"十二五"全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

YINGYONG SHUXUE WEIJIFEN

应用数学——微积分

主编　何英凯　郑佳　张奎

中国商业出版社

全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

应用数学
——微积分

主　编　何英凯　郑　佳　张　奎

副主编　赵启明　崔立芝

中国商业出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学——微积分/何英凯,郑佳,张奎主编.
—北京:中国商业出版社,2014.2
ISBN 978-7-5044-8248-8

Ⅰ.①应… Ⅱ.①何…②郑…③张… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材①微积分-高等学校-教材
Ⅳ.①F224.0②O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 223883 号

责任编辑:刘毕林

中国商业出版社出版发行
010-63180647 www.c-cbook.com
(100053 北京广安门内报国寺 1 号)
新华书店总店北京发行所经销
北京书林印刷有限公司印刷

* * * * *

787×1092 毫米 开本:1/16 印张:21 字数:360 千字
2014 年 2 月第 1 版 2014 年 2 月第 1 次印刷

定价:39.80 元

* * * *

(如有印装质量问题可更换)

“十二五”全国各类高等院校应用型教学精品课程规划教材

编委会

总主编 李秀玲 何英凯 王慧敏

编　委 李秀玲 何英凯 王慧敏
刘丽梅 张　奎 王　宇
曹忠威 王　雷 刘　煦
郑　佳 赵启明 崔立芝

本书编写人员 何英凯 郑　佳 张　奎
赵启明 崔立芝

丛书策划 刘毕林 蔡　凯

前　言

《微积分》是高等院校经济与管理专业的必修基础课。编者结合多年教学研究和改革实践经验，参照最新的本科数学课程教学要求，借鉴当前国内外相关教材的优点，侧重学生应用能力的培养和综合素质的提高，编写了这本适合培养应用型人才的高校经济管理类专业教学使用的微积分教材。

在本书的编写过程中，按循序渐进的原则，深入浅出。从典型的自然科学与经济分析中的实际例子出发，从直观的几何现象，引出微积分的基本概念，如极限、导数及积分等。再从理论上进行论证，得到一些有用的方法和结果，然后再利用它们解决更多的自然科学和经济分析中的实际问题。这样从特殊到一般，再从一般到特殊，从具体到抽象，再从抽象到具体，将微积分和经济分析的有关内容有机地结合起来，为学生将来利用数学分析的方法讨论更深入的经济问题打下了良好的基础。在教材体系结构及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一元函数的极限与连续的理论要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明。在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面有较大的提高。书中将数学素质的培养有机地融合于知识讲解中，突出数学思想的介绍，突出数学方法的应用。

为了适应目前经济管理类微积分教学的实际情况，习题分成了(A)、(B)两类，(A)类习题属于基本题型，(B)类习题属于难度较大的综合题型。

本教材内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程简介，书后附有习题(A)、(B)及参考答案。

本书共分十章，第一、二章由郑佳编写，第三、四章中国劳动关系学院张奎编写，第五、六章由赵启明编写，第七、八、九章由崔立芝编写、第十章由何英凯编写，全书的编写思想、结构安排、统稿定稿由何英凯承担。李秀玲对全书进行了审阅。

由于作者水平有限，难免存在不足甚至错误，希望读者在使用中对本书的不足之处多提宝贵意见，以便进一步修改和完善。

编者

2014 年 2 月

目 录

第1章 函数

函数是微积分学中最重要的基本概念之一，是现实世界中各种变量之间相互依赖关系的一种抽象，是微积分学研究的主要对象. 在本章中，我们将介绍函数的概念及其基本性质，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中的常用函数.

§1.1 集 合

集合是一个基本概念，作为数学中的最原始的概念之一，它是整个现代数学的基础.

一、集合的概念

一般地，我们把具有某种属性的事物集体称为**集合**(简称集). 比如实数集. 集合中的每个个体称为**元素**. 集合具有无序性(给定集合中元素之间无序)、确定性(给定集合的元素必须是确定的)和互异性(给定集合中的元素是互不相同的). 比如“年龄较小的人”不能构成集合，因为它的元素不是确定的.

我们通常用大字拉丁字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记作：$a \in A$. 否则称 a 不属于 A，记作：$a \notin A$.

下面我们列举几个常用集合：

(1) 全体实数组成的集合称为**实数集**，记作 R；

(2) 全体有理数组成的集合称为**有理数集**，记作 Q；

(3) 全体整数组成的集合称为**整数集**，记作 Z；

(4) 全体非负整数组成的集合称为**非负整数集**(或**自然数集**)，记作 N.

二、集合的表示方法

(1) 列举法：把集合的元素一一列举出来，并用“{}”括起来表示集合. 例如：$A=\{a,b,c\cdots\}$；

(2) 描述法:用所有元素的共同特征来表示集合. 例如:

$$M = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}.$$

三、集合间的基本关系

一般地，对于两个集合 A,B，如果集合 A 中的所有元素都是集合 B 的元素，我们就说 A,B 有包含关系，称集合 A 为集合 B 的**子集**，记作 $A \subseteq B$，称 A 包含于 B;或 $B \supseteq A$，称 B 包含 A. 并且，如果集合 A 是集合 B 的子集，但至少存在一个元素属于 B 但不属于 A，我们称集合 A 是集合 B 的**真子集**，记作 $A \subset B$.

我们把不包含任何元素的集合叫做**空集**，记作 ϕ. 并规定，空集是任何集合的子集.

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，此时集合 A 中的元素与集合 B 中的元素完全相同，因此集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A = B$.

由上述集合之间的基本关系，可以得到下面的结论:

(1) 反身性:任何一个集合是它本身的子集，即 $A \subseteq A$;

(2) 传递性:对于集合 A,B,C，如果 A 是 B 的子集，且 B 是 C 的子集，则 A 是 C 的子集 .

四、集合的基本运算

我们把由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**. 记作 $A \cup B$ 或 $A + B$.(在求并集时，它们的公共元素在并集中只能出现一次.)记作 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$，如图 1.1.

一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**. 记作 $A \cap B$ 或 AB. 即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$，如图 1.2.

一般地，由所有属于 A 且不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A \backslash B$ 或 $A - B$，即 $A \backslash B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$，如图 1.3.

有时我们把研究领域的问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**，称 $I \backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 $\overline{A}$，如图 1.4.

集合的运算满足下列法则:

(1) 交换律 $A \cup B = B \cup A$， $A \cap B = B \cap A$;

(2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$， $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

(4) 对偶律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$， $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

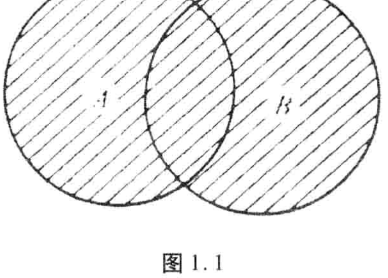


图 1.1

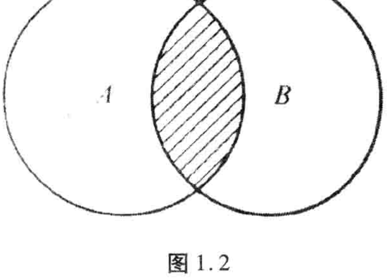


图 1.2

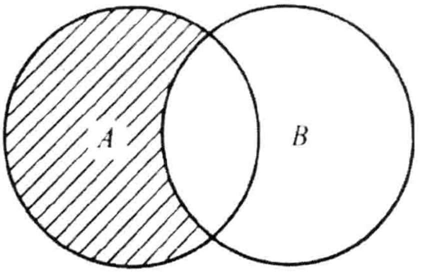


图 1.3

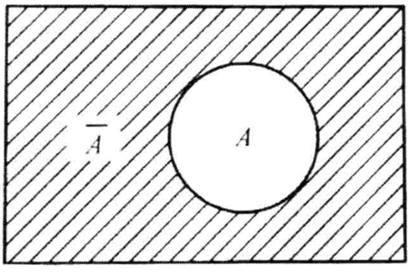


图 1.4

五、区间与邻域

定义 1.1 介于某两个实数之间的全体实数称为**区间**. 这两个实数称为**区间端点**. 两个端点间的距离(线段长度)称为**区间长度**.

区间是微积分常用的实数集，根据区间长度是否有限，分为**有限区间**与**无穷区间**. 设 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 则有

有限区间

闭区间 $[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$； **开区间** $(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$；

半开区间 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$， $[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

无限区间 $(-\infty,b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$； $(-\infty,b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$；

$[a,+\infty) = \{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$； $(a,+\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\}$；

$R = (-\infty,+\infty)$.

在今后的讨论中，有时需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合. 为此，引入邻域的概念.

定义 1.2 设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的**邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid x_0-\delta < x < x_0+\delta\},$$

称 x_0 为**该邻域的中心**，δ 为该邻域的**半径**，如图 1.5. 其中 $(x_0-\delta,x_0]$ 称为点 x_0 的**左邻域**，$[x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右邻域**.

由于 $x_0-\delta < x < x_0+\delta$ 相当于 $|x-x_0| < \delta$, 因此邻域又可以表示为

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid |x-x_0| < \delta\},$$

此邻域表示与点 x_0 距离小于 δ 的一切实数的全体.

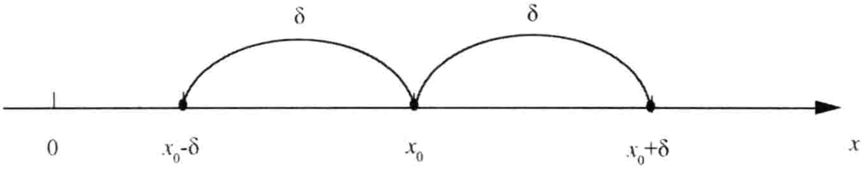


图 1.5

有时需要把邻域中心去掉，$U(x_0,\delta)$ 去掉中心 x_0 后，称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记作

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta) = \{x \mid (x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}\},$$

称为点x_0的**空心邻域(或去心邻域)**，如图1.6.$(x_0-\delta,x_0)$称为点x_0的**空心左邻域**，$(x_0,x_0+\delta)$称为点x_0的**空心右邻域**.

由于$(x_0-\delta,x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$相当于$0<|x-x_0|<\delta$，因此点$x_0$的空心邻域又可以表示为

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

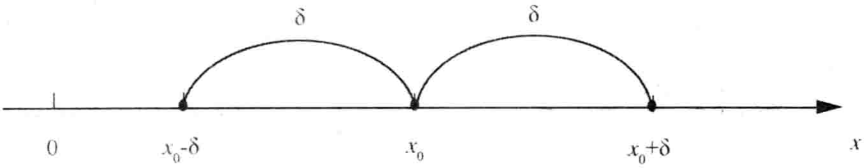


图1.6

§1.2 函数关系

一、常量与变量

在我们周围的所有活动中，经常会遇到各种不同的量，例如时间、产量、速度、需求、成本、收益、利润等.其中有的量在过程中不起变化，我们称之为**常量**，在数轴上表示为一个定点；有的量则在过程中是变化的，可以取不同的数值，我们称之为**变量**，在数轴上则表示为一个动点.而常量与变量经常在变化过程中相互转化，并不是一成不变的。

如果将变量看成是在一个非空数集内任意取值的量，常量可看成是在单元素集合中取值的变量，因而常量就是变量的特例. 如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围.

二、函数概念及其表示方法

任何变量都不是孤立存在的，一个量的变化总会引起其他量的变化，或者随着其他变量的变化而变化，而这种依赖关系正是我们最关心的.比如:路程、人口、销售量总是依赖于时间、价格之类的变量.

微积分是以函数关系为研究对象的.而函数关系粗略地讲就是两个或者多个变量之间的关系.

例1.1 表1.1简单明了地反映了利率与时间变量之间的依存关系.每一个期限都有一个确定的利率与之对应，可以根据利率表算出存款利息.

表1.1 国务院公布的利率表

日期t	3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
利率r	2.6%	2.8%	3.0%	3.75%	4.25%	4.75%

例1.2 在自由落体运动中，设物体下落的时间为t，落下距离为s.则变量s与t之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中，g 是重力加速度.

在以上的例子中，它们各自研究的对象不同，变量之间的表达形式也不同，但是它们的本质是相同的，即在某个过程中的两个变量是相互联系的，当其中一个变量在某一范围内每取一个值时，另一个变量就按照一定的对应规则，有唯一确定的值与之对应. 将变量之间的这种相互依赖关系加以抽象概括，就得到下面的定义.

定义 1.3　设 x 和 y 是两个变量，D 为一个非空的实数集合，如果存在一个对应规则 f，对于 $\forall x \in D$，按照对应法则 f 有唯一变量 $y(y \in R)$ 与 x 相对应，则称对应规则 f 为定义在实数集合 D 上的**函数**. 记作

$$y = f(x), \qquad x \in D_f.$$

称数集 D 为函数 f 的**定义域**，记作 D_f，其中 x 为**自变量**，y 为**因变量**.

全体函数值所构成的集合，称为函数的**值域**，记为 Z 或 Z_f，即

$$Z = Z_f = \{y \mid y = f(x), \quad x \in D_f\}.$$

在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定函数的定义域. 如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域称为**自然定义域**.

例 1.3　求 $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的自然定义域.

解　由 $x+1>0$，$x-1 \geqslant 0$ 且 $x-1 \neq 0$ 可得函数的定义域为 $(1, +\infty)$

注意　(1) 函数的定义域与对应法则称为**函数的两个要素**. 两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同. 例如，函数 $y = x+1$ 的自然定义域为 $(-\infty, +\infty)$；而函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的自然定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$，由于定义域不同，因此这是两个不同的函数；

(2) 函数的定义域和值域必须是非空集合，否则集合中没有元素就不可能构成映射，函数也就不存在了；

(3) 自变量的任一数值只有唯一的函数值与之对应，这类函数称为**单值函数**. 例如 $y = \sqrt{1-x^2}$. 相反，自变量的任一数值有多个函数值与之对应，称为**多值函数**. 例如 $y^2 = 1-x^2$. 可以将其分解成两个单值函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 来讨论.

函数表示方法一般有三种：

(1) **表格法**　自变量所取的值和对应的函数值列成一个表格；

(2) **图式法**　在坐标系中用图形来表示函数的方法；

(3) **解析法（公式法）**　自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法. 例如，直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的上半单位圆的方程是 $y = \sqrt{1-x^2}$，其中 $x \leqslant 1$.

以上三种函数表示方法各有优缺点：表格法一目了然，图示法形象直观，公式法便于推导. 在研究具体问题时，常常是将三种方法结合起来使用.

在中学数学已经讨论过许多函数，如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等，这些函数在以后的讨论中将反复出现. 下面再举几个函数的例子.

例 1.4　**绝对值函数**

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z_f=[0,+\infty)$，如图 1.7 所示.

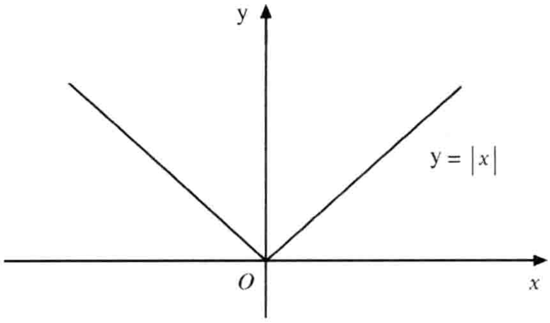


图 1.7

例 1.5　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\0, & x=0,\\-1, & x<0.\end{cases}$$

对于任意实数 x，都有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$. 它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 $Z_f=\{-1,1\}$，如图 1.8 所示.

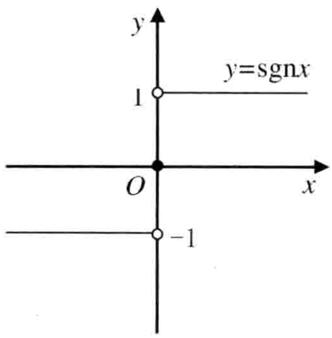


图 1.8

例 1.6　取整函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，称为 x 的**整数部分**. 例如 $[2.6]=2$，$[\pi]=3$，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[-2.6]=-3$. 可以证明，对任意实数 x，有不等式 $[x]\leqslant x<[x]+1$ 成立. 它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$，值域 Z_f 为正整数集，如图 1.9 所示.

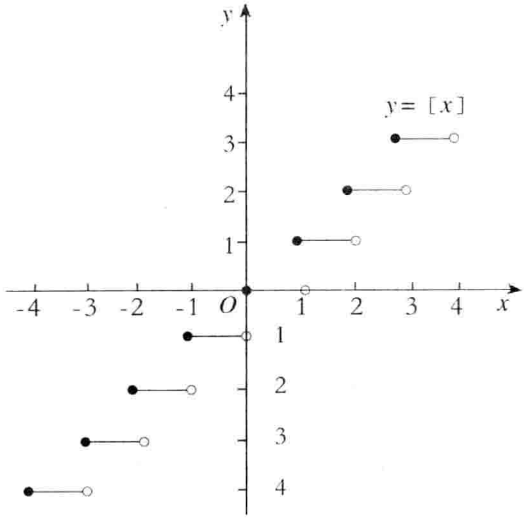


图 1.9

这三个函数在其定义域的不同部分，对应法则由不同的算式表达，这样的函数称为**分段函数**. 分段函数在其整个定义域上是一个函数，不是多个函数. 用几个式子来表示一个函数，不仅与函数的定义不矛盾，而且在现实问题，特别是经济学中经常会遇到这种情形.

例 1.7 国际投寄信函的费用与信函重量有关，如表 1.2.

表 1.2 **国际投寄信函的收费标准**(1999 年 3 月 1 日)

20 克及 20 克以下	4.40 元
20 克以上至 50 克	8.20 元
50 克以上至 100 克	10.40 元
100 克以上至 250 克	20.80 元
250 克以上至 500 克	39.80 元

那么收费 $f(x)$ 与信函重量 x 之间的函数关系为

$$y=f(x)=\begin{cases}4.40, & x\leqslant 20,\\ 8.20, & 20<x\leqslant 50,\\ 10.40, & 50<x\leqslant 100,\\ 20.80, & 100<x\leqslant 250,\\ 39.80, & 250<x\leqslant 500.\end{cases}$$

要解决实际问题，先要将实际问题量化，学会建立数学模型. 首先要抽象出实际问题中的函数关系，先分清哪些是常量，哪些是变量，然后确定自变量与因变量，最后建立函数关系，同时给出函数定义域.

例 1.8 火车站行李收费规定：当行李不超过 $50kg$ 时，按每千克 0.15 元收费，当超过 $50kg$ 时，超重部分按每千克 0.25 元，那么行李收费 $f(x)$ 元与行李重量 x 之间的函数关系为

$$y=f(x)=\begin{cases}0.15x, & x\leqslant 50,\\ 7.5+0.25(x-50), & x>50.\end{cases}$$

其中定义域为$[0,+\infty)$.

§1.3 函数的基本特性

本节将介绍函数的单调性、有界性、奇偶性及周期性等几何特性.

一、有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在集合 D 内有定义，数集 $X\subseteq D$. 如果存在常数 $M>0$，使得对任意的 $x\in X$，恒有 $|f(x)|\leq M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；若这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**，每一个具有上述正数的 M，称为该函数的**界**.

显然，有界函数必有上界和下界. 反之，既有上界又有下界的函数必有界.

有界函数的图形完全落在两条平行于 x 轴的直线之间，如图 1.10.

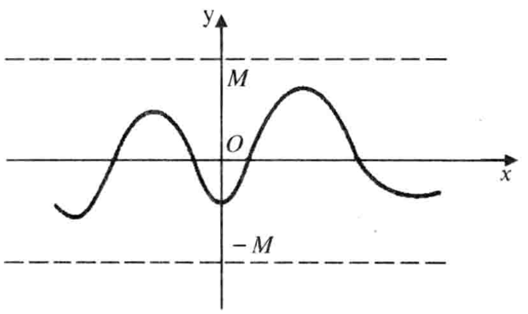


图 1.10

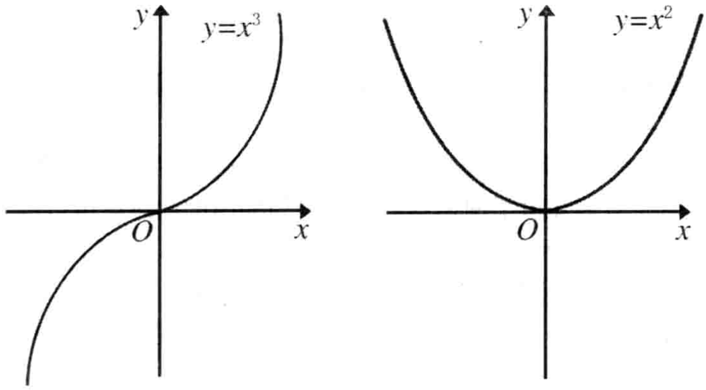
例如，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，这是因为在$(-\infty,+\infty)$内，$|\sin x|\leq 1$ 恒成立.

而函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内有下界，但无上界，因此 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内是无界函数. 不过，函数 $y=x^2$ 在$[-1,1]$是有界函数. 此例表明，一个函数 $f(x)$ 是否有界，与所给区间有关.

二、单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在实数集 D 上有定义，对 D 内的任意两数 x_1，$x_2(x_1<x_2)$，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调增加**函数，几何图形上曲线是沿 x 轴正向曲线单调上升；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称 $f(x)$ 在 D 内是**单调减少**函数，在几何图形上曲线是沿 x 轴正向单调递减. 单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**.

例如，函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的，如图 1.11(a). 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内是单调减少函数，在$(0,+\infty)$内为单调增加函数. 但在整个定义域$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数，如图 1.11(b).



(a) (b)

图 1.11

三、奇偶性

定义 1.6 设函数$f(x)$在一个关于原点对称的实数集合D内有定义，若:

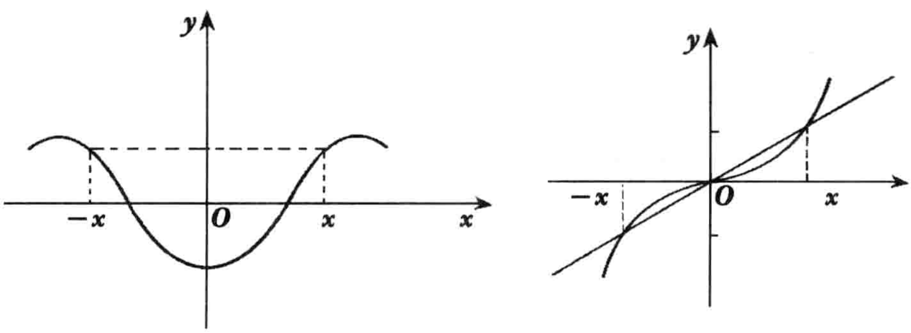
(1)$f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$为**偶函数**;

(2)$f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$为**奇函数**;

(3) 既不是偶函数也不是奇函数的，称为**非奇非偶函数**.

由定义 1.6 可知，偶函数的图形关于y轴对称，如图 1.12(a). 奇函数的图形关于原点对称，如图 1.12(b). 函数具有奇偶性时，其定义域一定是关于原点对称的，而且它们的各种性态都可以由对称性从一方面推知对称的另一方面. 反之如果函数的定义域不是关于原点对称的，则它必定是非奇非偶函数.

例如，$y=\sin x$是奇函数，$y=\cos x$是偶函数，$y=C$(C为非零常数) 是偶函数，$y=0$既是奇函数又是偶函数，$y=x^2+x^3$是非奇非偶函数.



(a) (b)

图 1.12

四、周期性

定义 1.7 设函数$f(x)$在集合D内有定义，如果存在常数$T>0$，使得对任意的$x\in D$,