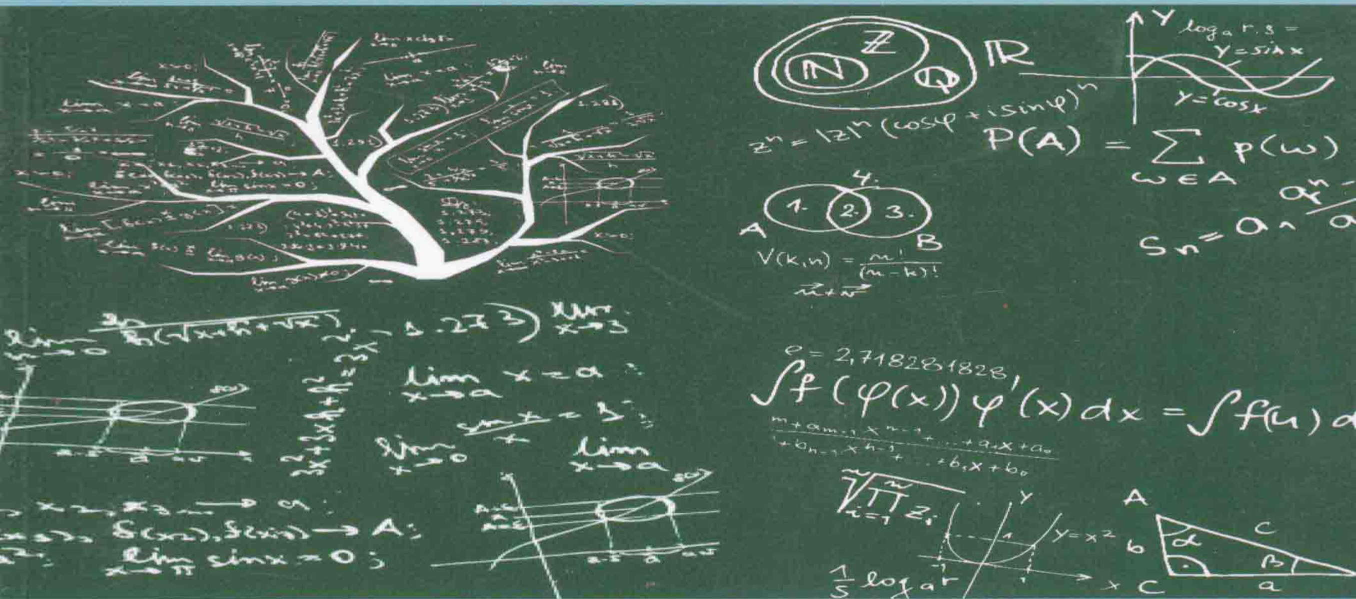
中南大学开放式精品示范课堂建设计划教材



高等数学·下册

◎主编 郑洲顺

◎ 编 任叶庆 秦宣云 张鸿雁

李小爱 李俊平 刘旺梅

中南大學出版社

www.csupress.com.cn

高等数学·下册

主编　郑洲顺

参编　任叶庆　秦宣云
　　　张鸿雁　李小爱
　　　李俊平　刘旺梅

中南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学·下册/郑洲顺主编.—长沙:中南大学出版社,2014.8
ISBN 978-7-5487-1153-7

Ⅰ.高...　Ⅱ.郑...　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 177659 号

高等数学·下册

郑洲顺　主编

□责任编辑　谢贵良
□责任印制　易建国
□出版发行　中南大学出版社
　　　　　社址:长沙市麓山南路　　　　邮编:410083
　　　　　发行科电话:0731-88876770　　传真:0731-88710482
□印　　装　长沙印通印刷有限公司

□开　　本　787×1092 1/16　□印张 20.75　□字数 529 千字
□版　　次　2014 年 8 月第 1 版　□2014 年 9 月第 1 次印刷
□书　　号　**ISBN 978-7-5487-1153-7**
□定　　价　**46.00 元**

前言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学。随着科学技术的发展，数学的科学地位、理论体系及应用范围都发生了巨大的变化。新兴的数学分支层出不穷，且相互交叉，相互渗透；大量新的数学方法正在有效地应用于社会、生活、科学的各个领域。数学不仅是一门科学，而且是一种文化；不仅是一种技术工具，而且是一种思维模式；不仅是一种知识，而且是一种素养。高等数学教育是高等学校人才培养的关键性环节，高等数学是培养学生科学素质与创新能力的根本载体。对高等学校学生而言，高等数学课程是一门非常重要的基础课，它内容丰富，理论严谨，应用广泛，影响深远，不仅为学习后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、综合应用能力、自主学习能力和创新意识等都具有非常重要的作用。

在中南大学首批“开放式精品示范课堂建设计划”的资助下，高等数学开放式精品示范课堂教学建设团队转变教育观念、转变教师的角色，将研究性教学与探索型学习有机地结合、改革传统的教学模式，针对高等学校高等数学课堂教学过程中存在的问题进行系统的研究，并进行了教学改革实践，形成了问题驱动，教师主导课堂教学过程、学生主演课堂教学活动，课程教学内容、教师、学生三条主线，导学设疑、知识理解研讨、方法探索训练、总结拓展四个环节的“问题驱动双主三线四环开放式”高等数学课堂教学模式。在课堂教学中，营造讨论式、探索性学习的课堂气氛，使学生从被动听课转变为主动参与课堂活动，激发学生的学习积极性；将课堂学习延伸到课外，培养学生自主研学能力。

本教材是为满足高等学校高等数学教学改革发展的要求，适应学生自主研学、自由探讨的开放式课堂教学模式的需要；编者秉持对于非数学专业学生数学教育教学过程应突出应用，把数学作为一门关键、普遍、可应用的技术来传授给学生的观点，树立“数学理论教学、数学方法拓展、数学素质培养”三位一体的教育理念，以教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为依据，以“必须够用”为原则确定内容和深度，同时广泛参考国内外大学同类数学教材，充分吸取我校多年来教学实践和教学改革成果编写而成。

为了让学生感受到高等数学的概念和理论来自于人们的生活实践，存在于实际生活之中，本教材每章都以相关实际问题导入相应的知识内容，将现代科学技术和工程领域中应用案例适当地融入教材中；在突出应用的同时拉近数学知识与学生的距离，体现数学的亲和力，充分调动学生的学习积极性。教材的陈述不仅仅是直述和推理，更多的是讲清楚问题的

来源、处理问题的思路和方法，让学生从教材的逻辑线索中了解数学知识的认知线索。在讲解经典内容的同时渗透现代数学的观点，适时介绍数学名家轶事，让学生在学习数学知识的同时，了解数学文化。教材采用多种方式，从不同角度通过对数学的思想性、方法性、应用性的展示，让学生在感悟、运用和发掘数学的概念、定理、证明、求解中所蕴涵的数学思想、数学方法和数学文化的过程中培养学生的数学素质。在教学的深度上由于配有相应的导学及解答、教学课件、较丰富的例题和习题，从而使教师和学生都有较大的选择余地，以满足不同层次的教学对象的要求。根据不同专业和不同层次对高等数学课程内容广度和深度的不同要求，教学过程中可在本教材中适当选取教学内容。

本教材分上下两册，上册内容包括：函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、无穷级数；下册内容包括：空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程。教材末附有初等数学常用公式、几种常用的曲线及其方程、积分表三个附录及习题参考答案。上册的函数与极限由郑洲顺、刘碧玉编写，一元函数微分学由秦宣云编写，一元函数积分学部分由任叶庆、张鸿雁编写，无穷级数由张鸿雁、任叶庆、李军英编写；下册的空间解析几何由李俊平、刘旺梅、任叶庆编写，多元函数微分学由秦宣云、郑洲顺、李军英编写，多元函数积分学由任叶庆、张鸿雁、李小爱、李军英编写，微分方程由李小爱、刘碧玉编写。李英、彭丽华、唐美兰、张美媛、陈明、张炜、杨文胜老师提供了部分教学案例、习题及解答。中南大学数学与统计学院硕士生邓娟、宋敏、韩日升和化学升华 1301 班的李少铜等参加了资料收集及本书初稿的校对工作。全书的统稿及多次的修改定稿由主编郑洲顺负责。刘碧玉教授负责全书的校对和审稿。中南大学化学升华 1301 班和物理升华 1301 班的全体同学在本书的试用中提出了很好的修改建议，以及数学与统计学院高等数学教学中心的全体教师对本书的编写与出版始终给予关注与支持，在此一并致以诚挚的谢意。特别感谢中南大学本科生院吴斌处长及相关领导对本书编写及出版工作的支持和指导，感谢中南大学开放式精品示范课堂建设计划的资助。

由于编者水平有限，教材中难免有不妥之处，恳请专家、同行及读者批评指正。

编 者

2014 年 7 月

目 录

第 5 章　空间解析几何

利用平面解析几何知识可以求平面上的直线方程，确定平面上两直线的位置关系，解决平面上的定位问题等. 但实际问题中，许多几何问题会涉及到空间几何形体，平面解析几何就无法解决了. 空间解析几何是建立在空间直角坐标系的基础上，用代数的方法来研究和解决空间几何问题，从而将几何问题的讨论从定性的研究引入到可以计算的定量层面，是平面解析几何的理论和方法在空间范围内的推广. 首先我们来看一个例子.

血管的三维重建问题(2001 年全国大学生数模竞赛 A 题)：生物体的外部结构具有繁杂多样性，可以通过肉眼观察，但若想了解生物体内部错综复杂结构，就需要借助一定的辅助工具，人们常利用的是分解和合成的方法. 其中分解就是将生物体做成切片，而切片就是用一组等距平行平面将生物体中需要研究的部位切成薄片，利用切片信息重建原生物体的三维形态. 这种方法在医学和其他领域中有着广泛的应用，如要将人体的组织、器官、血管等三维信息，包括内部错综复杂的结构，完整地存储在计算机中，以现代的技术也是有一定的难度，但若改用存储切片信息，使用时利用重建再现的方法，则现代技术是可以解决这类问题的.

假设某些血管可视为一类特殊的管道，该管道的表面是由球心沿着某一曲线(称为中轴线)的球滚动包络而成. 例如圆柱就是这样一种管道，其中轴线为直线，由半径固定的球滚动包络形成，关于圆柱及方程将在 5.5 节中讨论. 若有某管道的相继多张平行切片图象，记录了管道与切片的交线，如何利用交线信息重建管道空间结构的问题，可以通过 5.2 节建立空间直角坐标系、5.5 节曲面方程、5.6 节的空间曲线方程等知识来提供解决办法.

空间解析几何是法国哲学家、数学家、物理学家 Descartes(笛卡尔，1596—1650)于 17 世纪 30 年代创建的，1637 年他用法文完成了著名的《方法论》，该书后面有三个附录——折光学、气象学和几何学，解析几何的发明起源于《几何学》. Descartes 的《几何学》共分三卷：第一卷讨论尺规作图；第二卷是曲线的性质；第三卷是立体和“超立体”的作图，但它实际上是代数问题，是探讨方程的根的性质. 后来的数学史学家都把 Descartes 的《几何学》作为解析几何的起点. 从 Descartes 的《几何学》中可以看出，Descartes 的中心思想是建立起一种“普遍”的数学，把算术、代数和几何统一起来. 他设想，把任何数学问题化为一个代数问题，而把任何代数问题都归结到去解一个方程式. 因此，空间解析几何简单的来说就是空间几何问题的解析化方法，其基本思想就是“数”与“形”的结合，直观地说就是几何行为及其代数表示之间的相互转换.

Descartes 他作为一位哲学家和自然界的探索者，非常关心科学的用途，从哲学的思考中引申出他对科学所应用的数学这种存在形式的思考. 他的理论以两个观念为基础：坐标观念和利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线. 其功绩是把数学中两研究对象“数”与“形”统一起来，并在数学中引入“变量”，完成了数学史上一项划时代的变革. 正因为解析几何它提供了一般的几何的解析方法，才使得几何和数学向前大大地发展了一步，同时也使自然科学有了更好的哲学解释. 基于这种重要的历史意义，我们把几何

学的主要奠基人推誉为 Descartes 是一点也不为过的.

在解析几何学创立以前，几何与代数是彼此独立的两个分支. 解析几何的建立第一次真正实现了几何方法和代数方法的结合. 这是数学史上的一次重大突破，解析几何的建立对微积分的诞生和发展也有着不可估量的作用.

本章 5.1 节介绍向量及其线性运算，5.2 节介绍空间直角坐标系、向量的坐标表示，5.3 节是数量积、向量积、混合积，5.4 节是平面与空间直线，5.5 节是曲面及其方程，5.6 节是空间曲线及其方程.

5.1 向量及其线性运算

5.1.1 向量概念

引例

物体受到外力的作用在空间做曲线运动，物体的运动轨迹显然取决于其所受外力的大小和方向.

客观世界中有这样一类量，它们既有大小，又有方向，例如位移、速度、加速度、力、力矩等等，这些量在物理学中称之为矢量，在数学上又称之为向量，其定义如下：

定义 5.1.1 既有大小又有方向的量叫做向量(或矢量).

在几何上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$，如图 5.1.1 所示.

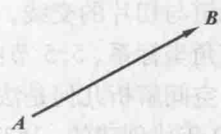


图 5.1.1 向量 $\overrightarrow{AB}$

有时也用一个黑体字母(书写时，在字母上面加箭头) $\boldsymbol{a}$ 来表示向量，例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等.

在实际问题中，有些向量与其起点有关(例如质点运动的速度与该质点的位置有关，一个力与该力的作用点的位置有关)，有些向量与其起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，因此在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**(以后简称向量)，即只考虑向量的大小和方向，而不论它的起点在什么地方. 当遇到与起点有关的向量时，可在一般原则下做特别处理.

由于我们只讨论自由向量，所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相同，则称其为**相等的向量**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，这就是说，经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做**向量的模**. 向量 $\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$. 模等于 1 的向量叫做**单位向量**. 模等于零的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合，它的方向可以看做是任意的.

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$，任取空间一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，规定不超过 π 的 $\angle AOB$(设

$\varphi=\angle AOB$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**(图 5.1.2)，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值.

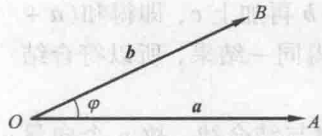


图 5.1.2　向量夹角

如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，就称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 如果$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，就称**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直**，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 由于零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值，因此可以认为零向量与任何向量都平行，也可以认为零向量与任何向量都垂直.

当两个平行向量的起点放在同一点时，它们的终点和公共起点应在一条直线上. 因此，两向量平行，又称两**向量共线**.

类似还有向量共面的概念. 设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量，当把它们的起点放在同一点时，如果 k 个终点和公共起点在一个平面上，就称这 k 个**向量共面**.

5.1.2　向量的线性运算

(1)向量的加减法

向量的加法运算规定如下：

> **定义 5.1.2**　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 点为起点，作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连接 AC(图 5.1.3)，那么向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即
> $$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\quad 或\quad \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

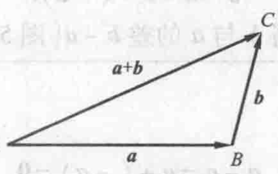


图 5.1.3　向量的和

上述作出两向量之和的方法叫做向量相加的三角形法则.

力学上有求合力的平行四边形法则，仿此，我们也有向量相加的平行四边形法则. 这就是：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，以 AB、AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$，连接对角线 AC(图 5.1.4)，显然向量$\overrightarrow{AC}$等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法符合下列运算规律：

①交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

②结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这是因为，按向量加法的规定(三角形法则)，从图 5.1.4 可见：

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$$

所以符合交换律.

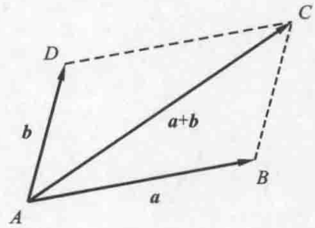


图 5.1.4 平行四边形法则

又如图 5.1.5 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$，如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得同一结果，所以符合结合律.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：从第一个向量开始，使前一向量的终点作为后一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求 n 个向量的和. 如图 5.1.6，有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5.$$

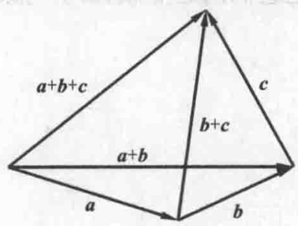


图 5.1.5 加法的结合律

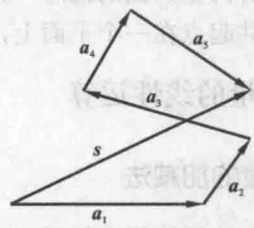


图 5.1.6 n 个向量相加

定义 5.1.3 设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$[图 5.1.7(a)].

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

显然，任给向量$\overrightarrow{AB}$及点 O，有

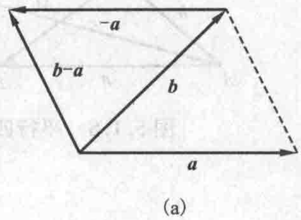
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}.$$

因此，若把 $\boldsymbol{a}$ 向量与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量$\overrightarrow{AB}$便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$[图 5.1.7($b$)].

由三角形两边之和大于第三边，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \quad 及 \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.



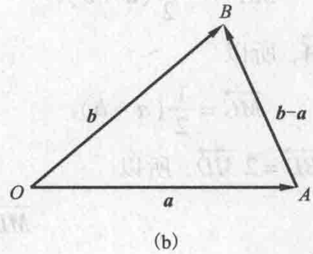


图 5.1.7　向量的差

(2)向量与数的乘法

> **定义 5.1.4**　向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模
> $$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$
> 它的方向规定为：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

向量与数的乘积符合下列运算规律：

①结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为由向量与数的乘积规定可知，向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$、$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$、$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量，它们的指向也是相同的，而且

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|,$$

所以

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$$

②分配律

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\tag{5.1.1}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\tag{5.1.2}$$

这个规律同样可以按向量与数的乘积的规定来证明，这里从略了.

向量的加减及数乘运算统称为向量的线性运算.

例 5.1.1　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$，这里 M 是平行四边形对角线的交点(图 5.1.8).

解　由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA},$$

于是 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$

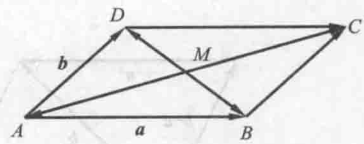


图 5.1.8 平行四边形

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MD}$，所以

$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以

$$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

前面已经讲过，模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么按照向量与数的乘积规定，由于$|\boldsymbol{a}|>0$，所以$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{e}_a$ 的方向相同，即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 的模是

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{e}_a|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|,$$

即$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同，因此，

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a.$$

我们规定，当 $\lambda\neq 0$ 时，$\dfrac{\boldsymbol{a}}{\lambda}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{a}$. 由此，上式又可写成

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a.$$

这表示一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，所以我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 5.1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}，即\ |\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0.$$

因$|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故$|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$. 定理证毕.

定理 5.1.1 是建立数轴的理论依据. 我们知道，给定一个点、一个方向及单位长度，就确定了一条数轴. 由于一个单位向量既确定了方向，又确定了单位长度，因此，给定一个点

及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox(图5.1.9)：

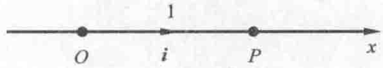


图5.1.9

对于轴上任一点 P，对应一个向量$\overrightarrow{OP}$，由于$\overrightarrow{OP}$平行于向量 $\boldsymbol{i}$，根据定理5.1.1，必有唯一的实数 x，使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫做轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值)，并知$\overrightarrow{OP}$与实数一一对应. 于是

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i} \leftrightarrow \text{实数 } x,$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}.$$

习题5.1

1. 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 应满足__________.
   要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 应满足__________.

2. 设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$. 试用 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示 $2\boldsymbol{u}-3\boldsymbol{v}$.

3. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量方法证明它是平行四边形.

4. 把 $\triangle ABC$ 的 BC 边五等分，设分点依次为 D_1、D_2、D_3、D_4，再把各分点与点 A 连接. 试以$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$、$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$ 表示向量$\overrightarrow{D_1A}$、$\overrightarrow{D_2A}$、$\overrightarrow{D_3A}$和$\overrightarrow{D_4A}$.

5. 设 $ABCDEF$ 是一个正六边形，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AF}$，试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$.

6. 已知平行四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 交于 E，又 O 是任意一点，试证$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OE}$.

5.2　空间直角坐标系、向量的坐标表示

5.2.1　空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系或[O; $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$]坐标系(图5.2.1).

通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线；它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以$\frac{\pi}{2}$角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图5.2.2所示.

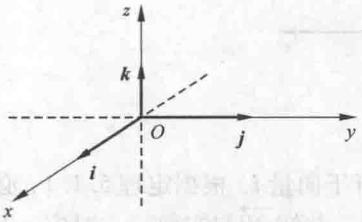


图 5.2.1　空间直角坐标系

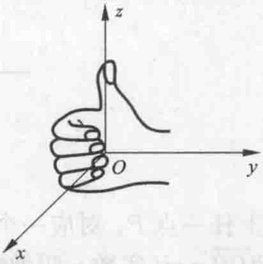


图 5.2.2　右手规则

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面．x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做 yOz 面及 zOx 面．三个坐标面把空间分成八个部分，每个部分叫做一个卦限．含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限，其他第二、第三、第四卦限，在 xOy 面的上方，按逆时针方向确定．第五至第八卦限，在 xOy 面的下方，由第一卦限之下的第五卦限，按逆时针方向确定，这八个卦限分别用字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 5.2.3)．

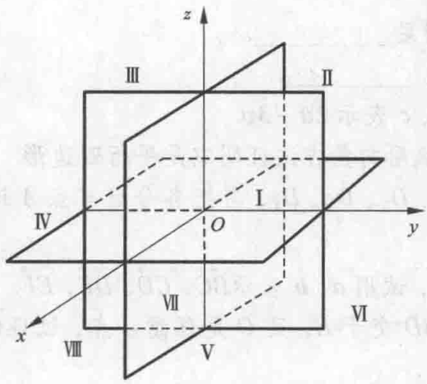


图 5.2.3　空间直角坐标系下的八个卦限

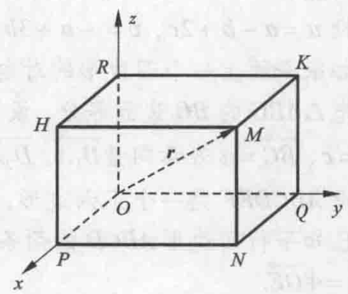


图 5.2.4　空间直角坐标系下的点

任给向量 $\boldsymbol{r}$，有对应点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$．以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RHMK-OPNQ$，如图 5.2.4 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

设

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\ \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为**向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量**．

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，进而确定了 x、y、z 三个有序实数；反之，给定三个有序实数 x、y、z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M．于是向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序