普通高校“十二五”实用规划教材——公共基础系列

概率论与数理统计

（经管类）

张 良 主编

邵东南 马丽萍 副主编

赠送
电子课件

清华大学出版社

普通高校“十二五”实用规划教材——公共基础系列

概率论与数理统计(经管类)

张　良　主　编

邵东南　马丽萍　副主编

清华大学出版社

北　京

内容简介

本书是根据教育部有关的教学大纲及最新全国硕士研究生入学统一考试(数学三)大纲的要求，总结编者多年讲授概率论与数理统计课程的实践经验编写而成的。

全书由两大部分组成：第一部分介绍了随机事件的概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征以及大数定律与中心极限定理等概率论的基础理论，第二部分介绍了样本分布、参数估计、假设检验等数理统计的基础知识。

本书在语言叙述上力求深入浅出、通俗易懂，在内容编排上力求层次清晰、简明扼要，在例题与习题选取上力求少而精，可作为经济管理类本科生概率论与数理统计课程的教材使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计(经管类)/张良主编. --北京：清华大学出版社，2015
(普通高校"十二五"实用规划教材——公共基础系列)
ISBN 978-7-302-38861-6

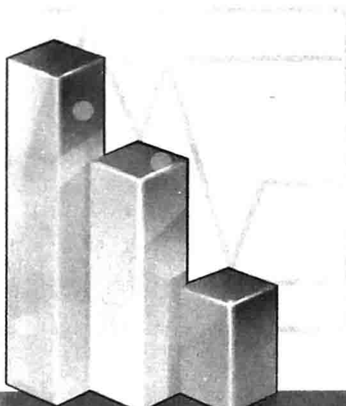
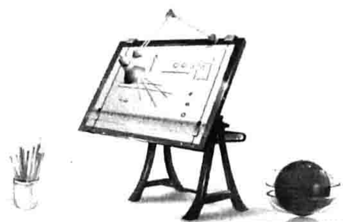
Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 004291 号

责任编辑：秦 甲 郑期彤
封面设计：刘孝琼
责任校对：周剑云
责任印制：杨 艳

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084
社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn，010-62791865
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm 印 张：10.5 字 数：247 千字
版 次：2015 年 4 月第 1 版 印 次：2015 年 4 月第 1 次印刷
印 数：1～3000
定 价：25.00 元

产品编号：061873-01

前 言

著名数学家拉普拉斯说：“生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题。”

自然界充满了不确定现象，即随机现象，概率论就是研究大量随机现象数量规律性的科学。数理统计则以概率论为基础，是一门研究怎样去有效地收集、整理和分析带有随机性的数据，以对所考察的问题做出推断或预测的科学。

概率统计理论与方法的应用几乎遍及自然科学与社会科学的各领域中，尤其与金融、证券、投资、计量经济学等学科相互渗透或结合。因此，概率论与数理统计已成为经济管理类专业学生必修的一门重要基础课，它被列为硕士研究生入学考试课程。通过本课程的学习，学生应掌握概率论与数理统计的基本思想与方法，并且具备一定的分析与解决实际问题的能力。

本书是根据教育部有关的教学大纲及最新全国硕士研究生入学统一考试(数学三)大纲的要求，总结编者多年讲授概率论与数理统计课程的实践经验编写而成的。

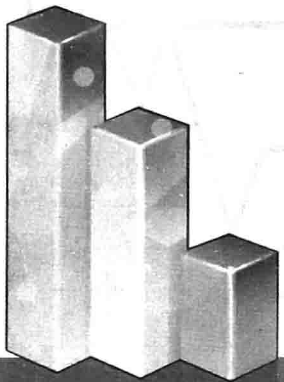
本书在编写过程中力求：①注重概率统计基本思想与方法的介绍；②内容精炼，结构完整，推理简明，通俗易懂；③语言叙述深入浅出，便于自学；④例题选取做到少而精；⑤注重应用。

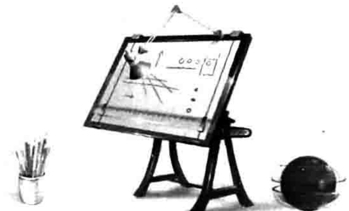
全书由两大部分组成：第一部分(第 1～5 章)主要介绍概率论的基础理论，第二部分(第 6～8 章)主要介绍数理统计的基础知识。

本书由张良老师主持编写。其中第 1、2、5～8 章由张良老师撰写，第 3 章由马丽萍老师撰写，第 4 章由邵东南老师撰写，最后由张良老师修改定稿。在编写过程中，承蒙程从沈老师的大力帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者





目　　录

第 1 章　随机事件及其概率 1

1.1　随机事件 1

1.2　排列与组合 3

1.3　随机事件的概率 6

1.4　古典型概率与几何型概率 8

1.5　条件概率 10

1.6　事件的独立性 13

小结 15

阶梯化训练题 19

第 2 章　随机变量及其分布 25

2.1　随机变量 25

2.2　离散型随机变量及其分布 25

2.3　随机变量的分布函数 29

2.4　连续型随机变量及其分布 30

2.5　随机变量函数的分布 36

小结 37

阶梯化训练题 41

第 3 章　多维随机变量及其分布 45

3.1　多维随机变量 45

3.2　二维离散型随机变量的分布 47

3.3　二维连续型随机变量的分布 50

小结 57

阶梯化训练题 61

第 4 章　随机变量的数字特征 65
4.1　随机变量的数学期望 65
4.2　随机变量的方差 68
4.3　几种重要的随机变量的数字特征 71
4.4　二维随机变量的数字特征 72
小结 74
阶梯化训练题 77
第 5 章　大数定律和中心极限定理 81
5.1　大数定律 81
5.2　中心极限定理 82
小结 85
阶梯化训练题 86
第 6 章　样本分布 89
6.1　总体、个体和样本 89
6.2　常用统计量的分布 91
小结 94
阶梯化训练题 96
第 7 章　参数估计 99
7.1　点估计 99
7.2　估计量的优劣标准 102
7.3　区间估计 104
小结 106
阶梯化训练题 108
第 8 章　假设检验 111
8.1　基本原理 111
8.2　单正态总体的假设检验 111
小结 113
阶梯化训练题 114
阶梯化训练题答案 117
附录 129
参考文献 159

第1章　随机事件及其概率

1.1　随 机 事 件

在自然界和人们活动中经常会遇到许多现象，这些现象大体可分为两类，一类叫必然现象，另一类叫随机现象。所谓必然现象是指在一定条件下一定会出现或一定不会出现的现象。例如，在标准大气压下纯水加热到 100℃就会沸腾，近距离的异性电荷会相互吸引，像这样由条件可以确定结果的现象就是必然现象。所谓随机现象是指在一定条件下可能出现也可能不出现的现象。例如，抛一枚硬币使其正面朝上，从 54 张混放的扑克牌中任意抽取一张抽得“大王”，像这样即使条件确定结果仍然不能确定的现象就是随机现象。

凡是对随机现象的观察或为此而进行的试验都称为随机试验，简称为试验，记作 E 。随机试验与其他的试验有什么区别呢？随机试验 E 一定具备下列三条特征：

(1) 试验 E 可以在相同的条件下重复进行。

(2) 试验 E 的所有可能出现的结果都是已知的。

(3) 在每次试验前，不能预言这次试验将会出现哪一个结果。

做一次试验，随机现象是否出现具有偶然性，如果做大量重复试验，随机现象的出现可能会呈现一定规律。概率论与数理统计就是研究随机现象数量规律性的一门科学。

1. 随机事件的基本概念

随机试验 E 的每一个可能出现的结果称为基本事件或样本点，用 ω 表示。所有的基本事件组成的集合称为基本事件空间或样本空间，用 Ω 表示。由若干个基本事件组成的集合称为随机事件，简称事件，用大写英文字母 A,B,C 等表示；显然它是基本事件空间的一个子集合。

随机事件 A 出现当且仅当 A 中的某一个基本事件 ω 出现。

例 1-1 随机试验 E——掷硬币观察其面。其基本事件是“出现正面”和“出现反面”，基本事件空间是 $\Omega=\{“正面”,“反面”\}$。

例 1-2 随机试验 E——从 54 张混放的扑克牌中随机抽取一张，观察抽到哪一张牌。

其基本事件是“黑桃 A”, “黑桃 2”, …, “红桃 A”, “红桃 2”, …; 共 54 个基本事件。将所有基本事件组成一集合 $\Omega=\{$“黑桃 A”, “黑桃 2”, …, “红桃 A”, “红桃 2”, …$\}$，称为基本事件空间。而称由一部分基本事件组成的集合为随机事件。如 $A=\{$抽到黑桃$\}$——事件 A 中含有 13 个基本事件； $B=\{$抽到 5$\}$——事件 B 中含有 4 个基本事件； $C=\{$抽到王$\}$——事件 C 中含有两个基本事件。

每次试验都出现的事件称为必然事件，用 Ω 表示；每次试验都不会出现的事件称为不可能事件，用 Φ 表示。

每次试验必然事件 Ω 都会出现，所以必然事件包含随机试验 E 的所有基本事件，因此必然事件就是基本事件空间，于是它们用同一符号 Ω 表示。

2. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含：若事件 A 出现必然导致事件 B 出现，即 A 中的所有基本事件都在 B 中，则称 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。

(2) 事件的相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

(3) 事件的和(并)： $A+B=A\cup B=\{$事件 A 与 B 至少出现一个$\}$，即

$$A+B=\{\omega|\omega\in A\text{或}\omega\in B\}$$

$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1+A_2+\cdots+A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{至少出现一个}\}$$
$$=\{\omega|\omega\in A_1\text{或}\omega\in A_2\text{或}\cdots\text{或}\omega\in A_n\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\{\omega|\omega\in A_1\text{或}\omega\in A_2\text{或}\cdots\text{或}\omega\in A_n\text{或}\cdots\}$$

(4) 事件的积(交)： $AB=A\cap B=\{$事件 A 与 B 都出现$\}$，即

$$AB=\{\omega|\omega\in A\text{且}\omega\in B\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=A_1A_2\cdots A_n=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{都出现}\}=\{\omega|\omega\in A_1\text{且}\omega\in A_2\text{且}\cdots\text{且}\omega\in A_n\}$$

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=A_1A_2\cdots A_n\cdots=\{\omega|\omega\in A_1\text{且}\omega\in A_2\text{且}\cdots\text{且}\omega\in A_n\text{且}\cdots\}$$

(5) 事件的差： $A-B=\{$事件 A 出现但事件 B 不出现$\}$，即 $A-B=\{\omega\in A\text{但}\omega\notin B\}$。

(6) 事件的互斥(互不相容)：若事件 A 与 B 不能同时出现，即 $AB=\Phi$，则称 A 与 B 互斥(互不相容)。

(7) 事件的逆(对立事件)：若事件 A 与 B 必然有一个出现，而且仅有一个出现，即 A,B 满足

$$A+B=\Omega,\ AB=\Phi$$

则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件)。

事件 A 的逆事件记作 $\overline{A}$，它表示事件 A 不出现，即

$$\overline{A}=\{\omega|\omega\notin A,\ \omega\in\Omega\}$$

[注] ① $A+\overline{A}=\Omega$， $A\overline{A}=\Phi$。

② $\overline{A}=\Omega-A$。

3. 事件的关系和运算的性质

(1) 逆运算：$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{\Omega}=\Phi$，$\overline{\Phi}=\Omega$。

(2) 吸收律：$A+\Omega=\Omega$，$A+\Phi=A$，$A\Omega=A$，$A\Phi=\Phi$，$AA=A$。

(3) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$。

(4) 结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$，$A(BC)=(AB)C$。

(5) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$A(B-C)=AB-AC$。

(6) 德·摩根定律：

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A}_1+\overline{A}_2+\cdots+\overline{A}_n$$

例 1-3 从一批产品中每次取一件进行检验，令 A_i={第 i 次取到合格品},($i=1,2,3$)。试用事件的运算符号表示下列事件：A={三次都取到合格品},B={三次至少有一次取到合格品}，C={三次恰好有两次取到合格品}，D={三次最多有一次取到合格品}。

解 $A=A_1A_2A_3$

$B=A_1+A_2+A_3$

$C=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$

$D=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$

例 1-4 一名射手连续向某一目标射击三次，令 A_i={第 i 次射击击中目标}，($i=1,2,3$)。试用文字叙述下列事件：(1) A_1+A_2；(2) $A_1+A_2+A_3$；(3) $A_1A_2A_3$；(4) A_3-A_2；(5) $\overline{A}_3$；(6) $\overline{A_1+A_2}$；(7) $\overline{A_1A_2}$。

解 (1) A_1+A_2={前两次射击至少有一次击中目标}

(2) $A_1+A_2+A_3$={三次射击至少有一次击中目标}

(3) $A_1A_2A_3$={三次射击都击中目标}

(4) A_3-A_2={第三次射击击中目标，但第二次射击未击中目标}

(5) $\overline{A}_3$={第三次射击未击中目标}

(6) $\overline{A_1+A_2}=\overline{A}_1\overline{A}_2$={前两次射击都未击中目标}

(7) $\overline{A_1A_2}=\overline{A}_1+\overline{A}_2$={前两次射击至少有一次未击中目标}

1.2 排列与组合

计算随机事件出现的可能性大小时往往需要借助排列组合理论与方法，下面介绍排列组合的基本理论与方法。

1. 基本原理

(1) 加法原理：做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种方法，不论用哪一类办法中的哪一种方法都可以完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同方法。

例如，某人从甲地到乙地有乘飞机、火车和汽车三类办法。每天飞机有 2 个航班，火

车有 5 班车，汽车有 3 趟车。不论选用哪一类办法中的哪一种走法，都可以到达目的地，那么从甲地到乙地共有 $2+5+3=10$ 种不同走法。

(2) 乘法原理：做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，只有当这 n 个步骤全部完成时，才能完成这件事，那么完成这件事共有 $m_1m_2\cdots m_n$ 种不同方法。

例如，某人从甲地到丙地必须经过乙地中转。若从甲地到乙地有 3 种走法，从乙地到丙地有 7 种走法，那么从甲地到丙地共有 $3\times7=21$ 种不同走法。

2．排列

1) 不可重复排列

定义 1-1 从 n 个不同元素中，任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的一个排列。其所有不同排列的个数称为排列数,用符号 P_n^m 表示。

例如，在 a,b,c,d 四个字母中，每次取 2 个不同字母的排列是：

ab,ac,ad； ba,bc,bd； ca,cb,cd； da,db,dc

易数得从 a,b,c,d 四个字母中，每次取 2 个不同字母的所有不同排列的个数是 12。

一般情况下，怎样计算 P_n^m 的值呢？为了研究这个问题，我们试想一个与其等价的问题："从 n 个不同元素中，任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个不同元素，将其放入 m 个空位置中，有多少种不同放法？"要完成这件事，可将其分成 m 个步骤。第一步从 n 个元素中任取 1 个放在第 1 个位置，有 n 种不同放法；第二步从剩余 $n-1$ 个元素中任取 1 个放在第 2 个位置，有 $n-1$ 种不同放法；第三步从剩余 $n-2$ 个元素中任取 1 个放在第 3 个位置，有 $n-2$ 种不同放法；……；第 $m-1$ 步从剩余 $n-m+2$ 个元素中任取 1 个放在第 $m-1$ 个位置，有 $n-m+2$ 种不同放法；第 m 步从剩余 $n-m+1$ 个元素中任取 1 个放在第 m 个位置，有 $n-m+1$ 种不同放法。根据乘法原理，完成这件事共有 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ 种不同放法，因此

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \tag{1-1}$$

为了书写方便，我们把从 1 到 n 的正整数连乘记作 $n!$，读作 n 阶乘，即

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1 \tag{1-2}$$

并规定 $0!=1$。

于是又有

$$P_n^m=\frac{n!}{(n-m)!} \tag{1-3}$$

[注] $P_n^n=n!$。

2) 可重复排列

定义 1-2 从 n 个不同元素中，任取 $m\,(m\leqslant n)$ 个元素(允许重复)，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取 m 个元素的一个可重复排列，其所有不同排列的个数称为排列数。

类似于 P_n^m 计算公式的推导，可知可重复排列的排列数为 n^m。

例如，在 a,b,c,d 四个字母中，每次取 2 个字母的所有可重复排列是：

aa,ab,ac,ad； ba,bb,bc,bd； ca,cb,cc,cd； da,db,dc,dd

易数得从 a,b,c,d 四个字母中，每次取 2 个字母的所有可重复排列的个数是 $4^2=16$。

例 1-5 计算：(1) $P_3^2+P_4^3$；(2) $\dfrac{P_5^3-P_4^4}{5!+4!}$。

解 (1) $P_3^2+P_4^3=3\times2+4\times3\times2=30$

(2) $\dfrac{P_5^3-P_4^4}{5!+4!}=\dfrac{5\times4\times3-4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1+4\times3\times2\times1}=\dfrac{1}{4}$

例 1-6 有 5 个男孩、3 个女孩站成一排。

(1) 男孩不站在排头也不站在排尾，有几种不同站法？

(2) 男孩必须相邻，有几种不同站法？

解 (1) 由于男孩既不站在排头也不站在排尾，因此可考虑先满足排头、排尾两个特殊位置的要求。从 3 个女孩中任选 2 个站在这两个位置，有 P_3^2 种站法，然后再让 5 个男孩与剩下的 1 个女孩站在剩下的 6 个位置，有 P_6^6 种站法。根据乘法原理，共有 $P_3^2\ P_6^6=3\times2\times6\times5\times4\times3\times2\times1=4320$ 种不同站法。

(2) 由于 5 个男孩必须相邻，因此可先把他们看作一个整体而和 3 个女孩站成一排，有 P_4^4 种站法，然后再对 5 个男孩进行排列，有 P_5^5 种站法。根据乘法原理，共有 $P_4^4\ P_5^5=4\times3\times2\times1\times5\times4\times3\times2\times1=2880$ 种不同站法。

例 1-7 数字 0,1,2,3 可以组成多少个没有重复数字的 3 位数？

解 因为 0 不能在百位位置上，所以可以从 1,2,3 三个数字中任选一个排在百位位置上，有 P_3^1 种排法；当百位位置上数字选定后，把 1,2,3 中剩余的两个数字与 0 共 3 个数字，排在十位与个位两个位置上，有 P_3^2 种排法。根据乘法原理，共可以组成 $P_3^1\ P_3^2=3\times3\times2=18$ 个 3 位数。

3. 组合

定义 1-3 从 n 个不同元素中，任取 $m\ (m\leqslant n)$ 个不同元素，不管顺序并成一组，叫作从 n 个不同元素中取 m 个不同元素的一个组合。其所有不同组合的个数称为组合数，用符号 C_n^m 表示。

[注] 排列与组合的不同之处是：排列考虑元素的顺序，组合不考虑元素的顺序。在排列中若元素相同但排列的顺序不同，就被视为不同排列；在组合中只要元素相同，就被视为同一组合。

那么怎样计算 C_n^m 的值呢？我们可以通过另一种思维方式计算 P_n^m 来求得 C_n^m 的计算公式。计算 P_n^m 的值就是计算从 n 个不同元素中，任取 m 个不同元素的所有不同排列的个数。我们可以将计算 P_n^m 这件事分成两个步骤：第一步是从 n 个元素中任取 m 个元素，不管顺序并成一组，共有 C_n^m 种不同取法；第二步是将取出的 m 个元素排成一列，共有 P_m^m 种排法。根据乘法原理，完成计算 P_n^m 这件事共有 $C_n^m P_m^m$ 种不同方法，即

$$P_n^m = C_n^m P_m^m = C_n^m m!$$

于是

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \tag{1-4}$$

利用 $P_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，又可得

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1-5}$$

组合具有如下性质：

(1) $C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$。

(2) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$ $(1 \leqslant m < n)$。

规定 $C_n^0 = 1$，特别有 $C_n^1 = n$，$C_n^n = 1$。

例 1-8 计算：(1) $C_6^4 - C_5^3$；(2) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4$。

解 (1) $C_6^4 - C_5^3 = \dfrac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1} - \dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1} = 5$

(2) $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^{4-3} + C_4^4 = 4 + \dfrac{4\times3}{2\times1} + 4 + 1 = 15$

例 1-9 一条铁路上有 20 个车站，按常规：

(1) 一共需要准备多少种不同的车票？

(2) 一共有多少种不同的票价？

解 (1) 从 20 个车站中任取 2 个车站(车票与顺序有关)的排列数是

$$P_{20}^2 = 20\times19 = 380$$

(2) 从 20 个车站中任取 2 个车站(票价与顺序无关)的组合数是

$$C_{20}^2 = \frac{20\times19}{2\times1} = 190$$

例 1-10 从 5 名男生和 4 名女生中选 3 名代表参加数学竞赛，要求代表中男生 2 名、女生 1 名，问共有多少种选法？

解 从 5 名男生中选 2 名有 C_5^2 种选法，从 4 名女生中选 1 名有 C_4^1 种选法。根据乘法原理，共有 $C_5^2\ C_4^1 = \dfrac{5\times4}{2\times1}\times4 = 40$ 种选法。

1.3 随机事件的概率

当我们多次重复做某一随机试验 E 时，常常会察觉某些事件出现的可能性要大些，而另一些事件出现的可能性要小些。例如，在抽扑克牌试验中抽到黑桃的事件比抽到“大、小王”的事件出现的可能性要大。那么怎样定义随机事件出现的可能性大小呢？我们先从比较简单的概念——频率入手研究。

1. 事件的频率

定义 1-4 在相同的条件下，重复进行了 n 次试验，若事件 A 出现了 k 次，则称比值 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率，记作 $F_n(A)$，即

$$F_n(A)=\frac{k}{n} \tag{1-6}$$

我们可以用事件的频率描述随机事件出现的可能性大小。例如，在掷硬币试验中，假设掷 100 次硬币，事件 $A=\{正面\}$出现了 51 次，自然可以用数字 $F_{100}(A)=\frac{51}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小。用频率描述随机事件出现的可能性大小有不完备之处。假如第一天掷 100 次硬币，A 出现了 51 次，用 $\frac{51}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小；第二天又掷 100 次硬币，事件 A 出现了 49 次，得用 $\frac{49}{100}$ 表示事件 A 出现的可能性大小；第三天又掷 300 次硬币，事件 A 出现了 158 次，又得用 $\frac{158}{300}$ 表示事件 A 出现的可能性大小。显然随机事件的频率与试验的次数 n 有关，还与试验的轮次有关。我们需要用一个与试验次数及轮次无关的精确数字描述随机事件出现的可能性大小，这个数字就被称为随机事件的概率。

2. 概率的定义

既然各随机事件出现的可能性有大有小，自然使人想到用一个数字表示事件 A 出现的可能性大小，较大的可能性用较大的数字表示，较小的可能性用较小的数字表示，这个数字记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率。

然而，对于给定的事件 A，究竟应该用哪个数字来作为它的概率呢？也就是说，怎样从数量上来定义 $P(A)$ 呢？这取决于试验 E 和事件 A 的特殊性，不能一概而论。

由于频率与概率都是用来描述事件出现可能性大小的，我们可以通过研究频率的性质来给出概率应满足的基本条件，由此得到下面的概率公理化定义。

定义 1-5 设试验 E 的基本事件空间为 Ω，如果全体事件集合上的函数 $P(\bullet)$ 满足下列条件。

(1) 非负性：对任意事件 A，恒有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$。

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，恒有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \tag{1-7}$$

则称函数 $P(\bullet)$ 为概率。

3. 概率的性质

(1) $P(\varPhi)=0$。

证 因 $\varPhi=\varPhi+\varPhi+\cdots+\varPhi+\cdots$，则 $P(\varPhi)=P(\varPhi)+\cdots+P(\varPhi)+\cdots$，从而 $P(\varPhi)=0$。

(2) 有限可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varPhi\ (i\neq j)$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{1-8}$$

证 因为 $\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \Phi + \Phi + \cdots$，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \Phi + \cdots)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\Phi) + \cdots = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 对任意事件 A，恒有

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1-9}$$

证 因 $A+\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，则$1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$，故$P(\overline{A})=1-P(A)$。

(4) 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

证 因 $A=(A-B)+B$，且 $(A-B)B=\Phi$，则 $P(A)=P[(A-B)+B]=P(A-B)+P(B)$，从而 $P(A-B)=P(A)-P(B)$。

推论 (单调性)若 $A\supset B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$。

证 若 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(A)-P(B)=P(A-B)\geqslant 0$。

(5) 加法公式：对任意的事件 A,B，恒有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-10}$$

证 因 $A+B=A+(B-AB)$，且$A(B-AB)=\Phi$，则

$$P(A+B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

加法公式推广：

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1-11}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}^{n} P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1-12}$$

1.4 古典型概率与几何型概率

1. 古典型概率

一个随机试验 E 若满足：

(1) 基本事件空间中只有有限多个基本事件(有限性)，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

(2) 各基本事件出现的可能性相等(等可能性)，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$。

则称该随机试验为古典型随机试验。

定义 1-6 设古典型随机试验的基本事件空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，若随机事件 A 中含有 k $(k\leqslant n)$ 个基本事件，则定义

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中基本事件个数}}{\Omega\text{中基本事件个数}} \tag{1-13}$$

例如，随机试验 E——掷硬币观察其面，其基本事件空间是 $\Omega=\{$“正面”，“反面”$\}$，$A=\{$“正面”$\}$，则 $P(A)=\frac{1}{2}$。

例 1-11 掷两枚骰子，观察出现的点数所组成的数对(x,y)，求事件$A=\{$点数之和等于5$\}$，$B=\{$点数之和小于5$\}$的概率。

解 基本事件空间$\Omega=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),(6,2),\cdots,(6,6)\}$中含有36个基本事件，事件$A=\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$中含有4个基本事件，事件$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$中含有6个基本事件，于是

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}，\quad P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

例 1-12 一部五卷文集随机放在书架上，求事件$A=\{$从左到右或从右到左卷号顺序恰好为$1,2,3,4,5\}$的概率。

解 基本事件空间Ω中含有$P_5^5=5!=120$个基本事件，事件A中仅含有2个基本事件，于是$P(A)=\dfrac{2}{120}=\dfrac{1}{60}$。

例 1-13 袋中装有4个白球、5个黑球，现从中任取两个，求：

(1) 两个均为白球的概率P_1；

(2) 被取的两个球中，一个白球一个黑球的概率P_2；

(3) 至少有一个黑球的概率P_3。

解 (1) $P_1=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}=\dfrac{1}{6}$

(2) $P_2=\dfrac{C_4^1C_5^1}{C_9^2}=\dfrac{5}{9}$

(3) 事件“至少有一个黑球”=“恰好只有一个黑球”+“两个都是黑球”，根据加法公式得

$$P_3=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^2}+\frac{C_5^2}{C_9^2}=\frac{5}{6}$$

例 1-14 书架上随意摆放着15本教科书，其中有5本是数学书，从中随机抽取3本，求至少有一本是数学书的概率。

解 设$A=\{$被抽到的3本书中至少有一本是数学书$\}$，则

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}$$

2. 几何型概率

设Ω是平面一区域，具有有限面积$L(\Omega)$。向区域Ω中投掷一质点M，点M在Ω中均匀分布，即①点M必落于Ω中；②点M落在Ω的子区域中的概率与该子区域的面积成正比，而与该子区域在Ω中的位置与形状无关。设A是Ω中一子区域，其面积为$L(A)$，则质点M落在区域A中的概率是

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)} \tag{1-14}$$

例 1-15 若在区间$(0,1)$上随机地取两个数x,y，求关于t的一元二次方程$t^2-2yt+x=0$有实根的概率。

解 设事件 $A=\{$方程 $t^2-2yt+x=0$ 有实根$\}$，因 x,y 是从区间 $(0,1)$ 上任取的两个数，则 (x,y) 的取值区域是 $\Omega=\{(x,y)|\,0<x,y<1\}$，事件 A 的取值区域是 $A=\{(x,y)|4(y^2-x)\geqslant 0,0<x,y<1\}$，如图 1-1 所示。于是

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\int_0^1 y^2\mathrm{d}y}{1}=\frac{1}{3}y^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

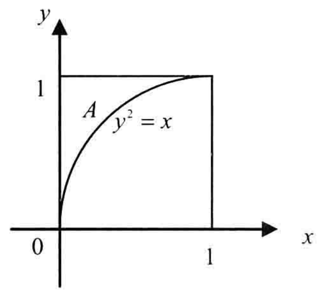


图 1-1

1.5 条件概率

1. 条件概率

定义 1-7 设 A,B 是两个随机事件，且 $P(A)>0$，则称 $\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 已出现的条件下事件 B 出现的概率，记作 $P(B|A)$，即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1-15}$$

例如，随机试验 E——从 54 张混放的扑克牌中随机抽取一张，观察抽到哪一张牌。其基本事件空间中含有 54 个基本事件。事件 $A=\{$抽到黑桃$\}$，事件 $B=\{$抽到黑桃 5$\}$，则在已知抽到黑桃的条件下，抽到黑桃 5 的概率是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{54}}{\frac{13}{54}}=\frac{1}{13}$$

[注] 条件概率亦是概率，故它具有概率的性质，如:

(1) $P(\Phi|B)=0$。

(2) $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$。

(3) $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)-P(A_1A_2|B)$。

例 1-16 某种动物活到 20 岁以上的概率为 0.8，活到 25 岁以上的概率为 0.4，求现年 20 岁的这种动物能活过 25 岁的概率。

解 设 $A=\{$能活到20岁以上$\}$，$B=\{$能活到25岁以上$\}$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=\frac{1}{2}$$

2. 乘法公式

由条件概率公式 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$，得两个随机事件的乘法公式为

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)，(P(A)>0) \tag{1-16}$$

乘法公式的一般形式：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1-17}$$

其中，$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$。

证 因为 $A_1A_2\cdots A_{n-1}\subset A_1A_2\cdots A_{n-2}\subset\cdots\subset A_1A_2\subset A_1$，则

$$P(A_1)\geqslant P(A_1A_2)\geqslant\cdots\geqslant P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$$

从而

$$右端=P(A_1)\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}\frac{P(A_1A_2A_3)}{P(A_1A_2)}\cdots\frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})}=P(A_1A_2...A_n)=左端$$

例 1-17　三张考签中有两张难签，甲、乙、丙三人通过抽签决定两张难签的归属，甲先、乙次、丙最后。

(1) 求乙抽到难签的概率；

(2) 已知乙抽到了难签，求甲也抽到难签的概率。

解 设 A,B,C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，则

(1) $P(B)=P(\Omega B)=P[(A+\bar{A})B]=P(AB)+P(\bar{A}B)$

$$=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{2}{3}$$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\div\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$

例 1-18 已知 40 件产品中有 3 件次品，现随意从中先后取出 2 件产品，试求：

(1) 第一次取到次品的概率 P_1，第二次取到次品的概率 P_2，第二次才取到次品的概率 P_3；

(2) 取出的 2 件产品中至少有一件是次品的概率 P_4；

(3) 已知取出的 2 件产品中至少有一件是次品，那么另一件也是次品的概率 P_5。

解 设 A_i={第 i 次取到次品}($i=1,2$)，则：

(1) $P_1=P(A_1)=\dfrac{3}{40}$

$$P_2=P(A_2)=P[A_2(A_1+\bar{A}_1)]=P[A_1A_2+\bar{A}_1A_2]=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)$$

$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=\frac{3}{40}\times\frac{2}{39}+\frac{37}{40}\times\frac{3}{39}=\frac{3}{40}$$

$$P_3=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)=\frac{37}{40}\times\frac{3}{39}=\frac{37}{520}$$

(2) $P_4=P(A_1+A_2)=1-P(\overline{A_1+A_2})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)=1-\frac{37}{40}\times\frac{36}{39}=\frac{19}{130}$$