初中数学

竞赛

同步辅导

主　编　刘汉文
副主编　王连笑
　　　　张承宇

（第六版）九年级

密竞赛大纲新变化
潜心研究　突出不同教材新理念
精心设计　展现思维体操新境界
匠心独运　引领竞赛教育新航程

华中师范大学出版社

初中数学竞赛同步辅导

（第六版）九年级

主　编　刘汉文
副主编　王连笑
张承宇

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学竞赛同步辅导（九年级）/刘汉文主编. —6 版.
—武汉：华中师范大学出版社，2010.6
ISBN 978-7-5622-4148-5
Ⅰ. ①初… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学—初中—教学参考资料
Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 032312 号

初中数学竞赛同步辅导（九年级）

主编：刘汉文
责任编辑：涂 庆　　责任校对：张晶晶　　封面设计：罗明波
选题设计：第一编辑室（027—67867361）
出版发行：华中师范大学出版社 ©
社址：武汉市洪山区珞喻路 152 号
销售电话：027—67867076　027—67867371　027—67861549　027—67863040
传真：027—67863291　　邮购电话：027—67861321
网址：http://www.ccnupress.com　　电子信箱：hscbs@public.wh.hb.cn
印刷：湖北省鄂南新华印务有限公司　　督印：章光琼
字数：391 千字
开本：889mm×1194mm 1/16　　印张：15.5
版次：2010 年 6 月第 6 版　　印次：2010 年 6 月第 1 次印刷
定价：28.00 元

欢迎上网查询、购书

从“新”开始，追求卓越

（第六版前言）

在数学竞赛研究和培训上，我不是一个容易满足的人 。这套《初中数学竞赛同步辅导》诞生于1992年冬，弹指之间，已过了十七个寒暑。这套书一面世就受到广大中学生读者的欢迎，几经修订，到目前为止已累计销售了50余万套，每册都重印了20多次，这在较为萧条的竞赛图书市场是十分罕见的。许多中学生，也包括我的学生就是读着这套书走上国际数学奥林匹克竞赛领奖台的，而今他们都已长大成人，成为国家各行各业的领军人物。随着新课程改革的不断深入，我仍在考虑不能停留在过去，而应为国家培养和发现更多、更好的苗子，为那些有着巨大潜力的中学生创造更好的成长平台，因此，决心从“新”开始，继续打造该套书，使其质量更为“卓越”，更符合当今中学数学竞赛的实际。

随着课程改革的逐步深入，新课程理念打破了我们已往固有的观念与传统，教学方法和评价指标的更新也推动着数学竞赛教育朝着更加注重能力和思维品质培养的方向发展。当学生在这两方面获得充分发展后，便会形成数学学科特有的“数学素质”，这种素质不仅会在数学学习中起到作用，而且对他们社会、人文、艺术等的培养也很有作用，这就是为什么历史上诸多数学家同时也是哲学家、艺术家（如牛顿、莱布尼兹、达·芬奇等）的原因。随着《义务教育国家课程标准》的颁布和义务教育课程标准实验教科书日益广泛的使用，数学竞赛的内容和题型也随之变化。为了适应这种变化，我们在反复调查研究的基础上，特对此套书作了修订，并使之具有以下三个方面的特色。

一、调整内容，与新课程教材大体同步——好在同步。

实践告诉我们，数学竞赛教育决不能完全脱离日常教学。我们在认真分析三种版本（人民教育版、北师大版、华东师大版）的初中数学新教材的基础上，确定选编内容顺序的原则是：注意知识结构体系合理性的同时，以与人教版新教材内容同步为主，尽可能兼顾与其他版本新教材同步。为了更好地贴近实际学习需要，我们针对新教材和最新课程标准，对此套书的内容作了系统梳理和优化，具体如下：

（一）对讲（章）的顺序仔细斟酌调整，体现了新的能力要求

《七年级》调整了“整数的基本知识”一讲的位置；《八年级》将“整式乘除与因式分解”移至“实数与非负数”一讲之后。另外，将《七年级》中“众数、中位数、平均数”内容放到《八年级》中。

（二）对重点内容详讲、细分，新的变化在节的微调中得到呈现

《七年级》“数据的收集与整理”一讲细分为“统计调查”与“直方图的应用”两节，突出同步，更加实用。

《八年级》增加了“角平分线”“等边三角形”“矩形、菱形”三节，便于学生更好地掌握“三角形”“四边形”的知识。

《九年级》增加了“圆中有关计算”“概率的综合应用”两节，更有利于学生综合能力的培养。

（三）对弱化的竞赛知识点淡化、删减，以便学生有的放矢

调整了“含绝对值符号的一元一次方程”“含绝对值符号的方程组”和“含有绝对值的函数”等内容；“整数的指数幂”“四点共圆”“含参数的二次函数的条件最值问题”“三角法解几何题”等进行弱化处理。

（四）根据各学段特点，阐述重要的数学思想方法

如《七年级》对“一元一次方程”与“一元一次方程组”从直接、间接、辅助设元法进行凝聚与剖析，并将原有“情景应用题的解法”与前述内容融会贯通；“应用题的解法”一讲中加入了“推理分析法”。

《八年级》、《九年级》中新增“函数思想”、“方程思想”、“转化思想”等。

二、题目新颖，体例十分适合连堂讲授和训练——贵在实用。

在新课程理念的指导和近年来初中数学竞赛的日益发展下，我们与时俱进，总结黄冈市多所中学二十多年来竞赛培训的经验，对该套书做了以下修改：

一是在编排上，设置了科学的学习—探究—总结的脉络：巩固赛点—掌握题型—思路探究—思维误区—拓展变式—方法小结，同时提供“指点迷津”；二是进一步完善了“赛点归纳”栏目的知识点；三是在保留上一版经典题目的同时，重新挑选了例题、拓展题和训练题，此版书中题目以近两年国内外各种竞赛真题和优秀中考题为主，另外还精选了一部分作者自编的创新题。

仔细品味，你会发现本书精选的题目所蕴涵的问题从结构到解法都具有艺术的魅力，它诱导学生开动脑筋去亲身体验数学思想的智慧光辉，从而乐此不疲，兴趣盎然。同时，学生的思维能力也在不断地训练中得到提高，对数学美感的感受也会越来越深刻。

三、解法优美，开创动态思维培养新模式——优在创新。

特别值得一提的是，每节的“题型范例”紧跟“赛点归纳”之后，精选的例题经典、新颖、有很强的代表性；按题型划分，对常见考点、重要知识点各个击破，能帮助学生深入理解某一类问题从而解决问题。对例题的讲解着重引导探究解题思路，并为之选配几个连锁拓展题，启发学生的动态思维。“思路探究”“思维误区”等栏目，力求引导学生去探索和发现数学问题中的奥秘，拓展思维空间。同时，还以“指点迷津”和“矩形图”的形式指出数学问题中的五点（知识形成过程中的“关键点”、运用数学思想方法产生解决数学问题策略的“关节点”、数学知识之间的“联结点”、数学问题变式的“发散点”、解题过程中易错漏的“盲点”），用简洁的语言启发和点拨学生，使他们的思维能力得到提高。

另在每节末新增“方法小结”栏目，帮助学生总结巩固已学方法、提炼规律、举一反三，从而马到功成。

总览全书，无不充满着出神入化的技巧和简洁优美的解法，这实际上也是一种高层次思维的培养和高智力开发的具体体现。经过如此精心的修改，本套书的特色已十分鲜明。相信在课程改革的新形势下，它一定能再次成为教辅市场上响当当的竞赛图书品牌。

参加本套书编写的既有国家奥林匹克集训队的专家，又有中学第一线的优秀教练员和辅导老师。他们有的来自教育极为发达的北京、天津，有的来自人杰地灵的广州，更多的来自数学竞赛教育非常成功的黄冈地区。我担任此套书的主编，副主编为王连笑、张承宇。本册书的作者名单为：刘汉文、王连笑、张承宇、周春荔、吴伟朝、王定成、朱尚安、王能生、刘辉、汤长安、甘超一、陈容富、石俊勇、王愿生、朱保全、封跃生、刘胜、李先兵、黎建东、丁盛、章继勇、秦松林、周良进、吴林章、杨晨光、胡萍。

此外，为对读者负责，保证本套书的质量，华中师范大学数学与统计学学院的一些研究生如何金红、胡小雪、朱欢、胡泽良、赵换等，为本套书的内容核对做了大量艰苦而又繁重的工作，在此也要对他们表示衷心的感谢。

读者的支持，就是我们最大的动力。最后，再次向广大读者表示感谢！

刘汉文

目　录

第一讲　二次根式

二次根式是初中数学竞赛必考内容，也是初中数学的难点.解决根式问题的基本思想是将根式有理化.竞赛中往往涉及三个方面的内容：

1. 二次根式的性质；　2. 二次根式的运算；　3. 二次根式的化简求值.

1.1　二次根式的性质与运算

赛点归纳

1. 二次根式、最简二次根式和同类二次根式的概念.

2. 二次根式的性质：

(1) $(\sqrt{a})^2=a\ (a\geqslant0)$.

(2) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a\ (a<0).\end{cases}$

3. 二次根式的乘法：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\ (a\geqslant0,\ b\geqslant0).$$

4. 二次根式的除法：

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (a\geqslant0,b>0).$$

5. 积的算术平方根的性质：

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant0,b\geqslant0).$$

6. 商的算术平方根的性质：

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ (a\geqslant0,b>0).$$

7. 二次根式的加减、乘除运算及分母有理化.

题型范例

题型一　二次根式性质的运用

例 1　(2008，广东竞赛) 若 $a\leqslant1$，则 $\sqrt{(1-a)^3}$ 化简后为(B).

A. $(a-1)\sqrt{a-1}$　　　B. $(1-a)\sqrt{1-a}$

C. $(a-1)\sqrt{1-a}$　　　D. $(1-a)\sqrt{a-1}$

【思路探究】 由 $a\leqslant1$，可知 $1-a\geqslant0$，即 $1-a$ 是一个非负数，根据二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0),\\-a(a<0),\end{cases}$ 可知 $\sqrt{(1-a)^3}$ 的结果.

指点迷津

二次根式的性质是化根式为有理式的重要依据.

在运算中，要善于化简二次根式，要活用二次根式的性质，乘除运算要活用其性质与乘、除法公式.

在运用二次根式的性质时，先看二次根式是否是最简二次根式，如果被开方数的指数大于根指数，需将平方数移到根号外面，在移动根号内的平方数时，要注意被开方数的底数的正负情况.

题型二　同类根式的相关计算

例2　在$\sqrt{1008}$，$\sqrt{1009}$，…，$\sqrt{2008}$这1001个根式中，与二次根式$\sqrt{2016}$是同类根式的共有（　　）个.

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 5　　　　D. 6

【思路探究】　这一组二次根式的被开方数都比较大，要直接判断其中有多少个化简后被开方数相同确有困难，由于$\sqrt{2016}=12\sqrt{14}$，所以关键是看这一组二次根式中化简后，被开方数为14的有多少个.

$\sqrt{1008}=?\sqrt{14}$，$\sqrt{2008}=?\sqrt{14}$

判断若干个被开方数是否为同类二次根式，关键看化简后的二次根式的被开方数是否相同.

题型三　二次根式的估算与比较大小

例3　（2008，芜湖中考）估算$\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{20}$的运算结果应在（ C ）.

A. 6到7之间　　B. 7到8之间　　C. 8到9之间　　D. 9到10之间

【思路探究】　本题直接估算确有困难，先将其化简，得$\sqrt{32}\times\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{20}=4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{20}=4+\sqrt{20}$. 所以只需估算$\sqrt{20}$，即可得出它的运算结果.

像这类确定多个二次根式的代数和的值的范围，一般方法是先尽可能地将其化为一个有理数与一个无理数的和的形式，再估算结果.

例4　x,y为实数，设$a=\frac{\sqrt{(-x)^2}}{|x|}$，$b=\frac{y}{(\sqrt{-y})^2}$，$c=\frac{3+\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{2}}$，则$a,b,c$的大小关系是（ C ）.

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $a=b>c$

【思路探究】　由题可知a,b,c都等于一个常数. 显然$c<1$，a是大于1，等于1，还是小于1？b呢？b是$+1$，还是-1？

例4采用的是"特殊值法"比较.

【思维误区】　有位同学这样解答例4，你认为对吗？

【解】　$\because a=\frac{\sqrt{(-x)^2}}{|x|}=\frac{|-x|}{|x|}=1$，　$b=\frac{y}{(\sqrt{-y})^2}=\frac{y}{y}=1$，$c=\frac{3+\frac{1}{4}}{4-\frac{1}{2}}=\frac{3\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}}=\frac{13}{14}$.

$\therefore a=b>c$.　故选D.

由$\sqrt{-y}$可知$y<0$. 应注意这个隐含条件.

题型四 运用二次根式的性质计算

例 5 （2009，《数学周报》杯全国竞赛）计算 $\sqrt[n]{\underbrace{99\cdots9}_{n个}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个}+\underbrace{199\cdots9}_{n个}}$（$n\geqslant2$ 的整数）的值为________.

【思路探究】 从被开方数看，两个加数一个是 n 个 9 组成的整数乘以 n 个 9 组成的整数，另一个是 1 与 n 个 9 组成的整数，将第二个加数分解为 $10^n+\underbrace{99\cdots9}_{n个}$的形式，再运用提取公因式法，不难发现，它是一个数的 n 次方.

被开方数是一个什么数的 n 次方？

求这类二次根式的值，一般是看被开方数能否化为某个数的完全平方数，或化为一个数与某个完全平方数的积的形式.

【拓展题】 观察下列各式：

$\sqrt{1+1\times2\times3\times4}=1^2+3\times1+1$,

$\sqrt{1+2\times3\times4\times5}=2^2+3\times2+1$,

$\sqrt{1+3\times4\times5\times6}=3^2+3\times3+1$,

猜想 $\sqrt{1+2005\times2006\times2007\times2008}=$ $2005^2+3\times2005+1$.

由前面三个二次根式中的被开方数是完全平方数，且每个被开方数中有四个连续自然数相乘，可发现其规律.

题型五 二次根式与数形结合

例 6 互不相等的三个正数 a,b,c 恰为一个三角形的三条边的边长，则以下列三数为长度的线段一定能作成三角形的是（　　）.

A. $\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$　　　　B. a^2,b^2,c^2

C. $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$　　　　D. $|a-b|,|b-c|,|c-a|$

【思路探究】 这是一个二次根式在三角形中的应用问题. 判断上述各选项中以三数为长度的线段能不能构成三角形，就看它们能不能满足三角形成立时三边的关系.

当正面解答困难时，如何改变策略？

“正难则反”，这是解数学竞赛题的一个重要策略.

不妨从正面去推导，然后比较看哪种方法简捷.

【拓展题】 如图 1-1-1，正方形 $ABCD$ 外有一点 P，P 在 BC 外侧，并夹在平行线 AB 与 CD 之间. 若 $PA=\sqrt{17}$，$PB=\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{5}$，则 PD 等于（ B ）.

A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{19}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{17}$

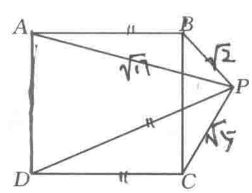


图 1-1-1

构造直角三角形，利用勾股定理求解.

方法小结

1. 比较无理数的大小，一般是先将它们化为同类最简二次根式. 但有时尽管它们都是同类最简二次根式，仍然难以比较大小. 像例 4 这样二次根式的大小如何比较？请结合例 4 去探求自己的发现.

2. 运用二次根式的性质计算较复杂的二次根式时，要注意二次根式的被开方数的结构特征，然后抓住它的结构特征，由特殊到一般探索其规律，从而类比出计算结果，请结合例 5 及其拓展题，去探究相关问题，发现其规律.

有时运用差值比较法，有时运用连续整数比较法；

要善于分析和发现被开方数的特征.

能力训练

1. (2008,海南竞赛)若 a 为实数,则化简 $\sqrt{a^2}$ 的结果是(　　).

A. $-a$　　B. a　　C. $\pm a$　　D. $|a|$

2. (2009,衡阳中考)下面计算正确的是(　　).

A. $3+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{27}\div\sqrt{3}=3$　　C. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{4}=\pm 2$

3. (2006,《希望杯》竞赛)下列四组根式中,是同类二次根式的一组是(　　).

A. $\sqrt{2.5}$ 和 $2\sqrt{0.5}$　　B. $3a\sqrt{a}$ 和 $3b\sqrt{b}$　　C. $\sqrt{a^2b}$ 和 $\sqrt{ab^2}$　　D. $\sqrt{ab^7c^3}$ 和 $\sqrt{\dfrac{c^3}{ab}}$

4. $2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ 等于(　　).

A. $5-4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}-1$　　C. 5　　D. 1

5. (2007,武汉 CASIO 杯竞赛)已知 $a=\sqrt{2006}-\sqrt{2005}$,$b=\sqrt{2007}-\sqrt{2006}$,$c=\sqrt{2008}-\sqrt{2007}$,则下列结论中正确的是(　　).

A. $a>b>c$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

6. (2009,泰安中考)化简 $3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$ 的结果为________.

7. (2009,嘉兴中考)当 $x=-2$ 时,代数式 $\sqrt{5x^2-3x-1}$ 的值是________.

8. (2009,河南中考)若实数 x,y 满足 $\sqrt{x-2}+(3-y)^2=0$,求代数式 $xy-x^2$ 的值为________.

9. 式子 $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$ 的值等于________.

10. 借助于计算器可以求得 $\sqrt{4^2+3^2}=5$,$\sqrt{44^2+33^2}=55$,$\sqrt{444^2+333^2}=555$,$\sqrt{4444^2+3333^2}=5555$,…,仔细观察上面几道题的计算结果,试猜想 $\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{2003个4}{}^2+\underbrace{33\cdots3}_{2003个3}{}^2}=$________.

11. 计算 $\sqrt{2003\times2004\times2005\times2006+1}-2004^2$.

12. (2008,扬州中考)课堂上,李老师出了这样一道题:

已知 $x=2008-5\sqrt{3}$,求代数式 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\div\left(1+\dfrac{x-3}{x+1}\right)$ 的值.小明觉得直接代入计算太繁了,请你来帮他解决,并写出具体过程.

13. 观察下列分母有理化的运算:

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2},\quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=-\sqrt{2}+\sqrt{3},\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}=-\sqrt{3}+\sqrt{4},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}=-\sqrt{2001}+\sqrt{2002},\quad \frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2003}}=-\sqrt{2002}+\sqrt{2003}.$$

利用上面的规律计算:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}}+\frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2003}}\right)\times(1+\sqrt{2003}).$$

1.2 二次根式的化简求值

赛点归纳

1. 灵活进行二次根式的分母有理化

分母有理化是二次根式化简的一种常用方法.所谓灵活运用,就是要具体问题具体分析,有时需要将分母乘以有理化因式,有时宜用“约分”的方法,有时兼而用之.

2. 灵活进行二次根式的化简求值

二次根式化简求值几乎综合了初中计算的所有基础知识和基本方法,因此它的计算方法也就灵活多样.

题型范例

题型一 二次根式的化简

例1 (1) 有理化分母并化简:$\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$.

(2) 化简:$\left(\dfrac{7}{3}\right)^{1003}\sqrt{\dfrac{3^{2006}+15^{2006}}{7^{2006}+35^{2006}}}$.

(3) 化简:$\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$的结果是( ).

A. 无理数 B. 真分数 C. 奇数 D. 偶数

(4) $\sqrt{5-\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$与$\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$的( ).

A. 和为1 B. 差为1 C. 积为1 D. 商为1

【思路探究】 (1) 本题若直接将分母有理化,则化简过程比较复杂:一是要把分母进行两次有理化;二是分子要进行多项式的乘法和加减法混合运算.若注意到$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2=0$,在分子中加上$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$后,利用乘法公式将分子分解为含有分母的因式,则化简就非常简捷了.

(2) 此题初看貌似吓人,似有一筹莫展之感,但只要仔细观察,认真思考,就能在思维的盲区找到突破口,并不难发现$\dfrac{3}{7}=\dfrac{15}{35}$,进而可得$\dfrac{3^{2006}}{7^{2006}}=\dfrac{15^{2006}}{35^{2006}}$.

(3)、(4)这两小题都可利用完全平方公式化简.所不同的是第(3)题中的分母有两层根号,第(4)题中的根式有三层根号.

指点迷津

二次根式的分母有理化通常是乘以分母的有理化因式.它的灵活运用有分子分母同时分解因式后约分化简;有将根号外的因式移到根号内等等.

二次根式的化简求值,它的活用有整体代入、配方代入和变形代入等方法.

解决类似问题时,观察数字之间的内在关系,加上或减去合适的恒为0的式子是关键.

要善于利用双重二次根式化简的重要关系式:

$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$,其中$x+y=a$,$xy=b$ $(x>y)$.

题型二　二次根式的化简求值

例 2　（2009，娄底中考）先化简，再求值：

$$\frac{x-4}{x-2}+\frac{4}{x^2-4x+4}\div\frac{x}{x-2}，其中\ x=\sqrt{2}.$$

【思路探究】　需先将要求的分式化简，化成最简分式后，再将 $x=\sqrt{2}$ 代入化简后的分式求值.

解这类求值问题，必须先化简，再求值，这是因为，化简后求值，不但可简化计算，而且可提高计算准确率.

题型三　二次根式技巧性的化简求值

例 3　（2009，《数学周报》杯天津竞赛）已知 $x+\frac{1}{x}=7\ (0<x<1)$，则 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的值为（　　）.

A. $-\sqrt{7}$　　B. $-\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\sqrt{5}$

【思路探究】　题中没有给出 x 的具体值，显然不能直接代入求值，将要求的 $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ 平方后，可发现它与 $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 有一定的联系，从而可整体代入求值.

这两个式子之间有什么关系？

例 3 与例 2 的最大不同点是：例 3 不能将 x 的具体值代入求解，而须先将要求二次根式平方，再将已知的条件等式作为整体代入.

【拓展题】　（2008，天津竞赛）若 $\frac{1}{m}-|m|=1$，则 $\frac{1}{m}+|m|$ 的值为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

拓展题的解法与例 3 基本相同，都是运用乘法公式变形，都是运用整体思想方法代入求值，所不同的是最后确定值的符号刚好相反.

例 4　满足等式 $x\sqrt{y}+\sqrt{x}y-\sqrt{2003x}-\sqrt{2003y}+\sqrt{2003xy}=2003$ 的正整数对 (x,y) 的个数是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【思路探究】　要求 (x,y) 的正整数对，就要解关于 x,y 的方程组. 从题目的外在形式看，只有一个方程. 从求它们的正整数解，可挖掘其隐含条件，进而由隐含条件得关于 x,y 的方程组.

利用因式分解方法，将等式转化为方程组是解决问题的关键.

题型四　二次根式的数形结合问题

例 5　（2009，深圳中考）如图 1-2-1，数轴上与 $1,\sqrt{2}$ 对应的点分别为 A,B，点 B 关于点 A 的对称点为 C，设点 C 表示的数为 x，则 $|x-\sqrt{2}|+\frac{2}{x}=$（　　）.

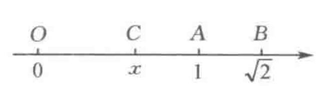


图 1-2-1

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 2

这是一道二次根式数形结合的试题，利用两对称点到对称中心的距离相等，列方程易求得 x 的值.

【思路探究】 要求 $|x-\sqrt{2}|+\frac{2}{x}$ 的值,关键是确定 x 的值. 根据"点 B 关于点 A 的对称点为 C",列关于 x 的方程,再解这个方程,可求得 x 的值,从而可求这个二次根式的值.

题型五　二次根式综合化简求值问题

例 6 (2008,宗沪杯竞赛) 设实数 x,y 满足 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,求 $x+y$ 的值.

【思路探究】 由 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,可知 $x+\sqrt{x^2+1}$ 与 $y+\sqrt{y^2+1}$ 互为倒数,利用这种关系,分母有理化,可得 $x+y$ 的关系式,再平方化简,利用因式分解法,将 $x+y$ 看作一个整体求解.

变形后能得到 $x+y$ 的一个什么样的关系式?

对于二次根式的综合化简求值问题,要结合题目结构特征,灵活运用相关知识求解,如本题就是利用倒数关系和完全平方数的关系化简求值.

方法小结

1. 在进行二次根式的化简求值时,要注意两点:一是要将二次根式都化为最简二次根式;二是只需将同类二次根式的系数相加减,根指数和被开方数都不能变.

2. 做二次根式的加减法,实质上就是合并同类二次根式. 因此,能不能正确进行二次根式的加减运算,关键是两点:一是能不能准确地化简二次根式;二是能不能准确地判断同类二次根式.

3. 二次根式的化简求值中考题和竞赛题,一般有三种类型:一是直接将已知数代入要求的代数式中,运用二次根式的加减乘除法法则进行计算;二是需将要求的代数式先化简,再将条件二次根式的值代入求解;三是对于较复杂的二次根式化简,有时需要将条件二次根式和要求的代数式同时变形,并且要有针对性和选择性地变形,方可求其值.

能力训练

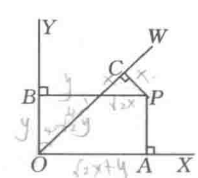
1. (2009,《数学周报》杯全国竞赛) 已知非零实数 a,b 满足 $|2a-4|+|b+2|+\sqrt{(a-3)b^2}+4=2a$, 则 $a+b$ 等于(C).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 如图,$\angle XOY=90°$,OW 平分 $\angle XOY$,$PA\perp OX$ 于 A,$PB\perp OY$ 于 B,$PC\perp OW$ 于 C. 若 $OA+OB+OC=1$,则 $OC=$(　　).

A. $2-\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{2}-1$

C. $\sqrt{6}-2$　　D. $2\sqrt{3}-3$



第 2 题图

3. (2007,山东竞赛) 已知 $a>0,b>0$,且 $\sqrt{a}(\sqrt{a}+4\sqrt{b})=3\sqrt{b}(\sqrt{a}+2\sqrt{b})$,则 $\frac{a+6\sqrt{ab}-8b}{2a-3\sqrt{ab}+2b}$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\frac{19}{11}$　　D. $\sqrt{2}$

4. 已知 m,n 是两个连续正整数,$m<n$,且 $a=mn$,设 $x=\sqrt{a+n}+\sqrt{a-m}$,$y=\sqrt{a+n}-\sqrt{a-m}$,下列说法正确的是(　　).

A. x 为奇数,y 为偶数　　B. x 为偶数,y 为奇数

C. x,y 都为奇数　　D. x,y 都为偶数

5. 若 $x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$,则 $\frac{x^{10}+x^6+x^4+1}{x^{10}+x^8+x^2+1}$ 的值为________.

6. 设 a 为 $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ 的小数部分，b 为 $\sqrt{6+3\sqrt{3}}-\sqrt{6-3\sqrt{3}}$ 的小数部分，则 $\frac{2}{b}-\frac{1}{a}$ 的值为________.

7. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\frac{2}{[\sqrt{1\times2}]\times[\sqrt{2\times3}]\times[\sqrt{3\times4}]}+\frac{2}{[\sqrt{2\times3}]\times[\sqrt{3\times4}]\times[\sqrt{4\times5}]}+\cdots+\frac{2}{[\sqrt{98\times99}]\times[\sqrt{99\times100}]\times[\sqrt{100\times101}]}$ 的值为________.

8. (2008，江西竞赛) 设 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+4})=9$，则 $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=$________.

9. (2009，成都中考) 先化简，再求值：$x^2(3-x)+x(x^2-2x)+1$，其中 $x=\sqrt{3}$.

10. 若 m 适合关系式 $\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值.

11. 若 a,b,c 为两两不等的有理数，求证：$\sqrt{\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}}$ 为有理数.

模拟检测一

（满分 120 分）

一、选择题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 已知 $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{2x+y}=0$，则 $x-y$ 的值为（　　）.

A. 2　　B. 6　　C. 2 或 -2　　D. 6 或 -6

2. 已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于（　　）.

A. -5　　B. 5　　C. -9　　D. 9

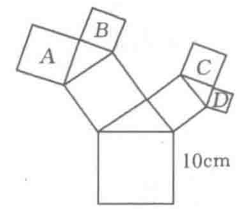
3. 计算 $(\sqrt{30}+\sqrt{21}-3)(\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{7})$ 的值等于（　　）.

A. $6\sqrt{7}$　　B. $-6\sqrt{7}$　　C. $20\sqrt{3}+6\sqrt{7}$　　D. $20\sqrt{3}-6\sqrt{7}$

4. 已知实数 a 满足 $|2006-a|+\sqrt{a-2007}=a$，那么 $a-2006^2$ 的值是（　　）.

A. 2005　　B. 2006　　C. 2007　　D. 2008

5. 如图所示，所有的四边形都是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形的边长为 10 cm，正方形 A 的边长为 6 cm，B 的边长为 5 cm，C 的边长为 5 cm，则正方形 D 的边长为（　　）.



第 5 题图

A. $\sqrt{14}$ cm　　B. 4 cm　　C. $\sqrt{15}$ cm　　D. 3 cm

二、填空题（每小题 6 分，共 30 分）

6. 设 $\lfloor x \rceil$ 表示最接近 x 的整数（$x\neq n+0.5$，n 为整数），则 $\lfloor \sqrt{1\times2} \rceil+\lfloor \sqrt{2\times3} \rceil+\lfloor \sqrt{3\times4} \rceil+\cdots+\lfloor \sqrt{100\times101} \rceil$ 的值为________.

7. 观察下列各式：$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$，$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$，…，请你将发现的规律用含自然数 $n(n\geqslant1)$ 的形式表示出来________.

8. 已知 a 为实数，则代数式 $\sqrt{a+2}-\sqrt{8-4a}+\sqrt{-a^2}$ 的值为________.

9. 已知 $A=n-\frac{1}{2}$，$B=3\sqrt{n}-2$（n 为正整数）. 当 $n\leqslant5$ 时，有 $A<B$；请用计算器计算当 $n\geqslant6$ 时，A，B 间的大小关系为________.

10. 设 $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$，a 是 x 的小数部分，b 是 $-x$ 的小数部分，则 $a^3+b^3+3ab=$________.

三、解答题（每小题 20 分，共 60 分）

11. 计算 $\frac{\sqrt{2003}}{(\sqrt{2003}-\sqrt{2005})(\sqrt{2003}-\sqrt{2007})}+\frac{\sqrt{2005}}{(\sqrt{2005}-\sqrt{2007})(\sqrt{2005}-\sqrt{2003})}+\frac{\sqrt{2007}}{(\sqrt{2007}-\sqrt{2003})(\sqrt{2007}-\sqrt{2005})}$.

12. 已知 $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$，求 $\frac{1-2a+a^2}{a-1}-\frac{\sqrt{a^2-2a+1}}{a^2-a}$ 的值.

13. 设 $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{980100}}$，如果记号 $[S]$ 表示不超过 S 的最大整数，试求 $[S]$.

第二讲　一元二次方程

一元二次方程是初中数学竞赛的重要内容，更是热点内容. 竞赛中涉及一元二次方程的主要内容有：

1. 根的判别式和根与系数的关系.
2. 可化为一元二次方程的分式方程、无理方程和特殊的高次方程.
3. 二元二次方程组.
4. 一元二次方程的实际应用问题.
5. 构造一元二次方程解决相关代数问题和几何问题.

2.1　根的判别式与韦达定理

赛点归纳

1. 根的判别式

设一元二次方程为 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$，其根的判别式为：

$$\Delta=b^2-4ac.$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta>0\\ \Delta=0\\ \Delta<0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{方程有两个不相等的实数根；}\\ \text{方程有两个相等的实数根；}\\ \text{方程没有实数根.}\end{array}\right.$$

2. 根与系数的关系(韦达定理)

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根分别为 x_1,x_2，则

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

指点迷津

根的判别式揭示了根与系数的关系，是解决与一元二次方程相关问题的有力工具，运用它解题，实质上就是将问题转化为解方程或解不等式.

由于它揭示了根与系数的关系，所以它的作用就体现在：由已知方程根的某些情况，求解方程的系数；反之，由已知方程的系数的某些情况，求解根的相应问题.

题型范例

题型一　一元二次方程根的判别式的运用

例 1　(2008，广东竞赛) 关于 x 的方程 $2kx^2+(8k+1)x=-8k$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是(　　).

A. $k>-\frac{1}{16}$　　　　B. $k\geqslant-\frac{1}{16}$ 且 $k\neq 0$

C. $k=-\frac{1}{16}$　　　　D. $k>-\frac{1}{16}$ 且 $k\neq 0$

【思路探究】　由方程 $2kx^2+(8k+1)x=-8k$ 有两个不相等的实数根，可得这个关于 x 的一元二次方程的根的判别式大于 0，由此可求出 k 的取值范围.

由于这个一元二次方程的二次项系数待定，所以运用一元二次方程根的判别式确定 k 的取值范围时，谨防忽视 $k\neq 0$.

题型二 根与系数关系的综合问题

例 2 （2008，太原竞赛）若 a,b 都是整数，方程 $ax^2+bx-2008=0$ 的相异两根都是质数，则 $3a+b$ 的值为（　　）.

A. 100　　B. 400　　C. 700　　D. 1000

先利用根与系数的关系列关于 a,b 的方程组，再根据两根都是质数，进行质因数分解.

【思路探究】 若设方程 $ax^2+bx-2008=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，则由根与系数的关系可得关于 a,b 的方程组，由于这个二次方程的相异两根都是质数，由此可解得 a,b 的值，从而可求 $3a+b$ 的值.

可分解为两个什么质数的积?

【拓展题】 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根之差等于方程 $x^2+qx+p=0$ 的两根之差. 那么除去 $p^2-4q>0$ 与 $q^2-4p>0$ 之外，p,q 还应具有的关系式为（　　）.

A. $p+q=4$　　　　B. $p=-q$

C. $p+q=-4$ 或 $p=q$　　　　D. $p+q=4$ 或 $p=-q$

关键是如何将这两个关于 x 的一元二次方程的两根之差转化为两根之和与两根之积.

例 3 已知关于 x 的方程 $(a^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-(2a+7)\cdot\left(\frac{x}{x-1}\right)+1=0$ 有实数根.

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 若原方程的两个实数根为 x_1,x_2，且 $\frac{x_1}{x_1-1}+\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{3}{11}$，求 a 的值.

解关于含字母系数的 x 的一元方程时，要考虑周密，要分类讨论.

【思路探究】 方程有实根，究竟是一个实数根，还是两个实数根？这就要分两种情况考虑：一是当它是关于 x 的一次方程去探求 a 的取值范围；二是当它是关于 x 的二次方程去探求 a 的取值范围和 a 的值.

【思维误区】 有位同学这样解答例 3，你认为对吗？

它既可以是关于 t 的一次方程，也可以是二次方程，不能只考虑是二次方程的情况.

【解】 (1) 设 $\frac{x}{x-1}=t$，原方程可化为 $(a^2-1)t^2-(2a+7)t+1=0$.

∵ 方程有实数根，　∴ $\Delta\geqslant 0$.

由 $\Delta=[-(2a+7)]^2-4(a^2-1)\geqslant 0$，解得 $a\geqslant -\frac{53}{28}$.

此处未考虑 $a^2-1=0$ 的情况，即原方程为关于 t 的一次方程的情况.

又 $t\neq 1$，但当 $t=1$ 时，$(a^2-1)-(2a+7)+1=0$，

解得 $a=1\pm 2\sqrt{2}$.　而 $1\pm 2\sqrt{2}>-\frac{53}{28}$，

所以综上可知当 $a\geqslant -\frac{53}{28}$，且 $a\neq 1\pm 2\sqrt{2}$ 时，原方程有实数根.

(2) 由题设知，$\frac{x_1}{x_1-1}$，$\frac{x_2}{x_2-1}$ 是方程 $(a^2-1)t^2-(2a+7)t+1=0$ 的两个根，利用根与系数的关系得 $\frac{2a+7}{a^2-1}=\frac{3}{11}$.

∴ $3a^2-22a-80=0$，　解得 $a_1=10$，$a_2=-\frac{8}{3}$.

$a=-\frac{8}{3}$ 不在 $a\geqslant -\frac{53}{28}$ 的范围内，应舍去.