New Outlook on Geometry

几何新展

桂祖华 著

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

几何新展

New Outlook on Geometry

桂祖华 著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书属初等几何范畴，探索了倍角、组合角与互组合角等类型的三角形，并以矢量为工具对三角形的内在固有性质进行了深入研究。引入 $n(=3, 4)$维角，将三角形的许多性质移植与推广到 $n(=3, 4)$维空间，得到具有实际应用价值的理论，方法独到，思想新颖，结果新奇和有趣。

本书可供数学爱好者以及有志于研究数学的大中学生，研究生，教师及科研工作者学习或参考。

图书在版编目(CIP)数据

几何新展／桂祖华著．—上海：上海交通大学出版社，2015
ISBN 978-7-313-12167-7

Ⅰ．①几…　Ⅱ．①桂…　Ⅲ．①三角形—几何学—研究
Ⅳ．①O123.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 236256 号

几何新展

著　　者：桂祖华
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：常熟市梅李印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：18.75
字　　数：312 千字
版　　次：2015 年 4 月第 1 版　　印　　次：2015 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-12167-7/O
定　　价：58.00 元

前　　言

本书是作者继《微积分新探》(New Exploration on Calculus)(上海交通大学出版基金资助，上海交通大学出版社出版，2004)、《矢量新说》(A New View on Vectors)(上海交通大学学术出版基金资助，上海交通大学出版社出版，2009)之后，《数学新论》(New Research on Mathematics)系列著作之三。

本书汇集了作者多年来对初等几何的研究报告，它同样是一本有趣和值得深入探讨的学术著作。在阅读本书之前，首先提出如下一些问题：

问题 1

众所周知平面几何学中有三类特殊三角形：等腰三角形、正三角形和直角三角形。它们的内角分别与其对应的三条边有内蕴关系。

我们的问题：除了上述三类特殊的三角形，是否存在其他类型三角形，它们的角与边也具有那样的内蕴关系？

问题 2

(1) $n(\geqslant 2)$ 个空间三角形 $A_iB_iC_i(i=2,\cdots,n)$ 之间是否存在几何内蕴关系？

(2) $n(\geqslant 2)$ 个空间四面体 $A_iB_iC_iD_i(i=2,\cdots,n)$ 之间是否存在几何内蕴关系？

问题 3

(1) 平面上相交于 O 点的两条射线 $L_i: OR_i(i=1,2)$ 所夹区域称为**平面角**(常规称为**角**)，记作 $\theta=(L_1,L_2)=\angle R_1OR_2$(见图 1)。

(2) 空间中相交于 D 点的不在一平面上的三条射线 DA，DB 与 DC，其相邻两条射线组成的三平面所围三维区域称为**三面三维角**，记作 $\boldsymbol{\delta}\equiv D(ABC)\equiv D(DA,DB,DC)$(见图 2)。

引入这样的特殊三维角新概念究竟会给研究四面体的几何内在性质带来什么新的结果呢？

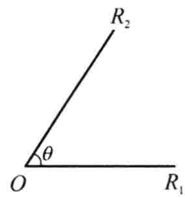

图 1

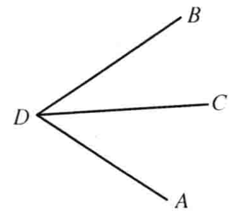

图 2

问题 4

(1) 如何用公式计算平面上的多边形的面积?

(2) 空间多边形的面积是怎么回事? 它有面积吗?

(3) 如何用公式计算空间多面体的表面积?

(4) 如何用公式计算空间多面体的体积?

问题 5 如何将平面几何的**勾股**、**海因**、**棣美弗**、**德扎克**等诸多著名定理与公式推广到三维与四维空间几何中去?

问题 6 如何用几何方法解合理配比问题?

问题 7 如何用几何方法解线性规划问题?

问题 8 对称图形区域和边界有何相关性?

本书内容都是首次发表,旨在抛砖引玉,使读者在学习与教学,数学研究与实践工作中,能开拓思路,活跃思维,提高创新能力。本书得出了不少新的结果,提出了许多新概念,书中若存在不足,甚至于错误,恳请读者批评与指正。

上海交通大学胡毓达教授,复旦大学陈天平教授为本书进行审阅,作者对两位教授提出的宝贵意见和热情推荐表示衷心感谢。

作者爱子桂宗栋先生在本书的著写过程中提出了许多有益的见解,尤其是在三维角方面,他将这一全新的几何概念运用到物理领域中并推出静力球理论。

本书的出版寄托了作者对爱女桂蕾的怀念。

作者桂祖华写于

美国弗吉尼亚

2013 年 4 月

目　　录

第 1 章　三角形 …… 1
1.1　问题提出 …… 1
1.1.1　三角形的基本知识 …… 1
1.1.2　问题提出 …… 9
1.2　倍角三角形 …… 10
1.2.1　倍角三角形 …… 10
1.2.2　有理倍角三角形 …… 13
1.2.3　两个同倍角三角形的相似与全等 …… 14
1.3　组合角三角形 …… 18
1.3.1　组合角三角形 …… 18
1.3.2　两个相同组合角三角形的相似与全等 …… 23
1.3.3　列式 …… 26
1.3.4　另证定理 19～定理 21 与例 13 …… 28
1.3.5　$\triangle_{(p,\,-q)}ABC(1>q)$ …… 30
1.3.6　$F_p(a,\,b,\,c)$的另一种计算法 …… 31
1.3.7　再谈组合角三角形 …… 33
1.4　其他类型三角形 …… 34
1.4.1　互组合角三角形 …… 34
1.4.2　其他类型三角形 …… 38
1.5　矢量知识 …… 41
1.5.1　矢量简介 …… 41
1.5.2　矢量的四个积 …… 41
1.5.3　重要结果 …… 42
1.5.4　几何元素的矢量表示及其相关性 …… 42
1.6　三角形的内在性质 …… 45

1.6.1 三角形的信息 …… 45
1.6.2 三角形的面积 …… 49
1.6.3 三角形的心 …… 50
1.6.4 三角形心的面积 …… 68
1.6.5 三角形与直线,平面的相关性 …… 80
1.7 多个三角形的相关性 …… 82
1.7.1 两个三角形的相关性 …… 82
1.7.2 多个三角形的相关性 …… 89
1.8 直线与三角形的二重矢量表示 …… 92
1.8.1 二重矢量简介 …… 92
1.8.2 直线与三角形的二重矢量表示 …… 94

第 2 章 多边形 …… 100
2.1 平面四边形 …… 100
2.2 多边形 …… 102
2.2.1 平面多边形的面积 …… 102
2.2.2 空间多边形的面积 …… 114

第 3 章 三维角 …… 120
3.1 角与两面角 …… 120
3.1.1 定义 …… 120
3.1.2 分角尺 …… 120
3.2 三维角 …… 121
3.2.1 三维角 …… 121
3.2.2 三面三维角的第一尺度 …… 125
3.3 三面三维角的相等与重合 …… 129
3.4 正弦三面三维角 …… 130
3.5 定理 …… 132
3.6 正弦三面三维角的表示 …… 133
3.7 $\varphi(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$的性质 …… 140
3.8 共轭三面三维角 …… 141

3.9 正则三面三维角(三面三维角的第二类尺度) …… 142

第 4 章　多面体 …… 144
4.1 四面体 …… 144
4.1.1 四面体的分类 …… 144
4.1.2 四面体的性质 …… 145
4.1.3 直角四面体 …… 149
4.1.4 双直角面四面体 …… 153
4.1.5 单直角面四面体 …… 155
4.1.6 特殊四面体 …… 161
4.1.7 四面体的体积 …… 162
4.1.8 拟正四面体 …… 173
4.1.9 例题 …… 176
4.1.10 四面体的内切(外接)球面内(外)心 …… 185
4.1.11 四面体与直线及平面的相关性 …… 213
4.1.12 两个四面体的相关性 …… 214
4.1.13 多个四面体的相关性 …… 217
4.2 多面体 …… 220
4.2.1 多面体的面体积 …… 220
4.2.2 多面体的体积 …… 221
4.2.3 多面体的内面法矢 …… 226

第 5 章　应用,推广与猜想 …… 232
5.1 合理配比问题的几何解 …… 232
5.1.1 例题 …… 232
5.1.2 分析 …… 232
5.1.3 定理 …… 234
5.1.4 例题的解 …… 238
5.2 一类线性规划问题的几何解 …… 240
5.2.1 模型 …… 240
5.2.2 定义 …… 240

5.2.3 引理 …… 243
5.2.4 定理 …… 245
5.3 矢量的拟代数和 …… 251
5.4 棣美弗公式的两种推广 …… 254
5.4.1 超复数 …… 254
5.4.2 平面矢量的新积 …… 256
5.5 对称图形区域和边界的相关性 …… 258
5.5.1 例题 …… 258
5.5.2 牛顿二项式的有趣性质 …… 259
5.5.3 圆率与球率 …… 260
5.6 椭球表面积界限的猜测 …… 261
5.6.1 问题提出 …… 261
5.6.2 思路 …… 261
5.6.3 例题 …… 264

第6章 四维矢量与四维角 …… 266
6.1 四维矢量 …… 266
6.1.1 概念 …… 266
6.1.2 四维矢量的积 …… 266
6.1.3 轮换四维矢量 …… 268
6.1.4 定理 …… 270
6.1.5 公式 …… 270
6.1.6 矢量的牛顿二项式 …… 278
6.1.7 几何应用 …… 278
6.1.8 平面方程 …… 281
6.1.9 点与超平面 …… 281
6.2 四维角 …… 282
6.3 定理 …… 283
6.4 对照表 …… 284

作者主要著作与论文 …… 289

第1章　三　角　形

1.1　问题提出

1.1.1　三角形的基本知识

设在三角形 ABC[记作 $\triangle ABC$ 或 $\triangle(a, b, c)$ 或 $\triangle ABC(\alpha, \beta, \gamma; a, b, c)$]中,三个角记为 α, β 与 γ,其对应的三条边 BC, CA 与 AB 的长度分别为 a, b 与 c。$\triangle_s ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面积。$\triangle ABC$ 中 α, β 与 γ 均小于(或其中有一个大于或等于)$\pi/2$ 称为**锐角**(或**钝角**或**直角**)$\triangle ABC$(见图 1-1)。

在平面几何学有下面的已知定理:

定理 1

在 $\triangle ABC$ 中,$\alpha = \gamma$ 的充分必要条件是 $a = c$,这类三角形称为**等腰三角形**。

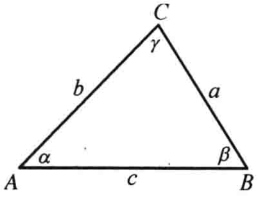

图 1-1

定理 2

在 $\triangle ABC$ 中,$\alpha = \beta = \gamma$ 的充分必要条件是 $a = b = c$, 这类三角形称为**正三角形**。

定理 3(勾股定理)

在 $\triangle ABC$ 中,$\alpha + \beta = \gamma$ 的充分必要条件是 $a^2 + b^2 = c^2$,这类三角形称为**直角三角形**。

定理 4

(1) 三角形的三个内角之和等于 π(即 $180°$);

(2) 三角形的外角等于两个内对角之和;

(3) 三角形的大角对大边,小角对小边,等角对等边,反之亦然;

(4) 三角形的两边之和大于第三边,两边之差小于第三边;

(5) CD 是$\triangle ABC$ 的$\angle C$ 的角平分线段(或 $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$,其中 $\angle ACD = \gamma_1$, $\angle DCB = \gamma_2$)的充分必要条件是满足下面条件之一:

① $a:b=DB:AD$（D 称为线比内点）；

② CD 上任意点 P 到两边 CA，CB 的距离 PB'，PA' 相等（见图 1-2）；

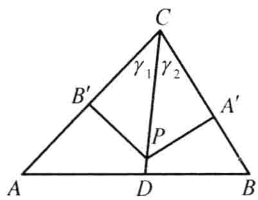

图 1-2

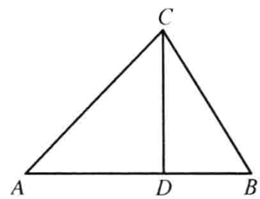

图 1-3

(6) 设 CD 是 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高，$\gamma=\pi/2$，则满足下列三个条件：

$a^2=c\cdot DB$，$b^2=c\cdot AD$，$CD^2=AD\cdot DB$（见图 1-3）。反之，在 $\triangle ABC$ 中，$\gamma=\pi/2$，CD 是 AB 上的高（利用 $b^2/a^2=AD/DB=CD^2/DB^2$，$b/a=CD/DB=AD/CD$，$\triangle CAD\sim\triangle BCD$，$\angle BDC=\angle ACB=\gamma=\pi/2$）；

(7) 圆内接三角形的大圆弧对大弦，小圆弧对小弦，等圆弧对等弦，反之亦然；

(8) 同一圆中的圆周角是与其所对应等圆弧的圆心角的一半；

(9) 同一圆中的圆周角等于与其所对应等圆弧的弦切角；

(10) 同一圆中的等弦对应的圆周角相等，反之亦然；

(11) 平面上动点到两固定点距离之和为常数的轨迹是椭圆；

(12) 平面上动点到两固定点距离之差的绝对值为常数的轨迹是双曲线。

定理 5

设有 $\triangle ABC$，则

(1) $\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma=a:b:c$（**正弦定理**）；

(2) $\cos\alpha=(b^2+c^2-a^2)/2bc$，$\cos\beta=(c^2+a^2-b^2)/2ca$，$\cos\gamma=(a^2+b^2-c^2)/2ab$（**余弦定理**）；

(3) $\triangle_s ABC=bc\sin\alpha/2=ca\sin\beta/2=ab\sin\gamma/2$；

(4) $\triangle_s ABC=[l(l-a)(l-b)(l-c)]^{1/2}=\{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]\}^{1/2}/4=[2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4]^{1/2}/4$，$[l=(a+b+c)/2]$（**海因公式**）；

(5) 记 m_u, h_u 与 $d_u(u=a, b, c)$ 分别为 $\triangle ABC$ 的三条边上的中线、高与角平分线，则

$m_a=(2b^2+2c^2-a^2)^{1/2}/2$, $m_b=(2c^2+2a^2-b^2)^{1/2}/2$, $m_c=(2a^2+2b^2-c^2)^{1/2}/2$，反之，$a=2(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2)^{1/2}/3$, $b=2(2m_c^2+2m_a^2-m_b^2)^{1/2}/3$, $c=2(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2)^{1/2}/3$；

(6) $h_a=T/2a$, $h_b=T/2b$, $h_c=T/2c$，其中 $T=[2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4]^{1/2}$；

(7) $d_a=[bc(a+b+c)(b+c-a)]^{1/2}/(b+c)$, $d_b=[ca(a+b+c)(c+a-b)]^{1/2}/(c+a)$, $d_c=[ab(a+b+c)(a+b-c)]^{1/2}/(a+b)$。

证 仅证

(5) 利用 $\cos\gamma=(a^2+b^2-c^2)/2ab=[a^2+(b/2)^2-m_b^2]/ab$ 得 $m_b=(2c^2+2a^2-b^2)^{1/2}/2$；

(6) $h_b=a\sin\gamma=a(1-\cos^2\gamma)^{1/2}=T/2b$ 利用(2)；

(7) 利用定理4(5) $a:b=DB:AD$, $DB=c_1$, $AD=c_2$（见图1-3），得 $c_1=c-c_2$, $c_1=ac/(a+b)$, $(a^2+c^2-b^2)/2ac=\cos\beta=(a^2+c_1^2-d_c^2)/2ac_1$（在 $\triangle ABC$、$\triangle DCB$ 中利用(2)），得 $d_c=[ab(a+b+c)(a+b-c)]^{1/2}/(a+b)$。

定理6(正弦和、余弦和与正切和定理)

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$；

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

(3) $\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$, $\tan\alpha=\sin\alpha/\cos\alpha$；

(4) $(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha$ [$\mathrm{i}=(-1)^{1/2}$ 虚数]（**棣美弗公式**）。

证 仅证(1) 令 $OA=1$, $\angle EOD=\alpha$, $\angle AOE=\beta$, AD 垂直于 OD, AC 垂直于 OC, EF 平行于 DB，

$\sin(\alpha+\beta)=AD=AE+ED=AF\cos\alpha+OE\sin\alpha=(AC+CF)\cos\alpha+(OC-EC)\sin\alpha=(\sin\beta+CF)\cos\alpha+(\cos\beta-EC)\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$。

因为 $CF\cos\alpha-EC\sin\alpha=0$, $CF=EF\sin\alpha$, $EC=EF\cos\alpha$（见图1-4）。

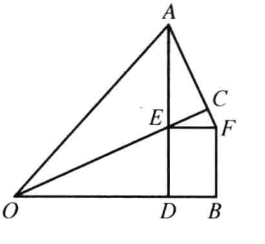

图1-4

下面约定 $\triangle A_jB_jC_j$ 即为 $\triangle(a_j, b_j, c_j)$。

定理 7

设两个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1,2)$,则 $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$(相似)的充分必要条件是满足下面条件之一:

(1) $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$(三边成比例);

(2) $a_1:b_1=a_2:b_2$, $\gamma_1=\gamma_2$(任意一角相等,两夹边成比例);

(3) $\alpha_1=\alpha_2$, $\beta_1=\beta_2$(任意两角相等);

(4) 三组对应边分别平行。

定理 7(1)

设有两个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1,2)$,则 $\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$(相似) 的充分必要条件是满足下面条件之一:

(1) $\alpha_1=\alpha_2$, $b_1^2:b_2^2=S_1:S_2[S_j\equiv\triangle_sA_jB_jC_j(j=1,2)]$

(2) $\alpha_1=\alpha_2$, $a_1^2:a_2^2=S_1:S_2$

(3) $\alpha_1=\alpha_2$, $a_1:a_2=l_1:l_2[l_j=(a_j+b_j+c_j)/2(j=1,2)]$

(4) $\alpha_1=\alpha_2$, $b_1:b_2=l_1:l_2$

(5) $S_1:S_2=a_1^2:a_2^2=l_1^2:l_2^2$

(6) $b_1+c_1:c_1+a_1:a_1+b_1=b_2+c_2:c_2+a_2:a_2+b_2$, …, $[b_1^n+c_1^n:c_1^n+a_1^n:a_1^n+b_1^n=b_2^n+c_2^n:c_2^n+a_2^n:a_2^n+b_2^n(n=1,2,\cdots)]$

(7) $\alpha_1=\alpha_2$, $S_1:S_2=l_1^2:l_2^2$

(8) $m_{1a}:m_{1b}:m_{1c}=m_{2a}:m_{2b}:m_{2c}$,其中 m_{iu} 为 $\triangle A_iB_iC_i(i=1,2;u=a,b,c)$ 对应边上的中线;

(9) $h_{1a}:h_{1b}:h_{1c}=h_{2a}:h_{2b}:h_{2c}$,其中 h_{iu} 为 $\triangle A_iB_iC_i(i=1,2;u=a,b,c)$ 对应边上的高。

证 必要性是显然的,下面仅证充分性:

(1) $b_1^2:b_2^2=S_1:S_2=b_1c_1\sin\alpha_1/2:b_2c_2\sin\alpha_2/2=b_1c_1:b_2c_2$[定理 5(3)]$\Rightarrow b_1:c_1=b_2:c_2\Rightarrow\triangle A_1B_1C_1\sim\triangle A_2B_2C_2$(定理 7);

(2) $a_1^2:a_2^2=S_1:S_2=b_1c_1\sin\alpha_1:b_2c_2\sin\alpha_2=b_1c_1:b_2c_2$[定理 5(3)];

$(b_1^2+c_1^2-a_1^2)/b_1c_1=2\cos\alpha_1=2\cos\alpha_2=(b_2^2+c_2^2-a_2^2)/b_2c_2$[定理 5(2)]$\Rightarrow(b_1^2+c_1^2-a_1^2)/(b_2^2+c_2^2-a_2^2)=b_1c_1/b_2c_2=a_1^2/a_2^2$, $(b_1^2+c_1^2)/(b_2^2+c_2^2)=a_1^2/a_2^2\Rightarrow(b_1^2+c_1^2)/b_1c_1=(b_2^2+c_2^2)/b_2c_2\Rightarrow(b_1^2+c_1^2)/b_1c_1\pm2=(b_2^2+c_2^2)/b_2c_2\pm2\Rightarrow[(b_1-

$c_1)/(b_1+c_1)]^2=[(b_2-c_2)/(b_2+c_2)]^2 \Rightarrow (b_1-c_1)/(b_1+c_1)=(b_2-c_2)/(b_2+c_2)$ 或 $(b_1-c_1)/(b_1+c_1)=-(b_2-c_2)/(b_2+c_2) \Rightarrow b_1/b_2=c_1/c_2$ 或 $b_1/c_1=c_2/b_2 \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ 或 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2C_2B_2$；

(3) 令 $l_1=\lambda l_2$，$a_1=\lambda a_2$，由 $\alpha_1=\alpha_2 \Rightarrow (b_1^2+c_1^2-a_1^2)/b_1c_1=2\cos\alpha_1=2\cos\alpha_2=(b_2^2+c_2^2-a_2^2)/b_2c_2$[定理5(2)]$\Rightarrow b_2c_2[b_1^2+c_1^2-a_1^2]=b_1c_1[b_2^2+c_2^2-a_2^2] \Rightarrow b_2c_2[(b_1+c_1)^2-2b_1c_1-a_1^2]=b_1c_1[(b_2+c_2)^2-2b_2c_2-a_2^2] \Rightarrow (\lambda^2b_2c_2-b_1c_1)[(b_2+c_2)^2-a_2^2]=0 \Rightarrow b_1c_1=\lambda^2b_2c_2$，利用 $(b_1+c_1)=\lambda(b_2+c_2) \Rightarrow (b_1-c_1)^2=\lambda^2(b_2-c_2)^2$、$(b_1-c_1)=\lambda(b_2-c_2)$ 或 $(b_1-c_1)=\lambda(c_2-b_2) \Rightarrow a_1=\lambda a_2$，$b_1=\lambda b_2$，$c_1=\lambda c_2$ 或 $a_1=\lambda a_2$，$b_1=\lambda c_2$，$c_1=\lambda b_2$；

(4) 令 $b_1=\lambda b_2, l_1=\lambda l_2 \Rightarrow a_1=\lambda(c_2+a_2)-c_1$，由(3)$\alpha_1=\alpha_2 \Rightarrow b_2c_2[(b_1+c_1)^2-a_1^2]=b_1c_1[(b_2+c_2)^2-a_2^2] \Rightarrow \lambda b_2c_2(b_1+c_1-a_1)=b_1c_1(b_2+c_2-a_2)=\lambda b_2c_1(b_2+c_2-a_2)$；

$c_2(b_1-a_1)=c_1(b_2-a_2)$，$b_2(c_1-\lambda c_2)=c_1a_2-c_2a_1=c_1a_2-c_2(\lambda c_2+\lambda a_2)-c_1 \Rightarrow (a_2+c_2-b_2)(c_1-\lambda c_2)=0 \Rightarrow c_1-\lambda c_2$ 或 $a_1=2l_1-b_1-c_1=\lambda(2l_2-b_2-c_2)=\lambda a_1$；

(5) 令 $a_1=\lambda a_2, l_1=\lambda l_2 \Rightarrow S_1=\lambda^2S_2$；

$\lambda l_2(\lambda l_2-\lambda a_2)(\lambda l_2-\lambda b_2)(\lambda l_2-\lambda c_2)=\lambda^4S_2^2=S_1^2=l_1(l_1-a_1)(l_1-b_1)(l_1-c_1) \Rightarrow (l_1-\lambda b_2)(l_1-\lambda c_2)=(l_1-b_1)(l_1-c_1) \Rightarrow$ 利用 $\lambda(b_2+c_2)=b_1+c_1 \Rightarrow \lambda^2b_2c_2=b_1c_1 \Rightarrow \lambda^2(b_2-c_2)^2=(b_1-c_1)^2 \Rightarrow \lambda(b_2-c_2)=b_1-c_1$，$\lambda(b_2-c_2)=c_1-b_1 \Rightarrow a_1=\lambda a_2$，$b_1=\lambda b_2$，$c_1=\lambda c_2$ 或 $a_1=\lambda a_2$，$b_1=c\lambda_2$，$c_1=\lambda b_2$；

(6) 令 $(b_1+c_1)/(b_2+c_2)=(c_1+a_1)/(c_2+a_2)=(a_1+b_1)/(a_2+b_2)=\lambda \Rightarrow (b_1+c_1)=\lambda(b_2+c_2)$，$(c_1+a_1)=\lambda(c_2+a_2) \Rightarrow (b_1-a_1)=\lambda(b_2-a_2)$，因 $(b_1+a_1)=\lambda(b_2+a_2) \Rightarrow b_1=\lambda b_2 \Rightarrow a_1=\lambda a_2$，$c_1=\lambda c_2$；

(7) $l_1=\lambda l_2, S_1=\lambda^2S_2$ 由 $\alpha_1=\alpha_2 \Rightarrow b_1c_1\sin\alpha_1=2S_1=2\lambda^2S_2=\lambda^2b_2c_2\sin\alpha_2 \Rightarrow b_1c_1=\lambda^2b_2c_2$；

由 $(b_1^2+c_1^2-a_1^2)/b_1c_1=2\cos\alpha_1=2\cos\alpha_2=(b_2^2+c_2^2-a_2^2)/b_2c_2 \Rightarrow (b_1+c_1)^2-2b_1c_1-a_1^2=\lambda^2[(b_2+c_2)^2-2b_2c_2-a_2^2] \Rightarrow (l_1-a_1)^2-2b_1c_1-a_1^2=\lambda^2[(l_2-a_2)^2-2b_2c_2-a_2^2] \Rightarrow l_1^2-2l_1a_1-2b_1c_1=\lambda^2(l_2^2-2l_2a_2-2b_2c_2) \Rightarrow a_1=\lambda a_2$，利用(3) 得证；

(8) 必要性　易证。

充分性　由定理 5(5) 可知，$m_{ia}=(2b_i^2+2c_i^2-a_i^2)^{1/2}/2$，$m_{ib}=(2c_i^2+2a_i^2-b_i^2)^{1/2}/2$，$m_{ic}=(2a_i^2+2b_i^2-c_i^2)^{1/2}/2(i=1,2)\Rightarrow a_i=2(2m_{ib}^2+2m_{ic}^2-m_{ia}^2)^{1/2}/3$，$b_i=2(2m_{ic}^2+2m_{ia}^2-m_{ib}^2)^{1/2}/3$，$c_i=2(2m_{ia}^2+2m_{ib}^2-m_{ic}^2)^{1/2}/3(i=1,2)$，设$m_{2u}=\lambda m_{1u}(u=a,b,c)\Rightarrow a_2=\lambda a_1$，$b_2=\lambda b_1$，$c_2=\lambda c_1$，得证；

(9) 必要性　易证。

充分性　由定理 5(6) 可知，$h_{ia}=T_i/2a_i$，$h_{ib}=T_i/2b_i$，$h_{ic}=T_i/2c_i$，其中 $T_i=[2a_i^2b_i^2+2b_i^2c_i^2+2c_i^2a_i^2-a_i^4-b_i^4-c_i^4]^{1/2}\Rightarrow a_i^2=T_i^2/4h_{ia}^2$，$b_i^2=T_i^2/4h_{ib}^2$，$c_i^2=T_i^2/4h_{ic}^2\Rightarrow 2a_i^2b_i^2=T_i^4/8h_{ia}^2h_{ib}^2$，$2b_i^2c_i^2=T_i^4/8h_{ib}^2h_{ic}^2$，$2c_i^2a_i^2=T_i^4/8h_{ic}^2h_{ia}^2$，$-a_i^4=-T_i^4/4h_{ia}^4$，$-b_i^4=-T_i^4/4h_{ib}^4$，$-c_i^4=-T_i^4/4h_{ic}^4$，此六式相加$\Rightarrow T_i^2=72[1/h_{ia}^2h_{ib}^2+1/h_{ib}^2h_{ic}^2+1/h_{ic}^2h_{ia}^2-1/2h_{ia}^2-1/2h_{ib}^4-1/2h_{ic}^2]^{1/2}$，设 $h_{2u}=\lambda h_{1u}(u=a,b,c)\Rightarrow \lambda^2T_2=T_1$，$u_1=T_1/2h_{1u}=\lambda^3T_2/2h_{2u}=\lambda^3u_2(u=a,b,c)$，得证。

定理 7$^{(2)}$

设两个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1,2)$。

(1) 若 $\triangle_sA_1B_1C_1=\triangle_sA_2B_2C_2$，$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2$，则 $1/a_1+1/b_1+1/c_1=1/a_2+1/b_2+1/c_2$；

(2) 若 $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2$，$1/a_1+1/b_1+1/c_1=1/a_2+1/b_2+1/c_2$，则 $\triangle_sA_1B_1C_1=\triangle_sA_2B_2C_2$。

证　(1) 设 $l_1(l_1-a_1)(l_1-b_1)(l_1-c_1)=\triangle_s^2A_1B_1C_1=\triangle_s^2A_2B_2C_2=l_2(l_2-a_2)(l_2-b_2)(l_2-c_2)$，由 $l_1=(a_1+b_1+c_1)/2=(a_2+b_2+c_2)/2=l_2$，则 $1=l_1/l_2=a_1b_1c_1(c_2a_2+b_2c_2+a_2b_2)/a_2b_2c_2(c_1a_1+b_1c_1+a_1b_1)$，$1/a_1+1/b_1+1/c_1=1/a_2+1/b_2+1/c_2$，得证；

(2) 易证。

定理 7$^{(3)}$

设三个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1,2,3)$，它们彼此相似的充分必要条件是$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3$。

证　必要性　三个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1,2,3)$ 彼此相似，由定理 7$\Rightarrow a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2=a_3:b_3:c_3$。设 $a_1:a_2=b_1:b_2=c_1:c_2=\lambda$；$a_2:a_3=b_2:b_3=c_2:c_3=\mu\Rightarrow a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3=\lambda\mu:\mu:1$。

充分性

设 $a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3=\lambda:\mu:\nu \Rightarrow a_1=p\lambda$，$a_2=p\mu$，$a_3=p\nu$；$b_1=q\lambda$，$b_2=q\mu$，$b_3=q\nu$；$c_1=r\lambda$，$c_2=r\mu$，$c_3=r\nu \Rightarrow a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2=a_3:b_3:c_3=p:q:r$，

由定理 7(1) $\Rightarrow \triangle A_jB_jC_j(j=1, 2, 3)$ 彼此相似。

定理 7[4]

设三个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2, 3)$，则它们彼此相似的充分必要条件是：

(1) $a_1:a_2=b_1:b_2$；$b_2:b_3=c_2:c_3$；$c_3:c_1=a_3:a_1$；

(2) $a_1b_2c_3=a_2b_3c_1=a_3b_1c_2$。

证 必要性 由 $\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2, 3)$ 彼此相似，由定理 7(1)，

$\Rightarrow a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3 \cdots (1)^*$

设 $a_1:a_2=b_1:b_2=\lambda$；$b_2:b_3=c_2:c_3=\mu$；$c_3:c_1=a_3:a_1=\nu \cdots (2)^*$

$\Rightarrow a_1:b_1:c_1=\lambda a_2:\lambda b_2:c_3/\nu=\lambda a_2:\lambda b_2:c_2/\mu\nu=a_2:b_2:c_2/\lambda\mu\nu \cdots (3)^*$

由 $(1)^*$，$(3)^* \Rightarrow \lambda\mu\nu=1$，$\cdots (4)^*$

由 $(2)^*$，$(4)^* \Rightarrow a_1b_2c_3=a_2b_3c_1=a_3b_1c_2 \Rightarrow (2)$。

充分性 由 $(1)^* \Rightarrow (2)^*$ 和 $(3)^*$；由 $(2)^* \Rightarrow (4)^* \Rightarrow (1)^*$。由定理 7(1) $\Rightarrow$ $\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2, 3)$ 彼此相似。

定理 7[5]

设有三个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2, 3)$，则它们彼此相似的充分必要条件是满足下面两个条件之一：

(1) $S_1:S_2:S_3=a_1^2:a_2^2:a_3^2=l_1^2:l_2^2:l_3^2$；

(2) ① $S_1:S_2=a_1^2:a_2^2$，$a_2^2:a_3^2=l_2^2:l_3^2$；

$l_3^2:l_1^2=S_3:S_1$；

② $S_1a_2^2l_3^2=S_2a_3^2l_1^2=S_3a_1^2l_2^2$ $[l_j=(a_j+b_j+c_j)/2(j=1, 2, 3)]$。

证明方法如同定理 7[1]，定理 7[3] 与定理 7[4]。

定理 8

设有两个 $\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2)$，则 $\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$（全等）的充分必要条件是满足下面条件之一：

(1) $a_1=a_2$，$b_1=b_2$，$c_1=c_2$（三边相等）；

(2) $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$(两边夹一角相等);

(3) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $c_1 = c_2$(两角夹一边相等);

(4) 两组边分别平行,第三组边平行且相等。

定理 8[1]

设两个$\triangle A_jB_jC_j(j=1, 2)$,则$\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$或$\triangle A_2C_2B_2$(相似)的充分必要条件是满足下面条件之一:

(1) $\alpha_1 = \alpha_2$, $b_1 = b_2$, $S_1 = S_2[S_j \equiv \triangle_s A_jB_jC_j(j=1, 2)]$;

(2) $\alpha_1 = \alpha_2$, $a_1 = a_2$, $S_1 = S_2$;

(3) $\alpha_1 = \alpha_2$, $a_1 = a_2$, $l_1 = l_2[l_j = (a_j + b_j + c_j)/2(j=1, 2)]$;

(4) $\alpha_1 = \alpha_2$, $a_1 = a_2$, $l_1 = l_2$;

(5) $S_1 = S_2$, $b_1 = b_2$, $l_1 = l_2$;

(6) $b_1 + c_1 = b_2 + c_2$, $c_1 + a_1 = c_2 + a_2$, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$;

(7) $\alpha_1 = \alpha_2$, $l_1 = l_2$, $S_1 = S_2$;

(8) $m_{1a} = m_{2a}$, $m_{1b} = m_{2b}$, $m_{1c} = m_{2c}$,其中m_{iu}为$\triangle A_iB_iC_i(i=1, 2; u=a, b, c)$对应边上的中线;

(9) $h_{1a} = h_{2a}$, $h_{1b} = h_{2b}$, $h_{1c} = h_{2c}$,其中h_{iu}为$\triangle A_iB_iC_i(i=1, 2; u=a, b, c)$对应边上的高;

(10) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $S_1 = S_2$;

(11) $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $l_1 = l_2$。

证　必要性是显然的,下面仅证充分性:

(1) $b_1c_1\sin\alpha_1 = 2S_1 = 2S_2 = b_2c_2\sin\alpha_2 \Rightarrow c_1 = c_2 \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$[定理 8(2)];

(2) **[几何解释]**作$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆C,由于$\angle A_1 = \alpha_1 = \angle A_2 = \alpha_2$, $a_1 = a_2 = B_1C_1$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$,过点A_1作平行于B_1C_1的直线,其相交于圆周C上仅一点A_2(其使$S_1 = S_2$)$\Rightarrow b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$或$b_1 = c_2$, $b_2 = c_1 \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle A_2B_2C_2$或$\triangle A_2C_2B_2$(全等)。

[代数解释]$b_1c_1\sin\alpha_1 = 2S_1 = 2S_2 = b_2c_2\sin\alpha_2 \Rightarrow b_1c_1 = b_2c_2$, $(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)/b_1c_1 = 2\cos\alpha_1 = 2\cos\alpha_2 = (b_2^2 + c_2^2 - a_2^2)/b_2c_2$[定理 5(2)]$\Rightarrow b_1^2 + c_1^2 = b_2^2 + c_2^2 \Rightarrow (b_1 + c_1)^2 = (b_2 + c_2)^2 \Rightarrow b_1 + c_1 = b_2 + c_2$或$b_1 + c_1 = -b_2 - c_2 \Rightarrow b_1 = b_2$, $c_1 =$