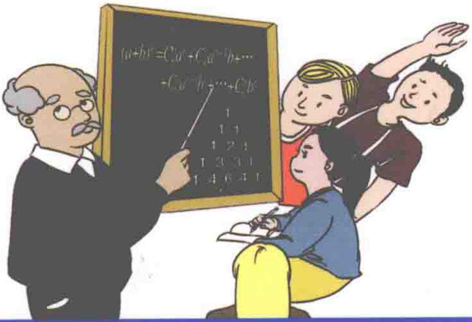


数林外传系列

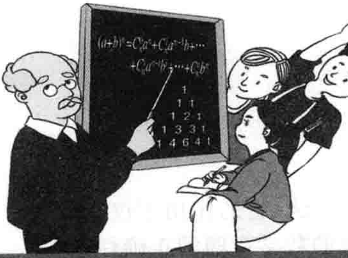
跟大学名师学中学数学

漫话数学归纳法

第4版

◎苏　淳　编著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

漫话数学归纳法

第4版

◎苏 淳 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

数学归纳法是一种重要的数学思想方法，它的作用不仅在于可用其来证明一系列与正整数 n 有关的数学命题的正确性，更重要的是，它可以帮助我们发现和认识数学规律，教会人们从纷繁复杂的外表现象中找出内在的规律性，并找到证明这种规律的正确性的路径. 本书从一系列有趣生动的例题出发，多视野多角度地介绍了这一重要的数学思想方法. 本书作为高中学生的课外辅助读物，将给他们带来意想不到的收获和乐趣，也可供中学数学教师和广大数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

漫话数学归纳法/苏淳编著. —4 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2014. 9.
(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)
ISBN 978-7-312-03563-0

Ⅰ. 漫…　Ⅱ. 苏…　Ⅲ. 数学归纳法—图集　Ⅳ. O141 - 64

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 179824 号

中国科学技术大学出版社出版发行
地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
网址：http://press. ustc. edu. cn
安徽江淮印务有限责任公司
全国新华书店经销
*
开本：880×1230/32　印张：6. 25　字数：125 千
1989 年 7 月第 1 版　2014 年 9 月第 4 版
2014 年 9 月第 7 次印刷
定价：15. 00 元

第4版前言

五十多年前，我还在上高中的时候，也和许多人一样，经历过一个不喜欢数学归纳法的过程.感觉它老套刻板，没什么趣味；甚至觉得它简单浮浅，无讲究.直到我读到华罗庚教授写的一本关于数学归纳法的小册子之后，这才恍然大悟，逐步明白了它的精髓，感觉到它的魅力，感叹原来数学归纳法如此神奇，内涵如此深刻.在后来的岁月里，更是逐渐体会到它绝不仅仅是一个普通的技术性方法，而是一种认识数学世界的重要思想性方法.

五十多年了，世事沧桑，科学在发展，教育在变化.课本换了一茬又一茬，不变的宗旨是培养学生的素质.而学习和培养正确的思想方法正是科学素质教育的核心，体现在数学教育上，那就是不仅仅要学习数学知识，还要学习正确的思维方法.数学归纳法就是一种教会我们如何思考问题，如何解答问题的思想方法.

华罗庚教授在他的关于数学归纳法的小册子中说过一句语惊四座的话："学好数学的诀窍就是一个字：退.大胆地退，足够地退，一直退到最简单而又不失去重要性的地步."华教授的这句话给了我们巨大的启发，更使我在五十多年间受益匪浅.

数学归纳法是最能体现“退下来看问题”这一思想方法的. 我们在本书中写到的“学会从头看起”,“在起点上下功夫”都是说的“从最简单而又不失去重要性的地步看起”的思想的. 但是,仅仅把最简单的情况看清楚还是不够的,这只能算是起步. 我们还需往前跨步,以便看清楚整个情况. 归纳法的好处是逐渐跨步,在通常的情况下,往往“只往前跨一步”. 但是“这一步如何跨”却是很有讲究的,不同的问题有不同的跨法. 而解决“如何跨”的问题,通常可通过观察最初的两三步之间的联系来寻得启发.

本书正是围绕着“如何起步”“如何跨步”这两大问题展开,通过一系列有趣的数学问题,介绍数学归纳法的用法,展现数学归纳法的威力. 对于数学归纳法来说,起步和跨步是两大必要步骤,缺一不可. 但是在使用和处理它们的方法上,却有着极大的灵活性. 书中给出的许多例题提供了学习这些方法的实例,会让你感到既生动又有趣. 它们使你在不知不觉中增长了知识,增强了本领,使你有一种成就感.

在本书纳入《数林外传系列:跟大学名师学中学数学》丛书重新再版之际,写上如上的一些话,以作纪念.

苏　淳

2014 年 3 月 18 日

目　次

1　数学归纳法与直接证法

大家知道,数学上的许多命题都与正整数 n 有关.这里所说的 n,往往是指任意的一个正整数.因此,这样的一个命题实际上也就是一整列命题.

要证明这样一整列命题成立,当然可以有多种不同的方法.其中常用的一种方法是置 n 的任何具体值而不顾,仅仅把它看成是一个任意的正整数,也就是说,假定它只具备任何正整数都具备的共同性质,并且在这样的基础上去进行推导、运算.如果我们在推导运算中没有遇到什么难以克服的困难,那么我们就有可能用这种方法来完成命题的证明了.这种方法就是习惯上所说的直接证法.下面来看两个简单的例子.

【例 1】　证明,对任何正整数 n,如下的等式都能成立:

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

证明　我们有

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\left(\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x\right.$$

$$+\cdots+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\Big),$$

利用积化和差公式

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$

即知

$$\begin{aligned}&\sin\frac{1}{2}x+2\cos x\sin\frac{1}{2}x+2\cos 2x\sin\frac{1}{2}x+\cdots\\&\quad+2\cos nx\sin\frac{1}{2}x\\&=\sin\frac{1}{2}x+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{1}{2}x\right)+\left(\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x\right)\\&\quad+\cdots+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]\\&=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x,\end{aligned}$$

综合上述等式即得所证.可见,不论 n 为任何正整数,所证的恒等式都能成立.

在刚才所作的推导中由于借助了积化和差公式,所以证明得很顺利.我们甚至连 n 是奇数还是偶数都用不着考虑就完成了证明.这样的证明当然是对任何的正整数 n 都能够成立的,这就是我们所说的"将 n 置于**任意**的境地"的含意.下面再看一个例子.

【例 2】 证明,对任何正整数 n,数

$$A_n=5^n+2\cdot 3^{n-1}+1$$

都能被 8 整除.

证明 按照 n 的奇偶性,我们分别将 A_n 表示成两种不同的形式.当 n 为奇数时,有

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1), \tag{1}$$

当 n 为偶数时,将 A_n 表示为

$$A_n=5(5^{n-1}+3^{n-1})-(3^n-1). \tag{2}$$

于是在上述两式中,第一个括号内的指数都是奇数,第二个括号内的指数都是偶数.我们知道,如果 k 为奇数,则有

$$a^k+b^k=(a+b)(a^{k-1}-a^{k-2}b+\cdots+b^{k-1}),$$

如果 k 为偶数,则 c^2-1 可整除 c^k-1.于是只要分别视 $a=5$,$b=3$ 及 $c=3$,即可根据上述事实,知(1)、(2)两式中的前后两项都是 8 的倍数,从而完成了命题的证明.

在这个证明中,我们虽然分别对 n 为奇数和 n 为偶数做了不同的处理,但并未改变 n 是**任意**正整数这一根本的属性,因此所作的证明可对任何正整数 n 成立.这是直接证法的最主要的特点.

直接证法在许多场合下具有简洁的优点,因此应用得非常广泛.再看一个取自 1989 年全国高中数学联合竞赛试题的例子.

【例 3】 已知:$x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2)$,满足:$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=1$,$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$.证明

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}.$$

证明 由条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$ 知 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零;由条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ 知这 n 个实数中既有正数也有负数.记

$$A_1=\{i:x_i\geqslant 0\},\quad A_2=\{i:x_i<0\},$$

则 A_1 和 A_2 都不是空集,它们互不相交,且 $A_1\cup A_2=\{1,$

$2,\cdots,n\}$.若再记 $S_1=\sum_{i\in A_1}x_i$,$S_2=\sum_{i\in A_2}x_i$,就有

$$S_1+S_2=0,\quad S_1-S_2=1.$$

因此,知 $S_1=-S_2=\frac{1}{2}$.采用所引入的符号,就有

$$\left|x_1+\frac{x_2}{2}+\cdots+\frac{x_n}{n}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|.$$

由 A_1 和 A_2 的定义和性质知 $\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}$ 是若干个非负数之和,$\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}$ 是若干个负数之和,因此就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\left|\sum_{i\in A_1}\frac{x_i}{i}+\sum_{i\in A_2}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\left|\sum_{i\in A_1}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i\in A_2}x_i\right|$$

$$=\left|S_1+\frac{S_2}{n}\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right|=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n},$$

可见命题的结论是成立的.

在这里,我们采用了许多符号,是为了书写简便.有志于学好数学的读者们,应当努力使自己习惯于这些符号,并逐步学会使用各种符号.

在这个证明中,我们同样没有想过"n 究竟是几"的问题,只是把精力花费在对命题条件的推敲和剖析上.我们应当养成这种细致分析题目条件的习惯.解题的思路往往就来自于这种分析之中.

以上所说的都是一些直接证法.如果我们能用这种证法把推理进行下去,那么就应当力争把它进行到底.但有时,我们也会碰到一些与 n 有关的命题,对于它们很难从**任意**的 n

入手,那么我们就只好另辟蹊径了.先看一个例子.

【例 4】 证明,对于每个不小于 3 的正整数 n,都可以找到一个正整数 a_n,使它可以表示为自身的 n 个互不相同的正约数之和.

分析 显然,我们很难对**任意**一个不小于 3 的正整数 n,直接去找出相应的 a_n 来.面对这样的情形,较为稳妥的做法只能是先从 $a_3, a_4, \cdots$ 找起.

证明 经过不多的几步探索,就可以发现,有

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

而且 1,2,3 恰好是 6 的 3 个互不相同的正约数,因此可将 a_3 取作 6.在此基础上,又可发现有

$$12 = 1 + 2 + 3 + 6,$$

而且 1,2,3,6 恰好又是 12 的 4 个互不相同的正约数,因此又可取 $a_4 = 12$.循此下去,便知可依次取 $a_5 = 24, a_6 = 48, \cdots$.这也就告诉了我们:如果我们取定了 a_k,那么接下去就只要再取 $a_{k+1} = 2a_k$ 就行了.事实上,如果 a_k 可以表示成自身的 k 个互不相同的正约数 $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ 之和,即

$$a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k,$$

那么就有

$$2a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k + a_k.$$

如果记 $b_{k+1} = a_k$.则显然有 $b_1 < b_2 < \cdots < b_k < b_{k+1}$,表明它们互不相同;而且显然它们都是 $2a_k$ 的正约数.可见确实可以将 a_{k+1} 取为 $2a_k$.由于此处 k 具有**任意**性,所以我们确实已对一切不小于 3 的正整数 n 都证得了所需证明的断言.

我们在这里所采用的证法,就是所谓“数学归纳法”,有时也简称为归纳法.它在解决诸如此类的与正整数 n 有关的问题时,往往是行之有效的,因此被广泛地应用在数学之中.

刚才我们在证明中,实际上是遵循着如下思路行事的,即为了证明某个与正整数 n 有关的命题 $P(n)$ 成立,我们首先对最小的 n_0,验证 $P(n_0)$ 成立;然后再假定对 $n=k$,有 $P(k)$ 成立,并在此基础上,推出 $P(k+1)$ 也成立.于是我们便**相信**了,对一切正整数 $n \geqslant n_0$,命题 $P(n)$ 都能成立.

当然,大家都会问:“这种**相信**是不是确有其道理呢?”

我们可以告诉大家,这种**相信**是可靠的,是有其充分的数学依据的.我们将在本书的第14节介绍并证明该理论依据,即**数学归纳法原理**.有了这个原理,我们就可以放心大胆地使用数学归纳法了.

利用数学归纳法不仅可以处理像例4那样不宜采用直接证法的问题,而且也可以处理一些可以通过直接证法来解决的问题,例如前面提到过的例1和例2,它们的证明过程如下:

例1又证 当 $n=1$ 时,我们有

$$左式 = \frac{1}{2} + \cos x,$$

$$右式 = \frac{\sin \frac{3}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x} = \frac{3\sin \frac{1}{2}x - 4\sin^3 \frac{1}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{3}{2} - 2\sin^2 \frac{1}{2}x = \frac{3}{2} - (1 - \cos x)$$

$$= \frac{1}{2} + \cos x,$$

所以对于 $n = 1$,等式是成立的.

假设对于 $n = k$,等式成立,即有

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos kx = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

要来证明对于 $n = k + 1$,等式也成立.我们有

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cdots + \cos kx + \cos(k + 1)x$$

$$= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} + \cos(k + 1)x$$

$$= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x + 2\cos(k + 1)x\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x + \left[\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)x - \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{\sin\left(k + \frac{3}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{\sin\left[(k + 1) + \frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

所以对于 $n = k + 1$,等式也成立.从而对一切正整数 n,等式都成立.

例 2 又证 因 $A_1 = 5 + 2 + 1 = 8$,知其为 8 的倍数,所

以当 $n = 1$ 时命题成立.

假设 A_k 可被 8 整除,要证 A_{k+1} 也可被 8 整除. 我们有

$$A_k = 5^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 1,$$

$$A_{k+1} = 5^{k+1} + 2 \cdot 3^k + 1 = 5 \cdot 5^k + 6 \cdot 3^{k-1} + 1,$$

所以就有

$$A_{k+1} - A_k = 4(5^k + 3^{k-1}).$$

由于对任何正整数 k,数 5^k 和 3^{k-1} 都是奇数,所以其和 $5^k + 3^{k-1}$ 恒为偶数,从而 $4(5^k + 3^{k-1})$ 一定是 8 的倍数. 这也就表明 $A_{k+1} = A_k + 4(5^k + 3^{k-1})$ 可被 8 整除. 因此,对任何正整数 n,数 A_n 都可被 8 整除.

在以上的证明过程中,我们都严格地遵守了数学归纳法所要求的两个步骤:(1) 验证 $P(n_0)$ 成立;(2) 假设 $P(k)$ 成立,推出 $P(k+1)$ 也成立. 正如中学数学课本中所指出的,这两个步骤对于保证命题 $P(n)$ 对一切 $n \geqslant n_0$ 都能成立是必不可少的,因此必须严格遵守. 关于其原因,我们将在第 14 节中介绍.

后面我们将要读到数学归纳法的各种技巧,它们虽然显得灵活多变,但都是在严守上述两个步骤的前提下所设施的各种变通,绝对没有取消这两个步骤中的任何一个. 为了同后面将要介绍的各种变通形式相区别,我们将本节所采用的归纳法形式叫做数学归纳法的基本形式,也有人称之为**第一归纳法**.

同其他任何一种数学方法一样,数学归纳法也不是万能的,例如,前面的例 3 就不宜采用数学归纳法来证明,读者不

难自行理解其中的道理. 由于后面还要进一步谈到这个问题,这里不再赘述.

在前面所讲到的数学归纳法的两个步骤中,我们通常将"验证 $P(n_0)$ 成立"称作**起步**;将"假设 $P(k)$ 成立"称作**归纳假设**;而将由"假设 $P(k)$ 成立"推出"$P(k+1)$ 也成立"的过程叫作**归纳过渡**,有时也叫作**向前跨步**. 起步的过程一般较容易,而归纳过渡有时却很需要认真动一番脑筋,有时甚至需要运用各种技巧和多种不同的数学工具. 归纳过渡通常是全题论证的关键,在此非认真下功夫不可,而其中最最重要的,则是设法利用归纳假设.

2 认真用好归纳假设

如果说在用数学归纳法证题时，归纳过渡是证题的关键，那么归纳假设就是过渡的基础.数学归纳法之所以显得有生命力，就是因为它避开了直接接触 n 的任意性，而把证明过程变成为一个“连环套”，使得人们在验证了 $P(n_0)$ 成立之后，只要再在“$P(k)$ 已成立”的假设基础上证出“命题 $P(k+1)$ 也成立”就行了.这就意味只需要再往前迈出一步就够了，因此大大减少了论证中的不确定性.既然如此，运用好归纳假设当然就极为重要.我们甚至可以说，“如何千方百计地创造条件以利用归纳假设”的问题，正是论证者们在此所应考虑的最中心的问题.

在许多场合下，如何利用归纳假设的问题并不显得很困难.我们来看两个简单的例子.

【例 1】 某次象棋比赛共有 n 人参加($n \geqslant 2$)，每两个都应对弈，且一定决出胜负.证明，比赛结束后，可将这 n 个人列为一队，使队列中的每一个人都曾战胜过紧跟在他后面的那个人.

证明 如果 $n = 2$，结论显然成立.

假设当 $n = k$ 时结论成立，我们来证明当 $n = k + 1$ 时结论也成立.这时，我们先从中任意叫出 k 个人来.由于这 k