]^2\equiv1$，处处连续，不能选(B)；$f[\varphi(x)]\equiv1$，处处连续，不能选(C). 则应选(D).

1.10.［1997－Ⅱ］ 设 $x\to0$ 时，$e^{\tan x}-e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为

(A)1. (B)2. (C)3. (D)4.

答 应选(C).

解 当 $x\to 0$ 时，

$$e^{\tan x}-e^{x}=e^{x}(e^{\tan x-x}-1)\sim e^{x}(\tan x-x)\sim \tan x-x,$$

而

$$\tan x=x+\frac{x^{3}}{3}+O(x^{5}),$$

所以

$$\tan x-x=\frac{x^{3}}{3}+O(x^{5})=O(x^{3}),$$

因此选(C).

1.11.[1997－Ⅱ] 设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^{2}, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}2-x^{2}, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^{2}, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0.\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}2+x^{2}, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

答 应选(D).

解 根据 $g(x)$ 的定义知，复合函数

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ f(x)+2, & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $x<0$ 时，$f(x)=x^{2}>0$；$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x\leqslant 0$. 故

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^{2}+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.12.[1998－Ⅱ] 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是

(A)若 x_n 发散，则 y_n 必发散.

(B)若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C)若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小.

(D)若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

答 应选(D).

解 (A)、(B)、(C)三项可用反例排除.

(A)项显然是不正确的，因为只需取数列 $y_n\equiv 0$，就排除了它.

若取数列

$$x_n=\begin{cases}2k-1, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k\end{cases}\quad k=1,2,\cdots;$$

$$y_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ 2k, & n=2k\end{cases}\quad k=1,2,\cdots,$$

便排除了(B)项.

对于(C)项，若数列 $x_n\equiv 0$，则 y_n 可为任何数列，所以(C)项也不正确. 故只有(D)项是正确的.

事实上，当 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小时，数列 x_n 为无穷大，即对任意给定 $M>0$，存在 $N_1>0$，使当 $n>N_1$ 时，$|x_n|>M$；由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则对任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $N_2>0$，使当 $n>N_2$ 时，$|x_ny_n|<\varepsilon$，故当 $n>\max\{N_1,N_2\}$ 时，有 $M|y_n|<|x_ny_n|<\varepsilon$，即

$$|y_n|<\frac{1}{M}\varepsilon,$$

所以 y_n 必为无穷小.

直接利用无穷小量的性质也可以推出(D)为正确选项. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ 有 $x_n y_n = \alpha_n$，其中 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. 当 $x_n \neq 0$ 时可写成 $y_n = \dfrac{\alpha_n}{x_n}$. 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 为两个无穷小 $\dfrac{1}{x_n}$ 与 α_n 之积，故 y_n 亦为无穷小，应选(D).

1.13.［1998－Ⅱ］ 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为其极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0$.　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0$.

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0(x\neq a)$.　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\leqslant 0(x\neq a)$.

答　应选(C).

解　函数在某点 $x=a$ 处取极大值，按定义，存在一个邻域 $(a-\delta,a+\delta)$，使当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，有 $f(x)\leqslant f(a)$. 所以当 $a-\delta<x<a$ 时，

$$(x-a)[f(x)-f(a)]\geqslant 0;$$

当 $a<x<a+\delta$ 时，

$$(x-a)[f(x)-f(a)]\leqslant 0.$$

因此，(A)，(B)均错. 至于(C)，(D)两项，由于 $f(t)$ 在 $t=a$ 连续，且 $x\neq a$，故(C)，(D)分别就是 $f(a)-f(x)\geqslant 0$ 及 $f(a)-f(x)\leqslant 0$，当 $f(a)$ 为极大值时(C)成立，应选(C).

1.14.［1999－Ⅱ］ 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处

(A)极限不存在.　　(B)极限存在，但不连续.

(C)连续，但不可导.　　(D)可导.

答　应选(D).

解

$$f'(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

$$f'(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2 g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-} g(x)x=0.$$

最后一个等式利用了 $g(x)$ 是有界函数这一条件. 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的左导数等于右导数，因而，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

1.15.［1999－Ⅱ］ 设 $\alpha(x)=\int_0^{5x}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$，$\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的

(A)高阶无穷小.　　(B)低阶无穷小.

(C)同阶但不等价的无穷小.　　(D)等价无穷小.

答　应选(C).

解　先利用洛必达法则求出 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，再根据此极限值进行判定.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t}=5\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}}$$

$$=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{-\frac{1}{\sin x}}=\frac{5}{\mathrm{e}}\neq 1,$$

故 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 同阶但不等价的无穷小量.

1.16.［1999－Ⅱ］ “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A)充分条件但非必要条件.　　(B)必要条件但非充分条件.

(C)充分必要条件.　　　　(D)既非充分条件又非必要条件.

答　应选(C).

解　本题考查考生对数列$\{x_n\}$收敛于a的定义的理解.其定义是“对任意给定的$\varepsilon_1>0$,总存在正整数N_1,当$n>N_1$时,恒有$|x_n-a|<\varepsilon_1$”.两种说法相比较,似乎定义中的条件更强些,即由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$必能推出“对任意给定的$\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数$N$,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”.但其逆也是正确的.因为对任意给定的$\varepsilon_1>0$,取$\varepsilon=\min\left\{\dfrac{\varepsilon_1}{3},\dfrac{1}{3}\right\}$,则对此$\varepsilon$,存在$N$,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$,现取$N_1=N-1$,于是有当$n>N_1$时,$|x_n-a|\leqslant\dfrac{2}{3}\varepsilon_1<\varepsilon_1$.所以以上两种说法是等价的,即选项(C)是正确的.

1.17.[2000－Ⅱ]　设函数$f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数$a,b$满足

(A)$a<0,b<0$.　　(B)$a>0,b>0$.　　(C)$a\leqslant 0,b>0$.　　(D)$a\geqslant 0,b<0$.

答　应选(D).

解　由题目所给的条件便可分别确定系数.因函数$f(x)$在整个数轴上连续,故有$a\geqslant 0$;又因$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,因而必有当$x\to-\infty$时,$a+e^{bx}\to\infty$,所以$b<0$.故(D)是正确的.

1.18.[2000－Ⅱ]　若$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为

(A)0.　　(B)6.　　(C)36.　　(D)∞.

答　应选(C).

解　由所给的极限式通过运算去求未知的极限是本题的思路.一个方法是写出$\sin 6x$的泰勒公式

$$\sin 6x=(6x)-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3),$$

代入原极限式得

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right)=0.$$

即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=36$.或者,因

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6+f(x)}{x^2}\right]=0,\end{aligned}$$

而　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x-6x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6\cos 6x-6}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-36\sin 6x}{6x}=-36$.总之,选项(C)正确.

1.19.[2001－Ⅱ]　设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1,\end{cases}$则$f\{f[f(x)]\}$等于

(A)0.　　(B)1.　　(C)$\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1.\end{cases}$　　(D)$\begin{cases}0,|x|\leqslant 1,\\1,|x|>1.\end{cases}$

答　应选(B).

解　由于$f(x)\leqslant 1$,故$f[f(x)]=1$,因而$f\{f[f(x)]\}=1$.

1.20.[2001－Ⅱ]　设当$x\to0$时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小,而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数n等于

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D)4.

答　应选(B).

解　这是无穷小比较的题.把题中的每个无穷小都用其等价无穷小代替,便可得到正确的答案.事实上当$x\to0$时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$,$x\sin x^n\sim x^{n+1}$,$e^{x^2}-1\sim x^2$,故应选(B).

1.21.［2003－Ⅱ］ 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立．　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立．

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在．　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在．

答　应选(D)．

解　数列极限是描述数列变化趋势，其极限值与数列前面的有限项无关．数列极限的保号性及推论只是从某个确定的第 $N+1$ 项成立，故选项(A)、(B)显然不对．又 a_nc_n 是 $0\cdot\infty$未定型，$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不一定不存在，从而选项(C)也不对．排除后应选(D)．事实上，因为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，故存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，$b_n>\frac{1}{2}$．又$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，对于任意给定的正数 G，存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，$c_n>2G$，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时，$b_nc_n=b_n$，$c_n>\frac{1}{2}\cdot 2G=G$，即$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在．

1.22.［2003－Ⅱ］ 设 $a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x$，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 等于

(A)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}+1$．　　(B)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$．

(C)$(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$．　　(D)$(1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-1$．

答　应选(B)．

解
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{2n}\int_0^{\frac{n}{n+1}}\sqrt{1+x^n}\mathrm{d}(1+x^n)\\&=\frac{1}{n}(1+x^n)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{n}\left[\left(1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].\end{aligned}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right]^{\frac{3}{2}}-1\right\}=(1+\mathrm{e}^{-1})^{\frac{3}{2}}-1.$$

即选项(B)正确．

1.23.［2004－Ⅱ］ 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小量，则正确的排列次序是

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.　　(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

答　应选(B)．

解　因
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x\tan x}{\cos x^2}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}\cos x^2}=0,$$
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\mathrm{d}t}{\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\mathrm{d}t}=\frac{2x\tan x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x^{\frac{3}{2}}}=0,$$

所以 γ 是较 α 高阶的无穷小量，β 是较 γ 高阶的无穷小量，即选项(B)正确.

1.24.［2005－Ⅱ］ 设函数 $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点.
(B) $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点.
(C) $x=0$ 是 $f(x)$第一类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点.
(D) $x=0$ 是 $f(x)$第二类间断点,$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点.

答　应选(D).

解　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$,故 $x=0$ 是第二类间断点.

因为$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1$,$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0$,故 $x=1$ 是第一类间断点.

1.25.［2007－Ⅱ］　当 $x\to0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$.　(B)$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　(D)$1-\cos\sqrt{x}$.

答　应选(B).

解　排除法．当 $x\to0^+$ 时,$1-e^{\sqrt{x}}\sim(-\sqrt{x})$,$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{1}{2}\sqrt{x}$,$1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2=\dfrac{1}{2}x$,不选(A)、(C)、(D),所以选(B).

1.26.［2007－Ⅱ］　函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$

(A)0.　(B)1.　(C)$-\dfrac{\pi}{2}$.　(D)$\dfrac{\pi}{2}$.

答　应选(A).

解　由函数的表达式知,$x=0,x=1,x=\pm\dfrac{\pi}{2}$是间断点,不难看出,$x=1,x=\pm\dfrac{\pi}{2}$是无穷间断点,故只能选(A). 事实上,由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^+}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1+e^{1-\frac{1}{x}}}{1-e^{1-\frac{1}{x}}}=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}=\lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}+e}{e^{\frac{1}{x}}-e}=-1,$$

因此 $x=1$ 是跳跃间断点,即第一类间断点．

1.27.［2008－Ⅱ］　设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$有

(A)1 个可去间断点,1 个跳跃间断点．　(B)1 个可去间断点,1 个无穷间断点．
(C)2 个跳跃间断点．　(D)2 个无穷间断点．

答　应选(A).

解　$x=0,x=1$ 是间断点．因为

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\lim_{x\to0}\frac{\ln|x|}{\csc x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x\cos x}=0,$$

故 $x=0$ 是可去间断点;而

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{\ln[1+(x-1)]}{1-x}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{1-x}=-\sin1,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}=\sin1\cdot\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=\sin1,$$

故 $x=1$ 是跳跃间断点．

1.28.［2008－Ⅱ］　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是

(A)若$\{x_n\}$收敛，则$\{f(x_n)\}$收敛．　　(B)若$\{x_n\}$单调，则$\{f(x_n)\}$收敛．

(C)若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛．　　(D)若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛．

答　应选(B)．

解　在选项(B)中，因为数列$\{x_n\}$单调，考虑到$f(x)$是一个单调有界函数，所以数列$\{f(x_n)\}$不仅单调，而且有界，从而收敛．

1.29.［2009－Ⅱ］　函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$的可去间断点的个数为

(A) 1．　　(B) 2．　　(C) 3．　　(D) 无穷多个．

答　应选(C)．

解　对$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$，当$x$取任何整数时，$f(x)$均无意义，故$f(x)$的间断点有无穷多个．但可去间断点为极限存在的点，故应在$x-x^3=0$的解$x=0,\pm1$中去寻找．由于

$$\lim_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to0}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi},\lim_{x\to1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},\lim_{x\to-1}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}=\lim_{x\to-1}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},$$

因此可去间断点有3个，即$x=0,\pm1$．应选(C)．

1.30.［2009－Ⅱ］　当$x\to0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$．　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$．　　(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$．　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$．

答　应选(A)．

解　因为当$x\to0$时，$f(x)=x-\sin ax$与$g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，则有

$$I=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\lim_{x\to0}\frac{a^2\sin ax}{-6bx}=-\frac{a^3}{6b},$$

所以$a^3=-6b$，故排除选项(B)，(C)．

另外，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-a\cos ax}{-3bx^2}$存在，蕴含了$1-a\cos ax\to0\ (x\to0)$，故$a=1$．所以本题选(A)．

1.31.［2010－Ⅱ］　函数$f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数为

(A) 0．　　(B) 1．　　(C) 2．　　(D) 3．

答　应选(B)．

解　$f(x)$在$x=0,1,-1$处无定义，所以$f(x)$有3个间断点．因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=-\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=-1,\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=1,$$
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\frac{\sqrt2}{2},\lim_{x\to-1}f(x)=-\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\infty,$$

因此$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，$x=1$是$f(x)$的可去间断点，$x=-1$是$f(x)$的无穷间断点．

1.32.［2011－Ⅱ］　已知当$x\to0$时，函数$f(x)=3\sin x-\sin 3x$与cx^k是等价无穷小量，则

(A)$k=1,c=4$．　　(B)$k=1,c=-4$．　　(C)$k=3,c=4$．　　(D)$k=3,c=-4$．

答　应选(C)．

解法1　根据题意及洛必达法则，有

$$1=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\frac{24}{ck(k-1)(k-2)}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{k-3}},$$

由此可得$k=3,c=4$，因此选(C)．