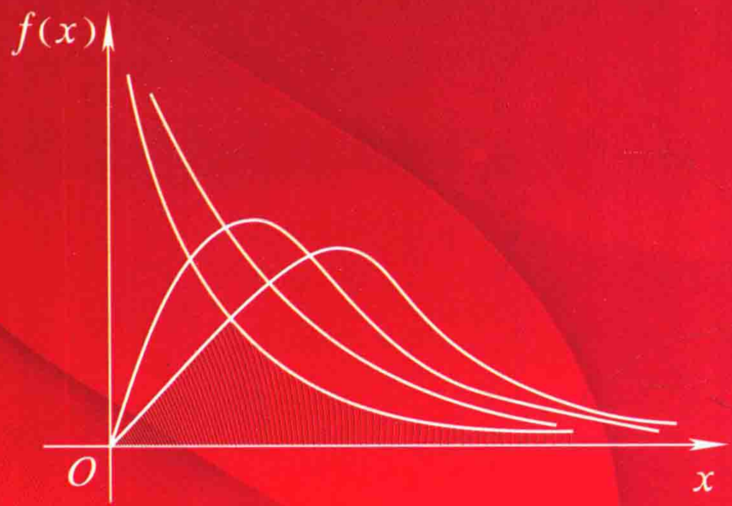
高等学校数学教材系列丛书



概率论与数理统计

张卓奎 陈慧婵 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

概率论与数理统计

张卓奎　陈慧婵　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是根据高等院校各专业对概率论与数理统计的学习要求而编写的。本书共8章，主要内容包括概率论的基本概念、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计以及假设检验。各章后均配有习题，书末配有相应的参考答案。

本书内容简练，通俗易懂，凡具有高等数学和线性代数基础的读者均可阅读。

本书可作为高等院校概率论与数理统计的教材或教学参考书，也可作为高等院校教师、报考硕士研究生考生和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/张卓奎，陈慧婵编著. —西安：西安电子科技大学出版社，2014.6
高等学校数学教材系列丛书
ISBN 978-7-5606-3292-6

Ⅰ. ① 概… Ⅱ. ① 张… ② 陈… Ⅲ. ① 概率论—高等学校—教材 ② 数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ① O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 067461 号

策划编辑 李惠萍
责任编辑 郭亚萍 李惠萍
出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)
电　　话 (029)88242885 88201467 　邮　　编 710071
网　　址 www.xduph.com 　电子邮箱 xdupfxb001@163.com
经　　销 新华书店
印刷单位 陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次 2014年6月第1版 2014年6月第1次印刷
开　　本 787毫米×960毫米 1/16 印张 23
字　　数 479千字
印　　数 1～3000册
定　　价 39.00元
ISBN 978-7-5606-3292-6/O

XDUP 3584001-1

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象的一门学科，它已被广泛地应用到工农业生产、科学技术、经济及教育研究等领域，并且在这些领域显现出十分重要的作用。

目前，在高等院校中，很多专业的学生都需要学习概率论与数理统计。为了适应不同专业、不同层次学生的需要，编者在多年讲授本课程的基础上，结合同行专家、同名专著和同名教材的优秀成果，经过多次修订和补充写成本书。

在编写过程中，编者注重基本概念、基本方法和基本理论的叙述，力求准确和简明，同时关注能力的培养，选择读者最易接受的方法进行介绍，尽量使读者准确、系统地认识和掌握概率论与数理统计的基本理论和思维方法，学懂弄通。

本书具有以下特点：

(1) 选材紧扣大纲，少而精、广而浅，理论联系实际，既反映了学科知识结构的要求，又凸显了该学科在实践中的应用性。

(2) 结构布局合理，重点突出，难点分散，抽象问题具体化，严谨问题逻辑化，循序渐进，举一反三。

(3) 叙述方法新颖，注重传统优秀方法的使用，强调新思想、新观点、新思维与新方法的运用，力求朴实、简明和自然。

(4) 题型丰富多样，典型性、代表性和实用性并举，例题、习题相互配合，渗透互补，以题说法，开拓思路，有的放矢。

(5) 数学工具浅显，图文并茂，易于理解，便于掌握。

全书共 8 章：第 1 章介绍概率论的基本概念，主要讨论概率论的研究对象及所要解决的问题；第 2 章介绍随机变量及其分布，主要讨论如何把微积分学这一重要的数学工具引进概率论，用微积分的方法解决概率问题；第 3 章介绍多维随机变量及其分布，多维随机变量是随机变量的延伸和拓广，主要实现用多元函数微积分的方法解决概率问题；第 4 章介绍随机变量的数字特征，即研究随机变量某些方面、某些侧面的取值性质，重点介绍随机变量的数学期望、方差和相关系数等数字特征；第 5 章介绍大数定律及中心极限定理，利用极限说明和解决一些与概率相联系的重要问题，同时也是数理统计的重要概率基础；第 6 章介绍数理统计的基本概念，主要讨论数理统计的研究对象、相关的基本概念和抽样

分布；第7章介绍参数估计(属于统计推断问题)，主要讨论点估计、区间估计和估计量的评选标准；第8章介绍假设检验(也属于统计推断问题)，主要讨论假设检验的基本概念以及正态总体参数的假设检验问题。

本书在编写过程中，得到了西安电子科技大学网络学院等院系以及中国科学院西安光学精密机械研究所研究生部的大力支持，得到了西安电子科技大学教材建设基金的资助，许多同行同事老师给予了鼓励和帮助，西安电子科技大学出版社的领导也非常关心本书的出版，李惠萍编辑对本书的出版付出了辛勤的劳动，编者在此一并致以诚挚的谢意！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏，恳请读者批评、指正。

编　者

2014年2月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念

1.1　随机现象与随机试验

自然界和社会中发生的现象是多种多样的。有一类现象在一定条件下出现的结果是确定的(如向空中抛一石子必然下落，同性电荷必然相互排斥等)，这类现象称为确定性现象。还有一类现象，在一定条件下出现的结果是不确定的，即可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果(例如：投掷一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次投掷之前无法确定投掷的结果是什么；一门大炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法知道弹着点的确切位置，等等)，这类现象称为随机现象。对于随机现象，人们经过大量的重复试验和观察，发现它呈现出其固有的规律性，称之为统计规律性，概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。

通常，对一个现象的认识，需要通过科学试验来完成，对随机现象的认识也不例外。下面我们举一些该类试验的例子，以期给出随机试验的定义。

例 1-1　掷一枚硬币，观察正面 H 和反面 T 出现的情况。

例 1-2　掷一枚硬币三次，观察正面 H 和反面 T 出现的情况。

例 1-3　掷一枚骰子，观察出现的点数。

例 1-4　袋中装有 5 只球，其中 3 只红球，2 只白球，从袋中任取 1 只球，观察取出的球的颜色。

例 1-5　在一批产品中任取 1 件，观测它的寿命。

撇开以上例子的具体含义，可以发现它们有着共同的特点。在例 1-1 中，试验有两种可能的结果，出现正面 H 或者反面 T，在掷硬币之前不能确定出现正面 H 还是出现反面 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行。

概括起来，这些试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且可以事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

称具有上述三个特点的试验为随机试验。

1.2　样本空间与随机事件

1. 样本空间

对于随机试验来说，由于可以事先明确试验的所有可能结果，因此称随机试验所有可

能结果的集合为随机试验的样本空间，记为Ω。称随机试验中一个可能结果为一个样本点，记为ω，从而样本空间就是样本点的集合，即$\Omega=\{\omega\}$。下面给出1.1节中提到的几个随机试验的样本空间：

Ω_1：{H，T}；

Ω_2：{HHH，HHT，HTH，THH，HTT，THT，TTH，TTT}；

Ω_3：{1，2，3，4，5，6}；

Ω_4：{红，白}；

Ω_5：$\{t \mid t\geqslant 0\}$。

2. 随机事件

在实际中，当进行随机试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点的出现情况。例如，在掷一枚硬币三次的随机试验中，我们关心正面至少出现两次的那些样本点，满足这一条件的样本点构成一个集合，即{HHH，HHT，HTH，THH}，它是样本空间的一个子集。

一般地，称随机试验的样本空间Ω的子集为随机试验的随机事件，简称事件。在每次试验中，当且仅当随机事件所包含的样本点中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为基本事件。例如，在掷一枚骰子的随机试验中，{1}，{2}，…，{6}都是基本事件。样本空间Ω包含所有的样本点，它是自身的子集，在每次试验中总是发生的，称其为必然事件。空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称其为不可能事件。

例 1-6 在掷一枚硬币三次的试验中：事件A为“第一次出现正面”，即$A=$\{HHH，HHT，HTH，HTT\}；事件B为“三次出现同一面”，即$B=$\{HHH，TTT\}。

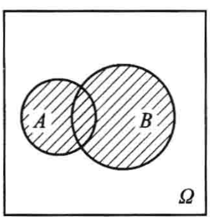
在掷一枚骰子的试验中：事件C为“出现的点数为偶数”，即$C=\{2, 4, 6\}$；事件D为“出现的点数不超过3”，即$D=\{1, 2, 3\}$。

3. 事件的运算与事件间的关系

由于事件是一个集合，因此事件的运算和事件间的关系可以按集合论中集合的运算和集合间的关系来处理，只不过这些运算和关系在概率论中有着相应的提法。

1）事件的运算

（1）和运算（和事件）：称事件A与事件B中至少有一个发生的事件为事件A与事件B的和事件，记为$A\cup B$，如图1-1所示。



$A\cup B$

图 1-1

称事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生的事件为A_1，A_2，…，A_n的和事件，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

类似地，有

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

(2) 积运算(积事件)：称事件 A 与事件 B 同时发生的事件为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB，如图 1-2 所示。

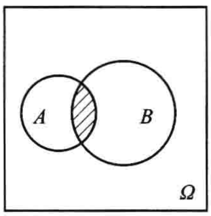
称事件 A_1，A_2，…，A_n同时发生的事件为 A_1，A_2，…，A_n的积事件，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=A_1A_2\cdots A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i$$

类似地，有

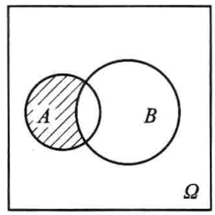
$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=A_1A_2\cdots A_n\cdots=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

(3) 差运算(差事件)：称事件 A 发生而事件 B 不发生的事件为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，如图 1-3 所示。



$A\cap B$

图 1-2



$A-B$

图 1-3

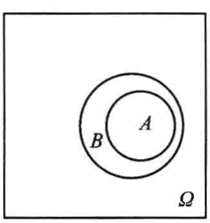
2) 事件的关系

(1) 包含关系(子事件)：设 A 与 B 是事件，如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 是事件 B 的子事件，记为 $A\subset B$，如图 1-4 所示。

(2) 相等关系：设 A 与 B 是事件，如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为$A=B$。

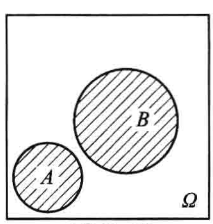
(3) 互不相容(互斥)关系：设 A 与 B 是事件，如果事件 A 与事件 B 同时发生是不可能的，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互不相容的(或互斥的)，如图 1-5 所示。

(4) 对立关系：设 A 与 B 是事件，如果 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是相互对立的，称事件 B 是事件 A 的逆事件或对立事件，记为$\overline{A}$，如图 1-6 所示。



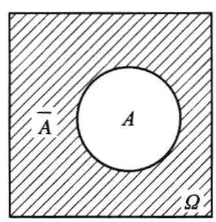
$A\subset B$

图 1-4



$A\cap B=\varnothing$

图 1-5



$A\cap\overline{A}=\varnothing, A\cup\overline{A}=\Omega$

图 1-6

结合差事件与对立事件的定义，我们不难得到以下重要的结果：

$$A-B=A\overline{B}=A-AB$$

3) 运算律

(1) 吸收律：若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$AB=A$。

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$。

(3) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，$A(BC)=(AB)C$。

(4) 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$。

(5) 对偶律：$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$，$\overline{\overline{A}}=A$。

例 1-7 在例 1-6 中，有

$$A\cup B=\{\text{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT}\}$$

$$A\cap B=\{\text{HHH}\}$$

$$B-A=\{\text{TTT}\}$$

$$\overline{A\cup B}=\{\text{THT, TTH, THH}\}$$

例 1-8 设 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求 A 的对立事件 $\overline{A}$ 及其所表示的意义。

解 设 A_1 表示“甲种产品畅销”，A_2 表示“乙种产品畅销”，则

$$A=A_1\overline{A_2}$$

从而有

$$\overline{A}=\overline{A_1\overline{A_2}}=\overline{A_1}\cup A_2$$

所以 $\overline{A}$ 表示事件“甲种产品滞销或乙种产品畅销”。

1.3 概率及其性质

对于一个事件(除必然事件与不可能事件外)，在一次试验中可能发生也可能不发生。我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，因而需要把它用一个合适的数来表征，而这个数就是我们所要讨论的事件的概率。

1. 频率

定义 1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

由频率的定义知，频率具有下述性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$;

(3) 若 A_1, A_2, …, A_n 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_n)$$

由于事件发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，因此其大小表示了事件发生的频繁程度。频率愈大，事件发生就愈频繁。这意味着事件在一次试验中发生的可能性就愈大，反之亦然。但大量的试验证明，频率具有随机波动性，致使频率不能成为概率。同时，大量的试验也证明，频率具有稳定性，因此频率可以揭示概率，其稳定值就是事件在一次试验中发生的概率，从而产生了概率的公理化定义。

2. 概率

定义 2　设 Ω 是随机试验的样本空间，若对于随机试验的每一个随机事件 A 都有一个实数 $P(A)$ 与之对应，且 $P(A)$ 满足下列三个条件：

(1) 非负性：设 A 是事件，则 $P(A)\geqslant 0$;

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性：设 A_1, A_2, …, A_n, …是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots)$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots \tag{1.3.1}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

3. 概率的性质

性质 1　$P(\varnothing)=0$。

证明　取 $A_n=\varnothing(n=1, 2, \cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots)$，由概率的可列可加性，得

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)= \sum_{n=1}^{\infty}P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由概率的非负性知 $P(\varnothing)\geqslant 0$，再结合上式知 $P(\varnothing)=0$。

性质 2(有限可加性)　设 A_1, A_2, …, A_n 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots, n)$，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)= \sum_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{1.3.2}$$

证明　取 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，则 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots)$。由(1.3.1)式，得

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)= \sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)+0 = \sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 3(减法公式)　设 A、B 是事件且 $A\subset B$，则

$$P(B-A) = P(B)-P(A) \tag{1.3.3}$$

从而 $P(A)\leqslant P(B)$。

证明 由于 $A\subset B$，因此

$$B=A\cup(B-A)，且\ A(B-A)=\varnothing$$

由概率的有限可加性，即(1.3.2)式，得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

再由概率的非负性知，$P(B-A)\geqslant 0$，即 $P(A)\leqslant P(B)$。

在性质 3 中，我们假设 $A\subset B$，如果去掉这个条件，那么是否还有减法公式呢？对此我们有下面的结论：

设 A、B 是随机事件，则

$$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$$

证明 事实上，由于 $B-A=\overline{A}B=B-AB$，且 $AB\subset B$，因此

$$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$$

即

$$P(B-A)=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$$

性质 4 设 A 是事件，则 $P(A)\leqslant 1$。

证明 由于 $A\subset\Omega$，由性质 3 得

$$P(A)\leqslant P(\Omega)=1$$

性质 5 设 A 是事件，则 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

证明 由于 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，由(1.3.2)式，得

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

即

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

性质 6(加法公式) 设 A、B 是事件，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1.3.4}$$

证明 由于

$$A\cup B=A\cup(B-AB)，且\ A(B-AB)=\varnothing，AB\subset B$$

由(1.3.2)式及(1.3.3)式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

(1.3.4)式还能推广到多个事件的情况。例如，设 A、B、C 为任意三个事件，则有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \tag{1.3.5}$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 是事件，利用归纳法可以证明

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n) \tag{1.3.6}$$

性质 7(极限性)　设 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$ 是事件，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.7}$$

设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$ 是事件，则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{1.3.8}$$

证明　已知 $A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\subset\cdots$，令 $B_1=A_1$，$B_n=A_n\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_{n-1}}\right)=A_n\overline{A}_{n-1}(n=2,3,\cdots)$，则 $B_iB_j=\varnothing(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，从而有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}P(B_i)$$
$$=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

即

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

设 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，则 $\overline{A}_1\subset\overline{A}_2\subset\cdots\subset\overline{A}_n\subset\cdots$，从而有

$$\lim_{n\to\infty}P(\overline{A}_n)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\right)$$

又由于

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A}_n\right)=P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}P(\overline{A}_n)=\lim_{n\to\infty}(1-P(A_n))=1-\lim_{n\to\infty}P(A_n)$$

故

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

例 1-9　设 A、B 是随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\overline{AB})$。

解　由于 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，因此 $P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.3=0.4$，从而

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

例 1-10　已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，求 A、

B、C全不发生的概率。

解 由于事件"A、B、C全不发生"可表示为$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$，因此，所求的概率为

$$
\begin{aligned}
P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) &= P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1 - P(A\cup B\cup C) \\
&= 1 - P(A) - P(B) - P(C) + P(AB) + P(BC) + P(AC) - P(ABC) \\
&= 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}
$$

例 1-11 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$，$P(A\cup B)=0.6$，求 $P(A\overline{B})$。

解 由于

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

因此

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.4+0.3-0.6=0.1$$

从而

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$$

1.4 古典概率

1. 古典概型

设随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，$n$ 为有限的正整数，且每个基本事件 $\{\omega_i\}(i=1, 2, \cdots, n)$ 发生的可能性相同，则称这种随机试验为古典概型，或称等可能概型。

2. 古典概率

设随机试验的样本空间 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，由于每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\})$$

又由于基本事件是两两互不相容的，因此

$$
\begin{aligned}
1 = P(\Omega) &= P(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\cup\cdots\cup\{\omega_n\}) \\
&= P(\{\omega_1\})+P(\{\omega_2\})+\cdots+P(\{\omega_n\}) \\
&= nP(\{\omega_i\})
\end{aligned}
$$

$$P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n},\ i=1, 2, \cdots, n$$

若事件 $A=\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\}(1\leqslant i_1, i_2, \cdots, i_k\leqslant n)$，则 A 包含 k 个基本事件，即

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \cdots, \omega_{i_k}\} = \{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$$

所以事件 A 的概率为

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}$$

从而得到古典概率的计算公式为：

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{有利于事件 } A \text{ 发生的基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件的总数}}$$

例 1-12　将 C、C、E、E、I、N、S 这七个字母随机地排成一行，求恰好组成英文单词 SCIENCE 的概率。

解　样本空间基本事件总数为 $n=7!$，有利于所求事件发生的基本事件数为 $k=2\times2=4$，故所求的概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$$

例 1-13　把 10 本书随机地放在书架上，求其中指定的 5 本书放在一起的概率。

解　样本空间基本事件总数为 $n=10!$，有利于所求事件发生的基本事件数为 $k=6!\,5!$（其中，6! 是指把 5 本书看成一本书并与其他 5 本书在 6 个位置上全排列，5! 是指这 5 本书在 5 个位置上全排列），故所求的概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{6!\ 5!}{10!}=\frac{1}{42}$$

例 1-14　袋中有壹分、贰分和伍分的硬币各 5 枚、3 枚和 2 枚，现从中随机地取 5 枚，试求得到的钱额总数超过壹角的概率。

解　样本空间基本事件总数为

$$n=C_{10}^{5}=252$$

有利于所求事件发生的基本事件数可分两种情形：

(1) 取 2 枚伍分，其余 3 枚任取，其种数为 $C_2^2C_8^3=56$；

(2) 取 1 枚伍分，则贰分至少要取 2 枚，其种数为 $C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=70$。

从而有利于所求事件发生的基本事件数为

$$k=C_2^2C_8^3+C_2^1C_3^3C_5^1+C_2^1C_3^2C_5^2=126$$

故所求的概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{126}{252}=\frac{1}{2}$$

例 1-15　有 6 件产品，其中有 3 件是次品。从中任取 3 件，求其中恰有 2 件次品的概率。

解　样本空间基本事件总数为 $n=C_6^3=20$，有利于所求事件发生的基本事件数为 $k=C_3^2C_3^1=9$，故所求的概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{9}{20}$$

例 1－16 将 15 名新生随机地平均分配到 3 个班级中去，这 15 名新生中有 3 名是优秀生，试求：

(1) 每个班级各分配到 1 名优秀生的概率；

(2) 3 名优秀生分配到同一班级的概率。

解 样本空间基本事件总数为 $n=C_{15}^{5}C_{10}^{5}C_{5}^{5}=\frac{15!}{5!\,5!\,5!}$。

(1) 将 3 名优秀生分配到 3 个班级使每个班级都有 1 名优秀生的分法共 3! 种。对于每一种分法，其余 12 名新生平均分配到 3 个班级中的分法共有 $C_{12}^{4}C_{8}^{4}C_{4}^{4}=\frac{12!}{4!\,4!\,4!}$种，从而有利于所求事件发生的基本事件数为 $k_1=\frac{3!\,12!}{4!\,4!\,4!}$，故所求的概率为

$$p_1=\frac{k_1}{n}=\frac{\dfrac{3!\ 12!}{4!\ 4!\ 4!}}{\dfrac{15!}{5!\ 5!\ 5!}}=\frac{25}{91}$$

(2) 将 3 名优秀生分配在同一班级的分法共有 3 种。对于每一种分法，其余 12 名新生的分法(一个班 2 名，另外两个班各 5 名)有 $C_{12}^{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}=\frac{12!}{2!\,5!\,5!}$种，从而有利于所求事件发生的基本事件数为 $k_2=\frac{3\times 12!}{2!\,5!\,5!}$，故所求的概率为

$$p_2=\frac{k_2}{n}=\frac{\dfrac{3\times 12!}{2!\ 5!\ 5!}}{\dfrac{15!}{5!\ 5!\ 5!}}=\frac{6}{91}$$

例 1－17 袋中有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球。从袋中取球两次，每次取 1 只。

(1) 第一次取 1 只球，观察颜色后放回袋中，搅匀后再取 1 只球，这种取球方式叫做放回抽样。

(2) 第一次取 1 只球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取 1 只球，这种取球方式叫做不放回抽样。

试分别就上面两种情况求：

① 取到的 2 只球都是白球的概率；

② 取到的 2 只球颜色相同的概率；

③ 取到的 2 只球中至少有 1 只是白球的概率。

解 设 A、B、C 分别表示事件“取到的 2 只球都是白球”、“取到的 2 只球都是红球”、“取到的 2 只球中至少有 1 只是白球”，则事件“取到的 2 只球颜色相同”为 $A\cup B$，且 $C=\overline{B}$，$AB=\varnothing$。

(1) 放回抽样。