高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编 陶平生 冯跃峰 边红平

CHUDENG ZUHE JIHE

初等组合几何

冯跃峰 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高中数学竞赛专题讲座

初等组合几何

冯跃峰 编著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座.初等组合几何/冯跃峰编著.
—杭州:浙江大学出版社,2010.1
ISBN 978-7-308-07342-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 015163 号

高中数学竞赛专题讲座(初等组合几何)
冯跃峰 编著

责任编辑 沈国明
文字编辑 吴 慧
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排 版 杭州大漠照排印刷有限公司
印 刷 临安市曙光印务有限公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 19.75
字 数 380 千
版 印 次 2010 年 3 月第 1 版 2010 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-07342-4
定 价 28.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

丛书编委会

内容提要

本书介绍了组合几何中的一些简单而有趣的数学问题，其中绝大多数问题都是本书首次提出，如凸 n 点组、r-点直线、覆盖直线、最点直线、r-点圆、r-相交、互交组、聚交组、等距点集、整距点集、格径 r 点问题、极角问题、最省分割、均匀分隔、完全分隔、最省分隔、独立同色形、相关同色形、最省覆盖、多重覆盖、最小覆盖次数等等。这些问题，内容虽然简单，但要彻底解决它们，却是相当困难的，这也正是组合几何的魅力所在。

本书涉及的内容，大都是作者最新的研究成果，但为了系统起见，本书也选编了几个著名的组合几何问题，如克莱因(E. Klein)问题、赫尔伯伦(Heilbronn)问题、波利亚(Polya)问题、覆盖问题等。这些问题中属于其他作者的研究结果，都在书中一一注明，以示尊重。但也有个别结果不知出处，因而只"援引作者的证明，而不是援引他们的姓名"(帕斯卡语)。在此，特向这些原作者致以谢意！

本书既为初等数学研究提供了广阔的研究领域，也为数学奥林匹克提供了良好的材料，它适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读。

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来,反响强烈,深受广大读者喜爱,并收到了大量反馈信息。很多读者,包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见,希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求,我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共10种:《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》、《函数不等式》、《初等组合几何》;考虑到配套,把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传授数学思想方法,侧重培养学生的逻辑思维能力,不唯解题而解题;

2. 本着少而精的原则选择材料,不搞题海战术,不追求大而全,而是以点带面,举一反三;

3. 以数学修养和能力培养为立意,通过深刻剖析问题的数学背景,挖掘数学内涵,培养学生的数学品格和解决实际问题的能力;

4. 在注重基础知识训练同时,有适当程度的拔高,对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编;参加编写的成员是:陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限,书中的不妥之处敬请读者批评指正。

前　　言

组合几何是现代数学中的一个新的分支，它的研究对象是几何元素间的组合关系，它的一个显著特点，就是平面几何中的一些基本定理都无法用上。如果要对组合几何下一个定义的话，那么是不是可以这么说，欧氏几何中的一些基本定理几乎都派不上用场的几何就是组合几何。这一点，既是魅力，又是难点。

组合几何内容丰富、生动、有趣，解题方法新颖别致，独树一帜。因此，掌握组合几何中处理问题独特的思想方法，是学好组合几何的基础。当然，更重要的是以自己深邃的洞察力和灵活的数学机智，创造新的思想方法（对原有的方法进行变异、推广、组合、改造等），这也正是组合几何的特点，它需要知识，更需要智慧。

笔者是一位组合数学的爱好者，而组合几何那独特的优美，更是深深地吸引着我去收集一些与之相关的有趣问题，并对之进行一些浅显的研究，将其心得写成这本“初等组合几何”。

之所以冠名为“初等”，意在说明本书没有高深的研究，所有问题都是简单而初等的，且都限定在欧氏平面内，不涉及射影平面，从而所有知识都没有超出中学的范围，期望只具有中学数学水平的人（比如中学生）也能领略到组合几何的精彩与优美。

本书共分 10 章，每一章都相对独立，自成体系，从而读者不必按书中的章节顺序阅读，可根据自己的兴趣爱好，选读其中的几个章节，但对于参加数学竞赛的读者而言，最好能读完全书。

限于水平，谬误难免，敬请读者指正。

冯跃峰

2010 年 3 月

目录

第一章 凸 性

1.1 预备知识

所谓凸性，是指给定的点集中某种凸图形的存在性.

为了研究几何对象的凸性，我们先介绍如下一些基础知识.

定义 1－1 凸集：设 G 是一个平面点集，对 G 中任意两点 A、B，线段 AB 上的点都在 G 中，则称集合 G 为凸集.

定义 1－2 凸图形：凸集的边界称为凸图形.

定义 1－3 凸形：有界闭凸集称为凸形.

注意 凸多边形是特殊的凸图形，但不是凸集，更不是凸形.

凸图形具有这样的性质：对凸图形边界上任意两点 A、B，线段 AB 上的点都在凸图形的内部.

定义 1－4 凸包：设 A 是一个平面点集，则覆盖集合 A 的最小凸集称为 A 的凸包.

凸包可从直观上进行这样的形象解释：把平面设想为木板，把平面上的点设想为钉在木板上的铁钉，那么，用一根橡皮圈自然围住铁钉而成的图形（凸集）即这些点的凸包.

凸包是研究凸性的一个重要工具，当点集是离散的点时，凸包为凸多边形或线段.

凸包的作用在于，把给定的点控制在一个有限区域（凸图形）内，有利于发现点的分布状态，特别是凸包的边界点常取到特殊的作用，常可通过对凸包形状的认识，来研究点集的性质.

为了利用给定点集的凸包，先应讨论凸包的形状：明确凸包的边界上有多少个已知点，内部有多少个已知点. 此外，我们有如下 3 种常见的处理凸包的手段：

(1) 凸包的分割：通过凸包内部的 2 已知点作直线，将点集划分为 2 块，以便在某一块中找到所需要的对象.

比如寻找凸多边形,可设想凸包内部的2已知点为某凸多边形的两个相邻顶点,从而凸多边形的所有顶点都在过这 2 点的直线的同一侧.

(2) 凸包的对角线剖分:连凸包的若干条对角线,将凸包剖分成若干个三角形.

(3) 凸包的完全剖分:如果给定点集是离散点集,则可利用所有给定的点(每个点至少连一条线段),将凸包剖分成若干个三角形.

下面介绍与凸性相关的两个基本定理.

定理 1-1　两个凸集的交仍为凸集.

证明　设 M、N 都是凸集,取 $A \in M \cap N, B \in M \cap N$,要证线段 $AB \subseteq M \cap N$. 任取 $P \in AB$,因为 $A \in M, B \in M$,且 M 是凸集,所以线段 $AB \subseteq M$. 同理线段 $AB \subseteq N$,所以线段 $AB \subseteq M \cap N$,故 $M \cap N$ 为凸集.

定理 1-2　凸集边界上的点依次用线段连接得到的图形是凸图形.

证明　每连一条边,可看作是以这条边所在的直线为边界的半平面与凸集的交,结果仍为凸集. 再连一条边,可看作是以这条边所在的直线为边界的半平面与新得到的凸集的交,结果仍为凸集. …… 如此下去,得到一个以所连的线段为边界的一个凸集,定理获证.

上述证明的实质是利用了这样的引理:直线将凸集划分为两部分,每一个部分仍为凸集.

推论　图形边界上的点依次用线段连接得到的多边形为凸多边形.

1.2 克莱因(E. Klein)问题

1932 年,匈牙利的一位女大学生克莱因(E. Klein) 提出了这样一个问题(见文献[1]):

问题 1-1　给定自然数 k,求最小的自然数 $H(k)$,使平面上任 $H(k)$ 个点(其中无三点共线),都有 k 个点构成一个凸 k 边形的顶点.

显然,$H(3) = 3$.

克莱因本人证明了 $H(4) = 5$,即:给定平面上 n 个点,其中必有 4 个点构成凸四边形,则 n 的最小值为 5.

实际上,易知 $H(4) > 4$,因为我们有如下反例(图 1-1):

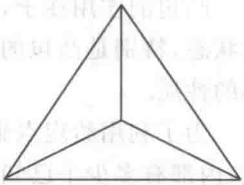

图 1-1

要证明 $H(4) = 5$,只须证明 5 点中必有凸 4 边形,下面我们来重复一下克莱因的工作.

考察题给五点的凸包,有如下一些情况:

(1) 若凸包为四边形或五边形,结论显然成立;

(2) 若凸包为三角形,设为$\triangle ABC$,则点D、E在$\triangle ABC$的内部(图 1-2).

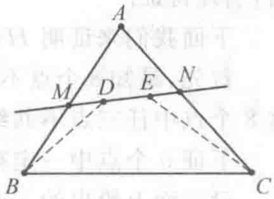

图 1-2

显然,此时的凸 4 边形必定含有D、E为顶点,而且是两个连续的顶点,于是,作直线DE,不妨设直线DE与AB、AC交于M、N,则由定理 2,$MBCN$是凸四边形,进而$DBCE$是凸四边形,定理获证.

对$k>4$,克莱因无法解决自己提出的问题,便去请教她的同学泽克勒斯(G. Szekeres),1935 年,泽克勒斯和厄尔多斯(Erdos)首次公开了这一问题,并引述了克莱因关于$H(4)=5$的证明.

我们自然会问:$H(5)=?$

此问题已被著名数学家杜朗(Turan)和马凯(Makai)共同解决,他们证明了$H(5)=9$,但这一结论的初等证明因其分类相当繁琐而过于冗长(要用几页纸才能写下),寻找一个简单而初等的证明是一件有意义的工作.

2000 年,熊斌教授给出了它的一个比较简洁而初等的证明,但也较复杂,我们介绍如下(参见文献[2]).

先证明如下的引理:

引理 1-1　设平面上有一个任意三点不共线的点集,其凸包K之顶点集记为S,若在凸包内有m个点围成一凸m边形,且凸m边形存在一条边A_2A_3,它的邻边A_1A_2、A_3A_4(A_1、A_2、A_3、A_4都是顶点),若记A_1A_2、A_4A_3的延长线和A_2A_3围成的区域为T(图 1-3 中阴影部分),又有n个点($\in S$)在T中,则此n个点和凸m边形组成的凸包是一个凸$m+n$边形,如图 1-3 所示.

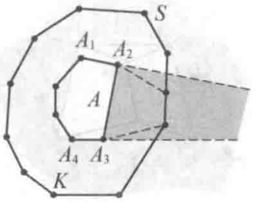

图 1-3

图 1-4

引理 1-1 的证明　记凸m边形组成的区域为A,显然$A\cup T$是一个凸集.若n个点和凸m边形的凸包B之顶点数小于$m+n$,则必有点在B内部.由于m边形的顶点都是凸集$A\cup T$的顶点或边界点(即A_2、A_3),因此,在内部的点一定在那n个点之中.于是,此点在S中.又易知B在K中,于是,此点又在K内部.由于此点属于S,则必为K的顶点,矛

盾，引理得证.

下面我们来证明 $H(5)=9$.

首先，易知 8 个点不合乎条件，如图 1-4，在双曲线的每一支上各放 4 个点，可以使得这 8 个点中任三点不共线，此时就不存在凸五边形.

下证 9 个点中一定存在凸五边形.

设平面上给出的 9 个点为 $A_1, A_2, \cdots, A_9$，考虑这 9 个点的凸包，设为凸 k 边形.

(1) 若 $k \geqslant 5$，结论显然成立.

(2) 凸包为四边形，不妨设为 $A_1A_2A_3A_4$，点 $A_5, A_6, \cdots, A_9$ 在其内部.

若 $A_5, A_6, \cdots, A_9$ 围成一个凸五边形，则问题已经解决，否则此五点中必存在四点，使得其中一点在以另三点为顶点的三角形内部，不妨设 A_5 在 $\triangle A_6A_7A_8$ 内部.

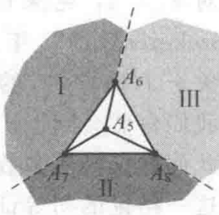

图 1-5

连结 A_5A_6、A_5A_7、A_5A_8 并延长，设射线 A_5A_6、A_5A_7 所围区域再除去 $A_5A_6A_7$ 得到的区域记为 Ⅰ，同样得到区域 Ⅱ 和 Ⅲ（如图 1-5）.

显然 A_1、A_2、A_3、A_4 都在这三个区域中，于是由抽屉原理知，一定有一个区域至少包含了其中的两个点，不妨设 A_1、A_2 在区域 Ⅰ 中，由引理 1-1 知，点 A_5、A_6、A_7、A_1、A_2 围成一凸五边形.

(3) 凸包为三角形，不妨设为 $\triangle A_1A_2A_3$，另外 6 点 $A_4, A_5, \cdots, A_9$ 在其内部. 对于 $A_4, A_5, \cdots, A_9$，分如下两种情况：

(ⅰ) 若凸包为四边形，不妨设为 $A_4A_5A_6A_7$，考虑延长线段 A_8A_9 的两端，若与四边形 $A_4A_5A_6A_7$ 的邻边相交，如图 1-6，不妨设与邻边 A_4A_5、A_4A_7 相交.

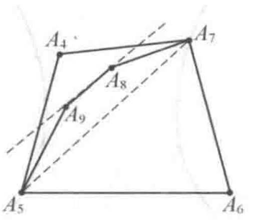

图 1-6

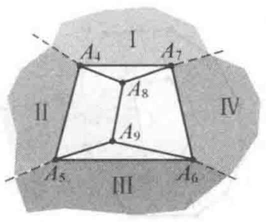

图 1-7

因为 A_8、A_9 在 $\triangle A_4A_5A_7$ 内部，此时 A_8、A_9、A_5、A_6、A_7 构成一凸五边形.

又若延长线段 A_8A_9 的两端后和四边形 $A_4A_5A_6A_7$ 的对边相交，不妨设与 A_5A_6、A_4A_7 相交，如图 1-7，四块区域 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 分别用阴影部分表示，易知四块区域覆盖了除四边形 $A_4A_5A_6A_7$ 外的部分（当然，若射线 A_8A_4、A_9A_5 相交或射线 A_8A_7、A_9A_6 相交，

则四个区域将发生重叠).

现有三个点 A_1、A_2、A_3 在四个区域中,由引理知,若无凸五边形,则区域Ⅱ、Ⅳ 中不能有点. 而区域 Ⅰ、Ⅲ 中至多各有一点,于是,四个区域至多包含两点,这和三个点 A_1、A_2、A_3 的存在相矛盾.

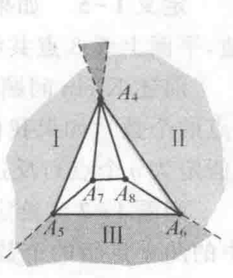

图 1-8

(ⅱ) 若凸包为三角形,不妨设为 $\triangle A_4A_5A_6$,如图 1-8,且不妨设延长 A_7A_8 与 A_4A_5、A_4A_6 相交.

类似定义区域 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ(易知区域 Ⅰ、Ⅱ 有重叠). 和前面一样,知 A_1、A_2、A_3 在这三个区域中.

反设没有凸五边形,则由引理知,区域 Ⅲ 中无点,区域 Ⅰ 和 Ⅱ 中分别至多有一点,这与有三个点 A_1、A_2、A_3 矛盾,因此,必有凸五边形.

综上所述,$H(5)=9$.

我们自然会问: $H(6)$ 是多少?这却是一个世界难题,至今没有彻底解决,但人们已经知道: $H(6)\geqslant 17$.

由于上面讨论所用的方法不具一般性,从而无法推广. 正因为 $H(k)$ 的精确值难于求出,人们便转向寻求 $H(k)$ 的范围估计.

1935 年,厄尔多斯和泽克勒斯利用图论中的拉姆赛(F. P. Ramsey) 理论,给出了 $H(k)$ 的第一个估计: $H(k)\leqslant R(k,5;4)$.

这里 $R(k,5,4)$ 的意思是指满足下列条件的最小自然数 R(称为拉姆赛数): 对于有至少 R 个元素的集合,将它的所有 4 元子集分为两类,则存在 k 个元素,这 k 个元素构成的集合的所有 4 元子集都在第一个类内;或者存在 5 个元素,这 5 个元素构成的集合的所有 4 元子集都在第二个类内.

我们知道,拉姆赛数的确定是世界著名难题,因而上述估计只能说明 $H(k)$ 的存在性,别无其他意义. 1960 年,他们又给出了 $H(k)$ 的一个更好的估计: $2^{k-2}+1\leqslant H(k)\leqslant C_{2k-4}^{k-2}$,并猜想: $H(k)=2^{k-2}+1$,若此猜想成立,则 $H(6)=17$,人们希望看到关于 $H(6)=17$ 的严格证明.

上述一些结果引起了组合数学界的广泛注意,著名数学家洛他(Rota) 推崇它是本世纪组合数学的经典性结论,并收入其主编的名著[3] 中.

1.3 凸 n 点组

下面我们研究 Klein 问题的一种变异,为此,我们先给出如下的定义:

定义 1-5 如果平面上的 n 个点都在其凸包的边界上，则称它是一个凸 n 点组. 特别地，平面上无 3 点共线的凸 n 点组是一个凸 n 边形的顶点.

前述 Klein 问题讨论的是平面上存在凸 k 点组的点集(其中无 3 点共线)的最小容量(点的个数)，如果我们将这一问题的题设与题断逆转过来，即先给定平面上点集的容量(假定为 n 个点)，反过来讨论其中至少有多少个凸 k 点组，则得到 Klein 问题的一种变异：

问题 1-2 给定自然数 $n,k\geqslant 4$，对平面上的任意 n 个点，其中任何 3 点不共线，求其中的凸 k 点组的个数的最小值 $f(n,k)$.

这一问题可以看作是 Klein 问题的推广，实际上，解不等式 $f(n,k)\geqslant 1$，即可得到存在凸 k 点组的 n 的最小值，因此它是一个容量和难度都比 Klein 问题更大的问题，下面介绍这一问题在 $k=4$ 时的一些初步结果(参见文献[4]).

为叙述问题方便，我们将 $f(n,4)$ 简记为 $f(n)$.

首先，由图 1-1 可知，$f(4)=0$，其次，我们有下面的

定理 1-3 $f(5)=1$.

证明 由 $H(4)=5$，有 $f(5)\geqslant 1$.

又如图 1-9，令 $P=\{A,B,C\}$，$Q=\{D,E\}$，则四边形必含有 Q 中的两个点，否则，四点组必是三角形及其内部一个点，不构成凸 4 点组. 另外，D、E 只能与 B，C 构成凸 4 点组，实际上，E 在三角形 ADC 内，D 在三角形 ABE 内，所以图中恰有一个凸四边形，故 $f(5)=1$.

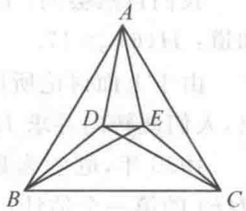

图 1-9

定理 1-4 $f(6)=3$.

为了证明这一结论，我们需要下面的

引理 1-2 当 $n\geqslant 5$ 时，$f(n)\geqslant \dfrac{C_n^5}{n-4}\overset{\triangle}{=}t(n)$.

证明 当 $n=5$ 时，由 $H(4)=5$，知结论成立.

当 $n>5$ 时，每 5 个点都有一个凸 4 点组，共得到 C_n^5 个凸 4 点组，但其中有重复计数：每个凸 4 点组对应 $n-4$ 个不同的 5 点组，被计数 $n-4$ 次，这样，凸 4 点组的个数：$f(n)\geqslant t(n)$.

综上所述，引理 2 获证.

下面证明定理 1-4，首先，由引理 2，$f(6)\geqslant t(6)=\dfrac{6}{2}=3$；

其次，如图 1-10，令 $P=\{A,B,C\}$，$Q=\{D,E,F\}$，则凸 4 点组必恰含有 Q 中的两个点.

实际上，当恰含有 Q 中一个点时，此点在三角形 ABC 内，不与 A、B、C 构成凸 4 点组；

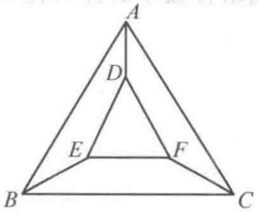

图 1-10

当含有 Q 中三个点时，则只能含有 P 中的一个点，设为 A，但 D 在三角形 AEF 内，不构成凸 4 点组；

另外，若凸 4 点组含有 Q 中的两个点 D、E，则它们只与 A、B 构成凸 4 点组；若凸 4 点组含有 Q 中的两个点 E、F，则它们只与 B、C 构成凸 4 点组；若凸 4 点组含有 Q 中的两个点 F、D，则它们只与 C、A 构成凸 4 点组.

故 $f(6)=3$.

下面讨论 $f(7)$，作为练习，读者可尝试证明：$f(7)\geqslant 7$.

先由 $f(5)\geqslant 1$，可知，每 5 个点就有一个凸 4 点组，那对于 n 个点的情形，是不是有 C_n^5 个凸 4 点组呢?—— 不然，因为有重复计数.

怎样计数才不会出现重复?先弄清重复的原因：当 5 点组不同时，对应的 4 点组可能相同，因为没有确定 4 个点来源于何处. 想象我们将给定的点集划分为两个子集 P、Q，规定在 P 中取 p 个点，在 Q 中取 q 个点，其中 $p+q=5$，则这样的 5 点中必定有 4 个点构成凸 4 点组，如果这样的凸 4 点组必定含有 P 中的 p 个点(或必定含有 Q 中的 q 个点)，则 P 中每取一个 p 点组就得到一个凸 4 点组，且这样得到的凸 4 点组是互不相同的. 比如，取 $p=4$，$q=1$，则可将给定的点集划分为这样两个子集 P、Q，其中 P 是由 4 个不构成凸 4 点组的 4 个点的集合，而 Q 是剩下 $n-4$ 个点的集合，则 Q 中每一个点都与 P 中 3 个点构成一个凸 4 点组，这样得到的凸 4 点组是互不相同的.

若取 $p=3$，$q=2$，则得到一个关于 $f(n)$ 的递归不等式，即下面的

引理 1-3 对 $n\geqslant 5$，记平面上无三点共线的 n 个点中凸四点组的个数为 $f(n)$，那么，$f(n)\geqslant C_{n-3}^2+f(n-2)$.

证明 当 $n=5$ 时，由前面的证明，有 $f(5)\geqslant 1=C_{5-3}^2+f(5-2)$，结论成立.

当 $n>5$ 时，考察 n 个点的凸包，设它的连续 3 个顶点为 A、B、C，令 $P=\{A,B,C\}$，其余 $n-3$ 个点的集合记作 Q(图 1-11)，对任何 2 个点 X、$Y\in Q$，作直线 XY，则 A、B、C 三点中至少有 2 点位于直线 XY 的同侧，它们必与 X、Y 构成一个凸四点组.

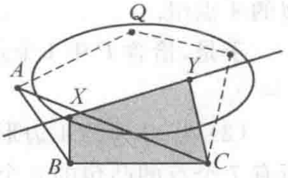

图 1-11

由此可见，Q 中每两个点都与 P 中的两点构成一个凸四点组，因为 $|Q|=n-3$，于是，恰含 P 中两个点的凸四点组至少有 C_{n-3}^2 个.

再考察 $\{A\}\cup Q$ 中的 $n-2$ 个点，至少有 $f(n-2)$ 个凸 4 点组，这样的凸 4 点组最多含有 P 中一个点(因不含 B、C)，从而与前述的凸 4 点组不相同，于是，$f(n)\geqslant C_{n-3}^2+f(n-2)$.

令 $n=7$，得 $f(7)\geqslant C_{7-3}^2+f(7-2)=C_4^2+f(5)=6+1=7$，定理获证.

利用更精细的估计，可得到如下的

定理 1-5 $f(7)=9$.

证明 考察7点的凸包，设其连续3个顶点为A_1、A_2、A_3（作用：以此为基础找凸四点组：角形域$\angle A_1A_2A_3$内且在$\triangle A_1A_2A_3$外的点X与A_1、A_2、A_3构成凸四点组；角形域$\angle A_1A_2A_3$内的两点X、Y与A_1、A_2、A_3中两点构成凸四点组），令$P=\{A_1,A_2,A_3\}$，其余4个点的集合记作Q，则Q中的点都在角形域$\angle A_1A_2A_3$内.

我们先证明：恰含有P中两个点的凸4点组至少有$C_4^2=6$个.

实际上，在Q中任取两个点A、B，作直线AB，则点A_1、A_2、A_3中必有两个点，设为X、Y，在直线AB的同一侧（图1-12）.

因为直线AB与点集的凸包围成一个凸多边形，而A、B与X、Y都在此凸多边形的边界上，所以它们构成凸4点组，由此得到$C_4^2=6$个互异的凸四点组.

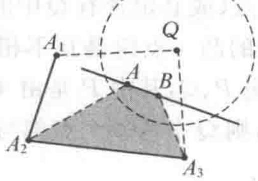

图 1-12

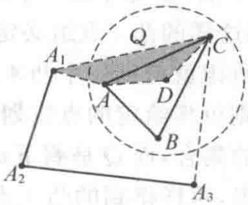

图 1-13

再考察Q的凸包Ω，此时P中的点都在凸包Ω外.

(1) 若Ω为三角形，此时$\{A_1\}\cup Q$中至少有$f(5)=1$个凸4点组，因为Q不是凸4点组，所以此4点组必含点A_1（图1-13）. 同样考虑$\{A_2\}\cup Q$，$\{A_3\}\cup Q$，又可得到2个类似的4点组.

于是，恰含P中1个点的凸4点组有3个，所以$f(7)\geqslant 6+3=9$.

(2) 若Ω为凸4边形，设为$B_1B_2B_3B_4$. 因为A_1、A_2、A_3是所有7个点的凸包的3个连续顶点，所以A_1、A_2、A_3都在四边形$B_1B_2B_3B_4$外，设$\triangle A_1A_2A_3$内含有Q中的k个点.

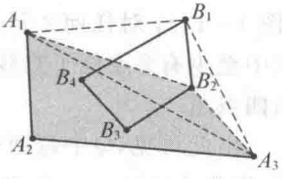

图 1-14

(ⅰ) 若$k\leqslant 2$，则$\triangle A_1A_2A_3$外至少有Q中2个点，设为B_1、B_2（图1-14），那么B_1、B_2都在角形域$\angle A_1A_2A_3$内且在$\triangle A_1A_2A_3$外，它们分别与A_1、A_2、A_3构成凸4点组，得到2个恰含P中3个点的凸4点组，所以$f(7)\geqslant 6+1+2=9$.

(ⅱ) 若$k\geqslant 3$，考察四边形$B_1B_2B_3B_4$的形状.

如果四边形$B_1B_2B_3B_4$是平行四边形，则4个角形域：$\angle B_iB_{i+1}B_{i+2}(i=1,2,3,4)$覆