当代经济学系列丛书
Contemporary Economics Series
主编 陈昕

国家“十二五”重点图书

数量金融导论

数学工具箱

当代经济学
教学参考书系

[美] 罗伯特·R.雷伊塔诺 著
马博 隆云滔 刘洁 译

格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

当代经济学系列丛书
Contemporary Economics Series
主编 陈昕

数量金融导论
数学工具箱

[美] 罗伯特·R.雷伊塔诺 著
马博 隆云滔 刘洁 译

当代经济学
教学参考书系

格致出版
格致出版社
上海三联书店
上海人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

数量金融导论:数学工具箱/(美)雷伊塔诺著;马博,隆云滔,刘洁译.—上海:格致出版社:上海人民出版社,2014

(当代经济学系列丛书/陈昕主编.当代经济学教学参考书系)

ISBN 978-7-5432-2404-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①雷… ②马… ③隆… ④刘… Ⅲ.①金融学-数量经济学 Ⅳ.①F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第240686号

责任编辑 程 倩
装帧设计 敬人设计工作室
吕敬人

数量金融导论:数学工具箱

[美]罗伯特·R.雷伊塔诺 著 马博 隆云滔 刘洁 译

出 版 格致出版社·上海三联书店·上海人民出版社 (200001 上海福建中路193号 www.ewen.co) 编辑部热线 021-63914988 市场部热线 021-63914081 www.hibooks.cn **发 行** 上海世纪出版股份有限公司发行中心	**印 刷** 浙江临安曙光印务有限公司 **开 本** 787×1092 1/16 **印 张** 32.75 **插 页** 3 **字 数** 741,000 **版 次** 2015年1月第1版 **印 次** 2015年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5432-2404-9/F·759 定价:79.00元

主编的话

上世纪80年代，为了全面地、系统地反映当代经济学的全貌及其进程，总结与挖掘当代经济学已有的和潜在的成果，展示当代经济学新的发展方向，我们决定出版“当代经济学系列丛书”。

“当代经济学系列丛书”是大型的、高层次的、综合性的经济学术理论丛书。它包括三个子系列：(1)当代经济学文库；(2)当代经济学译库；(3)当代经济学教学参考书系。本丛书在学科领域方面，不仅着眼于各传统经济学科的新成果，更注重经济学前沿学科、边缘学科和综合学科的新成就；在选题的采择上，广泛联系海内外学者，努力开掘学术功力深厚、思想新颖独到、作品水平拔尖的著作。“文库”力求达到中国经济学界当前的最高水平；“译库”翻译当代经济学的名人名著；“教学参考书系”主要出版国内外著名高等院校最新的经济学通用教材。

20多年过去了，本丛书先后出版了200多种著作，在很大程度上推动了中国经济学的现代化和国际标准化。这主要体现在两个方面：一是从研究范围、研究内容、研究方法、分析技术等方面完成了中国经济学从传统向现代的转轨；二是培养了整整一代青年经济学人，如今他们大都成长为中国第一线的经济学家，活跃在国内外的学术舞台上。

为了进一步推动中国经济学的发展，我们将继续引进翻译出版国际上经济学的最新研究成果，加强中国经济学家与世界各国经济学家之间的交流；同时，我们更鼓励中国经济学家创建自己的理论体系，在自主的理论框架内消化和吸收世界上最优秀的理论成果，并把它放到中国经济改革发展的实践中进行筛选和检验，进而寻找属于中国的又面向未来世界的经济制度和经济理论，使中国经济学真正立足于世界经济学之林。

我们渴望经济学家支持我们的追求；我们和经济学家一起瞻望中国经济学的未来。

陈昕

2014年1月

前　言

本书提供了一个易懂但不失严密性的，关于进行成功投资以及数量金融领域内所必需的数学知识的介绍。这本书展开介绍了在投资组合管理和投资银行学中使用数学的相关主题，包括基本的衍生品定价以及风险管理应用等，这些都是量化投资金融，或者更通俗地讲——投资金融学所必须了解的知识。一本正在构思中的书——《高级数量金融：数学工具箱》，将会介绍更高深的数学知识，这些知识主要用来进行投资建模、衍生品定价以及风险管理。总而言之，后面出现的这些领域被称为定量金融或数理金融。

本书中使用的数学知识主要是大学本科数学专业学生所学习的。相对应的每一章的数学知识几乎都需要一个学期的时间。当然，由于本书的目的是强调那些与金融应用相关的最重要的部分，所以每一章介绍的数学知识就只是那些传统数学课程中的极小一部分。然而，本书不同于以往惯例，把高深的知识提前介绍，这使得读者在熟悉的前提下了解这些内容。

我写本书的初衷是为了填补目前在金融学和数学学科中联合应用的两个缺口，填补这两个缺口对学习金融学的学生、金融从业者以及希望强化自己的数学技能与加深对投资、数量金融应用的了解的人来说，是有意义的。数学方面有关文献存在的缺陷在于，其中大部分的内容集中在数学的一个单一领域内，如微积分。任何对金融学感兴趣并希望能满足该学科要求的人，他们只有两种选择，要么去获得一个或更多的数学相关学位，要么自己对相关数学教科书下一番功夫。无论是对商学院和金融系研究生还是对那些正从事投资和数量金融工作并有志提高他们数学技能的人来说，这两种方法都不是很有效的。那些勤奋的读者可能已经发现了，每一本这样的书，它们介绍的数学知识比金融应用所需要的知识要多很多，并且几乎不可能明确指出数学中哪一个方面的内容对金融应用来说是必要的。另一个复杂情形是，数学教材很少（偶尔也会有）提及在金融学的应用，这使得厘清相关理论变得更加复杂。

第二个缺陷在于金融学方面的文献。现有的金融学教材根据对数学熟悉程度不同分成两种,一种是像“食谱”似的教科书介绍数学金融,这种教材通常只说明数学公式,附带着简单的或启发式的推导。这一类书的特点是忽略由推导公式的要求而产生的对数学分析框架的讨论,同时也不重视为得出结论而做出的假设的作用。不过,这种方法也许更适合讨论金融应用,而对那些不可避免要探究一些答案未知的数量问题的学生来说,这类教材的内容还显得不够充实。

另一类金融学教材,其数学理论相当严谨,但是对非数学专业的学生来说,不是很容易被接受。尽管这种教材内容十分严谨,但其也取决于其他学科产生的复杂结论。因此对一个不具备其他学科知识的学生来说,尽管他们学习的积极性很高,但是他们的学习也将是不完整且不充分的。这里,再一次强调,对于那些尚未准备好的学生,他们过度相信已有的结果而没有加以真正理解,这是另一种形式的“食谱”学习。

在本书中,作者试图通过一种合理的、既严谨又易接受的方式来弥补上面提出的那些缺陷,即回顾在数量投资金融中所需要涉猎的诸多数学知识。我的目标是帮助读者深刻了解相关的数学理论,并把学到的工具有效地用于实践中。在每章中,我都会结合有关金融应用的案例来帮助读者把本章的数学理论与金融应用以及金融行业中的实际工作联系起来。

怎样才能成为“量化”

从某种意义上说,本书强调的是数学工具的应用,所谓数学工具就是在金融中成功应用的数学模型。“数学工具箱”这一表达的含义是明确的,它反映了我本人的一种理念:研究数学是对智力劳动的奖励。数学提供一系列灵活的工具,使得利用它的读者能够解决很多重要而现实的问题。

然而,我所指的使用工具,并不意味着为了后来的运用而去背诵一些公式。当然,如同使用任何一门语言一样,为了理解词语的含义并进行准确的交流,在数学的学习中,也需要适当的背诵,但是大多数公式不在必须背诵之列。的确,数学的很多内容常常伴随着公式,但是对公式的记忆应该排在学生或使用这类书的读者要努力做的事情的最后一位。学生应该努力掌握数学的分析框架并应用这些框架来分析真实世界的问题。

换句话说,学生应该把注意力放在思考的过程中,并用数学的方法来得出每一个结果。这些“工具”,即每一学科中的数学方法,都要明确了解其中的假定条件。通常地,学生们要形成必要的洞察力,理解公式与假设条件之间暗含的关系。本书中定义和研究的这些工具将会使得学习者掌握很全面的理论框架,这些框架能被应用于投资和数量金融的研究中。

尽管本书相当厚重,但是它所涵盖的内容并没有看上去那么多,本书仅仅介绍数学应用中的一个特殊领域,即在金融中的应用。因此本书选择的相关材料都是数学分支中极小的一部分。这个选择工作是本书形成过程中最为困难的一环。大体上说,我选择材料的范围都有一个主题,要么是可以直接应用到金融上的,要么是为理解后面章节的知识能直接应用到金融中所必需的。由于我的目的是确保本书不仅仅是一系列数学公式的堆

砌，就如同其他金融“食谱”教材一样，因此，我致力于留出讨论这些结果是如何推导出来的空间，以及这些数学知识与它们的假设之间的关系的。最为理想的情况是，学习本书的人，不要再把公式作为一个不变的真理而忽略其提出者做出的假设。

我这样做的动机是因为，在投资和数量金融中，很少有好的职位是依靠在标准情形中使用标准公式来解决问题的。即使有，这些应用也往往是由计算机系统来自动完成而很少或根本不需要人员干预，可将“程式交易”看作这种说法的一个例子。还有一个有趣且深刻的理论，就是所谓的套利机会。套利过程可以用公式来说明，用编辑好的程序来自我实现，它们的运行很少需要分析师的进一步干预。

同样地，因为需要定期开发新的金融产品，即使这不是更为重要的，对定量分析师的需求也在不断上升，所有的金融从业者都在使用以往的方法并使它们适应金融分析、定价、风险模型以及风险管理。如今，在具体工作中，标准化结果也许可以得到应用，也许不能得到应用，定量金融分析师最重要的工作是判断传统的方法是否还能使用，如果不能，分析师必须对传统方法做出适当的修改甚至是采用全新的方法。换句话来说，对现在的金融分析师来说，重要的是能够用数学的思维而不是简单的生搬硬套去解决问题。

对一个新手来说，本书中关于金融应用的介绍足够了，但是如果想掌握这些应用还显得不够详细。最理想的是，在读者熟悉某些应用后，如果需要，可以通过更深入研究来学习其他的应用。本书中所选择的数学主题和金融应用内容，欢迎读者和实际工作者提出宝贵意见，你们的反馈将会在下一版中致谢。

本书计划

本书共10章，每一章中都基于章节开始时提出的数学材料来展开讨论。然而，在一些地方，一个公式或结果不会被展开介绍，除非在后面的章节还会继续应用。还有一些较为深奥的结论我不打算给出证明，因为那样会使本书的定位偏离原来预定的方向。总体而言，本书的体例是独立的，每一个被讨论的素材都是相对完整的，并且具有数学的严谨性。读者唯一需要的数学背景是了解代数运算以及熟悉微积分的入门知识，例如图表、指数和对数等知识。因此本书中阐述的各个主题之间是相关的，读者应该使用铅笔或钢笔在纸上或电脑上来进行模拟，以此在理解中学会应用。对推导和案例有不清楚的地方，读者应该尝试运用代数知识自己解决。

当然，即使一个证明或案例很清楚，如果读者能够使用钢笔和纸或电脑来模拟，以澄清推导过程中被遗漏的细节，那么你们将会受益匪浅。这种非正式的练习在所讨论的工具的应用上很有必要，在做完本书中的习题以及经过现实的金融领域的实践后，你们分析问题的技能会得到很大的提高。然而，本书的每一个推导并不是都同样对所研究的数学工具具有相同程度的启发，在开始研究之前应该对细节部分好好斟酌一番，形成研究细节的习惯，这样可以加深对数学知识理解并对知识有更好地应用。

在本书中，我已经把比较难的部分用星号（*）标出了。开始阅读本书的时候，浏览本书的各个章节会很有用的。对自己感兴趣的应用可以回过头来仔细研究。对于那些有相当深厚功底的读者来说，阅读本书后会发现，对以前熟悉的知识会有进一步的认识。对于

初学者或者新接触这些材料的研究生来说，在进行应用之前浏览一下较长的证明的推理过程是很有用的。

按章节顺序，书中介绍了很多有效的方法，既可以自学也可以用在常规的课堂教学中。那些具有前瞻性的教授和从业者，他们可能会为了有效地满足必要的教育需求而打乱章节间的顺序来选择相关内容。对金融的应用来说，最好的方法就是那些最能满足读者和从业者实际需要的方法。那些熟悉金融应用和了解数学技巧的读者，如果需要进一步强化，应该将注意力放在适当的数学部分上，然后通过金融应用来更好地理解数学和金融之间的联系。那些对金融学不是很熟悉的读者，也许在看到数学部分之前，会被开始浏览每一章的应用而激励。

一些课程设计选项

和其他一些金融学课程一样，如投资市场和产品、投资组合理论、金融报告、公司金融以及商业战略，本书适合作为研究生第一学期入门课程数量金融的教材或参考书。在教学过程中，第一学期要在学生加强数学知识和加深理解金融应用之间平衡好时间。在第二学期，学生应该关注更具有定量性的投资金融课程，如在固定收益市场和产权投资市场的投资组合管理、期权及衍生工具等。

对商学院那些刚接触金融学这门课程的金融系学生来说，最好把本书的讲授推迟到第二学期，在学习了金融市场和金融工具的入门课程后。这样可以为讨论本书章节中的金融应用提供背景知识。

本书同样适合那些已经毕业并希望巩固在投资和数量金融中理论知识和实践技巧的读者，因此对那些即将从事投资或数量金融行业的学生和需要提高自身数学技能以便使他们在“金融工程师”的职业上得到提升的从业者来说，本书可以用来进行自学。在数学和工程学中，很多研究生和本科生在本书介绍的数学知识领域中很有造诣，他们也许对在数学框架中提供的关于金融课程的入门很感兴趣。严谨的数学方法在现实世界中的应用可能对这些学生来说是熟悉的，因此在学生早期的学习计划中需要综合地学习数学和金融知识。

对于数学较好的学生，由于本书前几章提供了相对简单的回顾，因此宜采取序贯的方法来学习所有内容，在熟悉的主题上快速通过，把更多的精力放在金融应用上。对数学不擅长的学生来说，他们可能在看完前四章的时候，会陷入与抽象公式做斗争的危险，他们只有在认识到在后面的实际应用中需要数学知识时才有动力去学习数学。对于这一类学生，最好只教授第 1 章到第 4 章中的部分数学知识，把注意力集中在这些章节中的直接应用上。举个例子，导师可以给出第 1 章中逻辑和证明的快速回顾，选择第 2 章中关于数字系统的部分内容，然后直接跳到第 4 章的集合运算。在浏览完这些主题后，导师就可以解决第 5 章中的所有数学和应用方面的问题，然后顺序地从第 6 章进行到第 10 章。第 1 章至第 4 章中的其他数学内容可以被作为剩下章节中的补充材料来指定阅读或讲授。这种方法和进度能激励学生较快地学习更有意义的应用，并且有助于学生在学习这些重要应用之前保持对数学学习的兴趣。

章节练习

章节中的练习被分成操作练习和强化练习两种。这两种练习都提供了在数学和金融应用中的训练。比较有挑战性的习题在题后都给出了“提示”。学习数学和金融应用最佳的方法是寻找多种方法,即使有些方法被证明是错误的。宝贵的教训来自于这些错误的方法,它们可以帮助学生认识到自己错误地理解了某一概念或误用了某一逻辑和数学技巧。因此,如果一个问题的其他解决方法看起来是可行的,那么学生就应该被鼓励去得出至少一个结论。这一额外的努力会因为通过不同方法得出结果而强化对其的认识,即使两种方法导致不同的结论,也会有助于辨别错误和误解。

解决方案和教师手册

对于本书中的操作练习,学生可以购买有详细解答的《习题手册》。对于强化练习,教师可以从《教师手册》中获得部分答案。这一手册还包含每一章中对教授内容的建议。所有的教学资源都能在网上找到。

章节组织

如今的数学教程很少会介绍数理逻辑这一章,当然也没有谈及其应用。逻辑成为数学系或哲学系的学生学习的一门独立的课程。跳过逻辑这一内容其实是失去了一个获得思考的工具,失去了得出合理结论以及形成清楚正确定量推理的机会。

简单的结论和定量推导没有形式上的逻辑要求,但真实报表和状态分析的工具以及证明过程的逻辑结构,尤其在评估更复杂结果的完整性时逻辑性是必不可少的。除了逻辑性这一工具外,第 1 章还给出了各种应用这些工具的证明,并且这种做法一直延续到下面的章节中。第 1 章还提出了一系列有趣的悖论,通过仔细论证这些悖论,可以看出,如果论点是错误的,那么得到的结论也许也是无意义的。然而悖论是重要的,它促使我们更加清楚地去思考并明确地识别基本假设的重要。

最后,对于完整性而言,这一章包含了对数学正规化公理的讨论,并解释为何这种正规化公理能帮助读者避免悖论的产生。注意,在选择公理的时候存在一定的限制范围,公理对数学理论有着很大的影响。然而,读者也不应该陷在这些正规性的要求中,因为这些要求不是理解下面内容的关键,读者会在后面的研究中遇到更为熟悉的框架。

金融学以及其他任何学科中的数学逻辑,其主要应用都是作为指导,在确认假设和应用中或推导一个必需的结论而避免任何潜在的灾难性的后果的风险。直觉对得出结论有帮助,但是它决不能代替对问题的仔细分析。

第 2 章主要介绍数系与函数,这似乎不是很重要的主题。我们不都在读小学的时候学过数字吗？这一章的主要目的是回顾不同的数字系统,这些系统为人所熟知并且为更高级的数学模型提供基础。由于本书的目的是介绍早期的重要概念,在第 1 章中,自然数成为一个相对简单的关于公理化结构的例子,它被用来形成一个数学理论。

由自然数开始,允许更加复杂的数学运算,依次允许加入整数、有理数、无理数、实数以及复数。整体上看,这一系列的数都具有某些共同的数学运算结构,这样就可以介绍群和域的概念了。同理,这一系列数还为无限可数的集合、无限不可数集合以及给定集合的"紧致"子集这些概念提供基本的理论基础。一旦这些数字系统以及它们的各种子集被定义,则其就成为具有功能的自然域。

也许只有有理数才是金融中所需要的,即使是有理数,也只使用 6 到 10 位小数,很容易可以证实有些金融问题的解是无理数甚至是复数。在前者情形中,合理使用近似值,有时可以调和现实世界中交易产生的困难,同时,通过建立在利率框架的基础还可以避免复数的出现。在金融中随处可见数字系统的作用,从名义利率转换到实际利率的转换,从作为债券、抵押贷款和其他贷款、优先股和普通股以及远期合约的价格函数,从作为投资回报模型的资产分配函数。

数字系统结构随着欧氏空间和其他空间的引入得以在第 3 章中继续拓展。第 2 章中介绍的二维欧氏空间为复数提供了一个可视化的框架。在定义了上面的概念后,欧氏空间的向量空间结构得以讨论,在这些空间上的标准范数以及内积的概念也随之建立。这些概念的讨论自然地得出与之相关的重要的不等式——柯西—施瓦茨(Cauchy-Schwarz)不等式,这个不等式会不时地出现在本书的很多内容中。欧氏空间也是最简单的空间,其中定义了替代范数的概念,尤其是 l_p—范数的定义与其相关的关系,得出主要的结果是将柯西—施瓦茨不等式一般化为赫尔德(Hölder)不等式,把三角不等式一般化为闵可夫斯基(Minkowski)不等式。

接着讨论度量的概念,以及度量和范数之间的关系,即二者在给定空间下可以彼此互相推导出来。在文章中可以看见数学中一个共同的主题,那就是一般意义的度量与定义在$\mathbb{R}^2$或$\mathbb{R}^n$上的为大家所熟知的标准度量的基本性质是一样的。两个度量的两种等价的概念也被介绍了,其内容是在欧氏空间中,由 l_p—范数推导出来的所有度量都是等价的。强有力的证据显示,这个结论的得出与这些空间的有限的维数基本相关,表明在下面的更一般的空间中,这种等价关系不一定成立。同样地,尽管 l_p—等价具有普遍性,但这并不意味着所有的度量都是等价的。

在金融应用中,欧氏空间被视为是表述关于资产配置的一个投资组合、各种债券收益率以及预测的现金流等很自然的方式。此外,似乎所有的 l_p—范数都计算各种瞬间样本统计数据,然而一些 l_p—范数,尤其是当 $p=1$, 2 和∞时,以各种形式出现在金融的约束下最优化问题中。有时这些特殊的范数作为约束条件,有时又作为目标函数需要被优化。

第 4 章主要介绍集合论以及拓扑的知识,并介绍了另一种公理化结构的例子,这个例子是由于第 1 章中讨论的悖论而产生。但是这里焦点在集合运算以及集合之间的关系上。这些是重要的数学工具,就像代数运算法则在数学推导中的地位一样。此外,关于开和闭的基本概念,首先是在人们很熟悉的直线上的区间集合。在说明$\mathbb{R}$上的相对简单的开集后,构造的康托尔(Cantor)集被当作闭集的一个特例给介绍。康托尔集是特殊的,这是由于它是不可数的,而且与此同时,它表现出"测度为 0"的特殊性质。这一结果的得出是通过证明康托尔集在区间[0, 1]上被去掉一列的小区间后,这些被去掉的小区间总长度之和是 1!

开和闭的定义很自然地延伸到欧氏空间和度量空间中，为了说明完整性，又介绍了拓扑空间的概念。拓扑，被定义为具有与更为大家所熟悉的开集合一样的性质，这一概念在本章里被再一次用来说明一个一般理念。这一章的结尾部分介绍了其他几个重要的概念，例如聚点、紧致性等，这些概念会在下一章中进行谈论。

在金融应用中，用由函数和/或范数定义的在欧氏空间中的集合来描述带有约束的最优化问题，这是一种最自然不过的方法。一般地，这些问题的解要求这些集合具有某些拓扑性质，例如紧致性，定义的函数则具有正则性。这里，函数的正则性的意思是，方程的解可用迭代过程近似得到，迭代过程随着迭代次数的增加而收敛，收敛的概念会在第5章介绍。间隔二等分作为迭代过程的一个例子而被引入本章中，它的一个应用是计算证券的收益，并且在连续性的定义下使得收敛问题得到解决。

在第5章中，在利用好前面章节中的有关定义、工具和例子后，序列及其收敛问题得到解决。当然，主要内容是一个极限的收敛问题，在没有正式定义收敛之前先非正式地解释下收敛的含义。由于这一内容的重要性，本章利用相当大的篇幅来讨论其正式定义，详细说明定义中的语句含义以及相关判别方法，以及为何该定义需要如此正式的介绍。运用各种数学运算方法收敛性被证明。同样地，与紧致性相关的一个重要结果被证明，即虽然有界序列不一定收敛，但它一定有一个聚点并且包含一个子序列，该子序列收敛于这个聚点。因为这些序列也许有很多——事实上，无限的聚点。有限上界和有限下界概念的引入，分别被用来表明这些聚点的最大值和最小值。

序列收敛在具有更广泛内容的欧氏空间中被讨论，在此可以指出，前面讨论得出的结果可以不用任何修改而加以推广，但在度量空间中，有些结果还是需要小心的使用。接下来介绍的柯西序列的概念似乎很自然地提出这样的问题：这些序列是否收敛到一点？这将作为收敛和非收敛的例子出现。这种讨论产生了一个概念——度量空间的完整性，也就是数学中的完备性。这个重要的结论虽然没有给出证明，但是与被研究的例子是相同的。

间隔二等分在金融中的一个重要例子就是柯西序列。这个序列的解是由迭代产生的，但是关于价格问题的收敛性在下一章能够得到解决。为了更详细地了解这一过程，本章给出正式的连续函数的定义。

对数目无限的序列自身来说，收敛性是被广泛使用的，这个理论使得在第6章中的级数以及它们的收敛性完美地结合起来。提出的绝对收敛和条件收敛的概念，加之这些性质在级数运算中的应用，可以重新定义级数这个术语了。本章重新讨论了单和以及多重和的应用。

第6章介绍了一些关于收敛的最有用的内容。第3章中出现的 l_p—范数在这里被扩展到包含在 l_p—空间的序列和联合范数上，表明这些空间是完全范数空间或巴拿赫(Banach)空间，尽管对于每一个 p 来说，它们是截然不同的空间，但是它们的定义是一样的。特别关注当 $p=2$ 时的情形，此时这一空间就是完全内积空间，或希尔伯特(Hilbert)空间，这一空间的含义被研究得很清楚。本章接着介绍了幂级数，并且定义了收敛半径以及收敛区间，这是对上面收敛的扩展内容。最后，介绍了幂级数的乘积和商的内容。

金融的应用包括研究各种永久性优先股和普通股的价格模型中方程的收敛性，在价

格模型中,模型中的现金流被赋予不同的功能。除此之外,本书中的金融应用还研究各种投资者收益的需求。以线性形式增长的现金流给我们提供了一个双重求和的例子,这个结果被扩展为多重求和支付的方式。下一步该考虑用幂级数来逼近复杂的价格方程,而以 l_p—空间为特点的应用,这被用来介绍更广义的函数空间,就是另外一本内容更高深教材的任务了。

第 6 章中的一个重要应用工具是独立概率理论,这一主题的介绍在第 7 章中以样本空间和概率度量的介绍开始。之所以被称为离散,是因为该理论主要应用在有限样本点或无线可数样本点上。同时,也研究条件概率、随机独立以及 n 次试验样本空间结构,这些知识的学习给从样本空间中获取独立样本提供了理论的基础。本章接着介绍了组合数学,这被当作一个组织和计算一列从离散空间中抽出的事件的工具。

随机变量是理解样本空间的关键,样本空间的概率通过联合概率密度和分布函数,并利用好组合工具而度量。之后本章介绍了概率密度函数的矩以及其性质,以及 n 次试验的样本空间中的样本数据的矩。另外,一些最常见的离散概率密度函数、从任意密度函数里产生随机样本的方法在本章中也有提及。

在金融中,上述提到的方法的应用是多方面的,并以与债券或贷款组合以及那些各种形式的保险相关的损失模型为始端。在后者的情形中,推导出各种净保费的计算。资产分配提出了一个应用概率的方法,如在离散时间内应用二项式或二项式场景模型来考虑股票定价模型。二项点阵模型就是在复制期权的定义基础上,应用于离散时间中的期权定价。最后,通过基于抽样的定义在股票价格抽样的情景的概念来介绍基于情景下的期权定价。

以第 7 章为背景知识,第 8 章提出一系列基本概率理论,以在有限离散概率密度函数的情形下,简单证明矩产生函数和特征函数为起点。切比雪夫(Chebyshev)不等式,作为弱大数定律(weak law of large numbers)中的第一个定律,它的形式随着样本容量的增加不断发展。弱大数定律包含几个定律,它们的内容与在极限情况下一个随机变量的样本均值的分布相关。尽管弱大数定律只要求随机变量具有有限的均值,更为一般的情形是,变量的方差也是有限的,这一结论的证明只需在切比雪夫定律的基础上一步就可以完成。

强大数定律(strong law of large numbers)既要求均值和方差都有界,而且对关于样本均值的有限分布给出了更加有力的表述。强大数定律被称为柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)不等式,是建立在切比雪夫不等式的基础上。接着在讨论正态分布以及中心极限理论(central limit theorem, CLT)之后,研究了棣莫弗—拉普拉斯(De Moivre-Laplace)定理。中心极限定理是在特殊的矩生产函数形式的概率密度情形下被证明了,并讨论了一些一般化情形。

在金融应用中,切比雪夫不等式应用在具有高风险资产负债表的情形中,用于模拟和估算资产充足率或资金充足率。第 7 章中介绍预测现实世界中股票价格的二项点阵模型。这个模型研究当时间间隔趋于 0 时股票价格能达到的极限,并且确定了未来股票价格的概率密度函数。这个分析的理论基础是棣莫弗—拉普拉斯定理,它提供了针对欧式看跌或看涨期权的价格的布莱克—斯科尔斯—莫顿(Black-Scholes-Merton)公式的推导进

一步研究的基础。这一推导的一些细节需要第 9 章和第 10 章中介绍的工具,因此有关这些细节可以参见这两章的内容。基于情景的期权价格的概率性质在金融中的应用,这些知识在第 7 章中会有介绍。

单变量的函数微积分是第 9 章和第 10 章的主要内容。一般地,微积分作为研究各种类型的“平滑”的函数工具。按照传统的路线,微积分理论被分成两种理论:微分理论和积分理论。前者给接近光滑的函数提供了严格的分析框架,而后者则介绍了在连续概率理论中所需要的重要工具。

第 9 章是介绍微分的计算,首先介绍连续性的概念及其变化,同时说明连续函数的重要性质。有关平滑的基本概念给出了一种近似方法,就是用这种方法概括和形成了函数的导数的发展。微分的各种结论,可以通过泰勒级数正式应用于函数的导数上。有了这些与导数相关的重要结论,可以区分一个给定函数的临界点,总结凸性和凹性的特点以及推导出詹生(Jensen)不等式。导数不仅可以被用来近似求函数值,而且导数值可以近似地用相近函数值来表示,而且其误差能够量化。在函数序列的收敛的条件下,可以得出序列的连续性和可微性的结果,如同分析函数和幂级数之间的关系。

金融中的应用包括价格函数的连续性以及早间隔二分法中的应用。同时讨论了目标函数的连续性和有约束条件的函数,还讨论了连续性对约束下最优化问题的可解性的影响。推导出最小风险下的投资组合分配方式是临界点分析的一个应用。持久的凸的固定收益投资在下面的章节中研究,并且,在各种集合下,将泰勒级数应用到近似价格函数以及资产负债管理问题中。

除了固定收益,对敏感性测度的更普遍的方法是“指标”概念。有了这些指标就很容易把它们应用到泰勒级数的方法中。效用理论以及它们在风险偏好中的应用,主要是研究凸凹函数和詹生不等式的应用,进一步应用到最优投资组合分配的内容中。最后,本章给出了在风险中立概率下的股票价格的极限分布的相关细节,至于特殊风险规避概率,则需要布莱克—斯科尔斯—莫顿期权价格公式的推导,这个公式的延伸和正式的推导则在第 8 章中给出。风险规避模型作为一个数学利器使得最后推导过程变得容易,这个模型也将在第 8 章中给出介绍,但是很明显,最终的结果只取决于风险中立模型。

第 10 章中微积分的整合中研究了黎曼积分的概念,一开始,黎曼积分就定义在一个闭的有界区间中的连续函数上,在那里,黎曼积分被视为函数图象与坐标轴 x 轴之间的被“标记”区域内。从弱化连续性这一假设到除了“一组测度为 0 的点集”之外,积分是有界和连续,再扩展到整个定义区间可以是无界的,最后甚至是函数也是无界的,通过这样不断弱化条件,得出了一系列推广的结论。这些积分性质的形成,以及研究积分和微分之间关系,形成了微积分理论的两种形式。

精确估值的标准方法和数值计算方法用来对给定积分进行估算。在泰勒级数中,定义的积分似乎是对其余项的一个有效的替代表示,并且提供了一个有力的工具来判断一个无穷级数的收敛性,以及估算无穷级数的和,或者如果该无穷级数不收敛,估算其发散度是多少。第 10 章还讨论了一个积分序列的收敛性。尽管黎曼积分的作用很大,但也有其自身局限,这一点也会在书中被探讨。

在使用第 10 章中的工具,“开发”连续概率理论时,该理论涵盖了更一般的概率空间

以及σ代数域。连续分布的随机变量和它们的矩被介绍,一个表现为离散化的可行的结果就是一个随机变量,它连接着离散和连续矩这些结果。第10章介绍了一些连续分布的例子并研究了它们的性质。

在第10章的金融应用中,包括具有连续利率的连续现金流的现值和累计值,这里的连续利率是针对债券收益率,即期和远期利率而言的术语,以及连续的股本股息和对股票的再追加。本章还介绍了另外一种方法,该方法把持久的凸的固定收益投资值应用到逼近价格函数。数值积分方法通过在正态分布的应用中被举例说明。

最后,第8章中的一般二项分布的价格结果,以此结果为基础推广形成欧氏期权的布莱克-斯科尔斯-莫顿价格公式,该公式使用二项分布的"连续化"性质,并推演出这种"连续化"使得二项分布近似等价于第9章中的正态分布。至于其他的应用,黎曼-斯蒂尔杰斯积分,则在本章后面的练习中介绍。在离散和连续概率理论的计算中,似乎有一种数学纽带存在,这种纽带可以概括为所谓的混合概率密度。

致　谢

我很庆幸能师从于并共事于很多数学和金融领域的专家。我的论文顾问和指导者Alberto P.Calderón(1920—1998)教授,对我的数学学习影响深远,直至今日,我还从他的著作与通信中的优美明晰的数学证明中获益。此外,还感谢所有我曾研读过的书籍和论文,里面完美的证明影响着本书中很多的证明。

我还要感谢很多朋友和专业人士对本书的支持以及提出的建议。尤其是以下学者(以姓氏字母顺序):Zvi Bodie、Laurence D. Booth、F. Trenery Dolbear、Jr.,Frank J.Fabozzi、George J.Hall、John C.Hull、Blake LeBaron、Andrew Lyasoff、Bruce R.Magid、Catherine L.Mann,以及 Rachel McCulloch。同时还有如下金融从业者:Foster L. Aborn、Charles L.Gilbert、C.Dec Mullarkey、K.Ravi Ravindran 和 Andrew D.Smith;出版专业人士:Jane MacDonald 和 Tina Samaha;以及麻省理工出版社的编辑 Dana Andrus。

感谢 Brandeis 国际商学院的学生,是他们给了本书最初的反馈和仔细校对,他们是:Amidou Guindo、Zhenbin Luo、Manjola Tase、Ly Tran 和 Erick Barongo Vedasto。尽管他们都尽了最大的努力,但难免仍有疏漏,将由我负责本书出现的任何错误。

最后,我要感谢我的父母,Dorothy 和 Domenic,他们终其一生都在给我支持与建议。在此,为准备本书出版的有点漫长而连续不断的工作过程中,很感谢我的妻子 Lisa 对我的支持和鼓励,她为本书的编辑工作付出了心血,感谢我的儿子们 Michael、David 以及 Jeffrey。

欢迎阅读本书的读者提出意见,我的邮箱是 rreitano@brandeis.edu。

罗伯特・R.雷伊塔诺
布兰迪斯大学国际商学院

目 录