

# 单性力学基础

(修订本)

上册

重庆大学  
南京航空学院 合编

重庆大学承印

一九八三年八月

# 修 订 本 序

原重庆大学、南京航空学院合编的《弹性力学基础》自一九八〇年三月付印以来，先后曾有重庆大学、南京航空学院、合肥工业大学、哈尔滨船舶工程学院、华南工学院、成都科技大学、华东工程学院、太原重型机械学院、无锡轻工业学院、河北工学院和大庆石油学院等院校使用。为了提高这本教材的编写质量，在兄弟院校试用的基础上，于一九八一年八月在南京召开了一次部分高等学校的弹性力学教学经验座谈会，广泛地征求了对原教材编写质量的意见，我们就是在这基础上进行修订工作的。

这次修订中，除个别章节外，多数内容都重新作了调整和改写，在结构上将“柱体的扭转”和“柱体的弯曲”两章，合并成“柱体的扭转与弯曲”一章，另外增添了一章“弹性波的传播”。为便于教学，帮助学生加深和巩固所学的基本概念和基础理论，以及诱导学生比较顺利地各章后面附设的习题，在各章内容中，穿插了一定数量的例题。

在修订编写中，除参考国内外公开出版的有关教材外，我们还特别注意学习了近年来兄弟院校编写的内部交流讲义，如西安交通大学蒋泳秋编的《弹性力学》、天津大学材料力学教研室编的《弹性力学》和同济大学吴家龙编的《弹性力学》等、在他们编写的教材中所反映出来的丰富的教学经验，无疑对我们修订工作起了良好的影响，借此机会，向上述编者们表示谢意。

重庆大学付校长杨绪灿教授，对本教材的编写和修订工作给予了热忱的关怀和支持，并亲自编写了绪论。此外，参加修订编写工作的有重庆大学的乔惠芳、金建三；南京航空学院的邓宗彦、周仲甫；合肥工业大学的杨志清；哈尔滨船舶工程学院的李宗沅和成都科技大学的潘拍龄。其中金建三负责主修工作，最后由邓宗彦、金建三共同定稿。

在修订工作中，我们虽作了一定的努力，但限于水平，在修订本中仍会存在许多弊端和不足，恳切希望使用本教材的广大师生继续批评指正。

编 者

# 上册目录

## 第一章 绪论

- § 1—1 弹性力学的任务..... ( 1 )
- § 1—2 弹性力学的基本假设..... ( 2 )

## 第二章 应力分析

- § 2—1 外力和应力..... ( 5 )
- § 2—2 一点的应力状态..... ( 7 )
- § 2—3 应力分量的坐标变换式..... ( 10 )
- § 2—4 主应力与主方向..... ( 11 )
- § 2—5 最大和最小应力..... ( 17 )
- § 2—6 三向应力状态的莫尔圆..... ( 20 )
- § 2—7 平衡微分方程..... ( 23 )
- § 2—8 边界条件..... ( 25 )
- 习题..... ( 27 )

## 第三章 应变分析

- § 3—1 位移..... ( 31 )
- § 3—2 应变分量、转动分量..... ( 33 )
- § 3—3 刚性位移、纯变形和均匀变形..... ( 36 )
- § 3—4 一点附近的应变状态..... ( 39 )
- § 3—5 应变分量的坐标变换式..... ( 43 )
- § 3—6 主应变、体积应变..... ( 44 )
- § 3—7 应变协调方程..... ( 47 )
- \* § 3—8 有限变形..... ( 49 )
- 习题..... ( 54 )

## 第四章 应力与应变的关系

- § 4—1 弹性体变形过程的热力学观点..... ( 57 )
- § 4—2 广义虎克定律..... ( 61 )
- § 4—3 克拉比龙公式和卡氏公式..... ( 63 )
- § 4—4 各向同性体的虎克定律..... ( 64 )
- § 4—5 各向同性体的弹性常数间的关系..... ( 71 )
- 习题..... ( 73 )

## 第五章 弹性力学问题的求解

- § 5—1 弹性力学的基本方程和边界条件..... ( 75 )

* § 5—2	用位移法求解时的基本方程	( 77 )
§ 5—3	用应力法求解时的基本方程	( 78 )
§ 5—4	解的唯一性定理	( 82 )
§ 5—5	圣维南原理	( 86 )
§ 5—6	弹性力学问题的求解举例	( 88 )
	习题	(104)

### 第六章 柱体的扭转与弯曲

§ 6—1	任意等截面柱体的扭转, 扭转函数	(108)
§ 6—2	矩形截面柱体的扭转	(112)
§ 6—3	柱体扭转问题的应力函数	(118)
§ 6—4	薄膜比拟	(122)
§ 6—5	狭长矩形截面杆的扭转	(129)
§ 6—6	空心薄壁截面杆的扭转	(128)
§ 6—7	等截面悬梁弯曲时的应力	(131)
§ 6—8	圆截面悬梁弯曲时的应力	(135)
§ 6—9	随圆截面悬梁弯曲时的应力	(136)
§ 6—10	矩形截面悬梁弯曲时的应力	(138)
	习题	(143)

### 第七章 直角坐标解平面问题

§ 7—1	平面应变问题和平面应力问题	(147)
§ 7—2	用应力表示的变形协调方程	(152)
§ 7—3	应力函数	(153)
§ 7—4	用代数多项式解平面问题	(155)
§ 7—5	悬梁自由端受集中力时的弯曲	(161)
§ 7—6	简梁受均布力时的弯曲	(168)
* § 7—7	用三角级数解平面问题	(172)
	习题	(179)

### 第八章 极坐标解平面问题

§ 8—1	用极坐标表示的基本方程	(184)
§ 8—2	轴对称平面问题	(190)
§ 8—3	圆弧曲杆受纯弯曲	(194)
§ 8—4	厚壁圆筒受均匀压力	(198)
§ 8—5	薄平板中小圆孔引起的应力集中	(202)
§ 8—6	楔体顶端受集中力	(208)
§ 8—7	半无限平面边界上受法向力	(211)
§ 8—8	旋转圆盘	(214)
	习题	(218)

# 第一章 绪 论

## § 1—1 弹性力学的任务

弹性力学或弹性理论是固体力学的一个分支学科。它的任务是研究物体在力和温度等外部因素作用下产生弹性变形时的应力和应变分布规律。从而为工程结构物及其构件的强度、刚度、稳定性和可靠性的设计、分析提供理论基础。它是理论和实用性都很强的一门学科。

材料试验表明,弹性是绝大多数固体材料在一定变形程度内所固有的一种力学性质。弹性变形的基本特征是它的瞬时性和可逆性。所谓瞬时性,即变形与载荷是单值连续的对对应关系,且作用与响应是同时发生的;所谓可逆性,即当除去载荷时,对应的变形和物体内储存的能量都将完全消失,恢复物体原来的尺寸和形状。因而在加载和卸载这一循环中没有能量的耗损。这种弹性变形的特征,最易于为人们所感知的变形实例,就是各种形式的弹簧。故在讨论弹性力学物理模型时,人们常用一理想弹簧作为材料弹性的表征,图 1—1, a。

但是,材料的弹性是有限度的,而且一般只在很小的变形范围内才呈现。如果物体内的应力超过了某一临界值,当除去外作用后,变形便不会全部消失,而有永久变形或塑性变形发生,在加载和卸载的循环中有能量的耗损。这时,物体内的应力和应变分布规律将与弹性变形时的不同,研究这类规律是属于塑性力学或塑性理论的任务,它是固体力学的另一分支学科。

由于塑性变形只是当应力超过某一极限时才会发生,而且是不可逆的,故常用滑动下摩擦付作为纯塑性性质的理想模型,图 1—1, b。

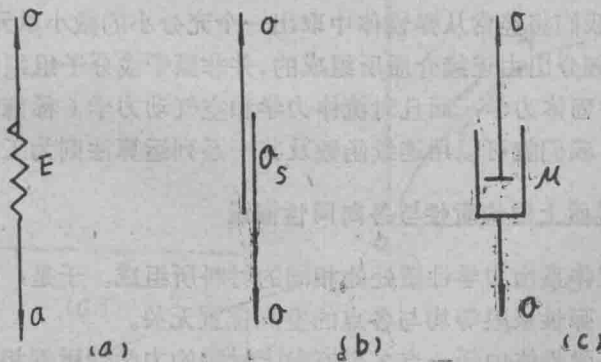


图 1—1

无论弹性或塑性变形,都与载荷的作用时间及其加载或卸载的速度无关,但对高分子聚合物或某些条件下的金属材料来说,变形则与时间有关,如弹性后效、应力松弛、蠕变等。在这类性质的变形中,应力与应变之间不再存在一一对应的关系。这种性质称为材料的粘性。粘性变形是应力的作用随着时间而引起的永久变形。在不可逆性方面与塑性变形有共同点,

但塑性变形与应力作用的时间无关,则是它们之间的不同点。在研究材料性质时,常用装有粘性流体的阻尼减振器的符号作为粘性特征的表征,图 1—1, c。

由上可见,弹性力学研究的范围是弹性变形,为此,我们可以把弹性力学考察的对象,理想化为完全弹性体或简称为弹性体。由于一切工程结构和机器,如船舶、飞机、桥梁、发动机等的构件在外作用下都将发生变形,而为了保证结构或机器的工作性能和寿命,这种变形一般必须很小且须在材料的弹性极限之内,特别对某些精密机械就更为严格。因此,弹性力学的理论、方法和一般结果在广泛的工程技术领域内都有重要实用意义。

## § 1—2 弹性力学的基本假设

为了建立弹性力学的理论模型,我们需要从尽可能广泛可靠的经验事实中,概括出决定固体材料弹性变形的本质因素、提出建立宏观变形基本规律所必须而又尽可能少的假设,使在此基础上建立起来的理论模型既充分精确地符合客观实际,又便于用数学方法进行有效的处理,这是提出基本假设的目的。

几乎和材料力学一样,弹性力学的基本假设,一般有下列几个方面。

### (一) 材料组织上的连续性假设

连续性指的是物体内的材料是密实无间的连续介质。这样,无论整个弹性体或其组成的任何微小单元体内部或其界面之间,也无无论在加载之前或变形之后,都是连续的。于是物体内的位移、应力和应变等物理量都是空间位置的连续函数。

实际上,在原子或分子水平的微观组织上,任何物质都不是连续的。这种微观离散性和宏观连续性假设之间的矛盾,只不过是在不同层次的范畴内表现出来的不同规律性的反映。在微观层次内,是微观机理起作用;在宏观层次则是统计平均规律起作用。两者不是不相容的。

在今后的讨论中,我们将经常从弹性体中取出一个充分小的微小单元体来观察。这种微小单元,应是在弹性体中划分出由连续介质所组成的,并非原子或分子组织意义上的微小单元。

连续性假设不但对固体力学,而且对流体力学和空气动力学(稀薄气体力学除外)也适用。在此假设基础上,我们就可以用连续函数及其一系列运算法则为工具来研究和处理。

### (二) 材料性质上的均质性与各向同性假设

均质性指的是弹性体由力学性质处处相同的材料所组成。于是,弹性体的力学性质,诸如质量、弹性模量、弹性极限等均与各点的空间位置无关。

各向同性指的是在弹性体内任一点各个方向上材料的力学性质都相同。即材料性质无取向上的差异,这种材料称为各向同性材料、它所构成的弹性体称为各向同性体。钢材、陶瓷,甚至混凝土等材料均可认为均质的和各向同性的。

各向同性假设,是对我们讨论涉及材料范围方面的限制。竹、木等纤维材料。现代复合材料以及高分子材料等、这些材料的宏观力学性质随方向而有明显的不同,由这些材料所构成的弹性体,称为各向异性体,本教材只局限于各向同性体。

### (三) 几何上的线性变形假设

工程结构及其构件从精度要求所能允许和从强度要求所能经受的变形确实是很小的。钢的单向拉伸试验表明，其弹性应变的量级为 $10^{-3}$ ，而工程实际所许可的应变多在 $10^{-2}$ 以下，它们都远小于1。因此，可对弹性体的位移和变形作如下的限制：

- (1) 弹性体各点位移均比其最小尺寸小；
- (2) 由于变形而在任一点所产生的位移，对其坐标的偏导数远小于1，其二次方或其乘积项，均为可略去不计的高阶小量。

在此前提下，弹性体内任一点处的应变和转角，均为位移偏导数的线性函数，故称作是几何线性的；否则，就称为几何非线性或有限变形问题。由于弹性体在线性变形下的位形与其未变形的位形相差甚微，以致在考虑整个弹性体或弹性体内任何微小单元体在变形状态的下平衡条件时，这种变形对外力方向和分布状况的影响可略去不计。而近似地用未变形时的位形来代替变形后的位形，使问题的处理大为简化。

### (四) 材料行为上的物理线性假设

应力与应变的关系或称本构关系，根据大量试验基础上提出的虎克定律，是线性的。图1—2，*a*示一单向拉伸试验曲线，曲线上*A*点为弹性极限，在*OA*段应力与应变的关系为 $\sigma = E\varepsilon$ ，其中*E*为反映材料弹性性质的常数、在弹性力学中，我们假设这种物理线性关系，不仅对单向应力状态，而且推广到三向应力状态也成立。

但须指出，另外有些材料，如橡胶之类，其单向拉伸曲线，如图1—2，*b*。在图示的*OA*段上是完全弹性的，但应力与应变之间的关系则为非线性的，可表达为 $\sigma = f(\varepsilon)$ ，其中*f*为非线性函数，故称为物理非线性关系，本教材只限于物理线性问题。

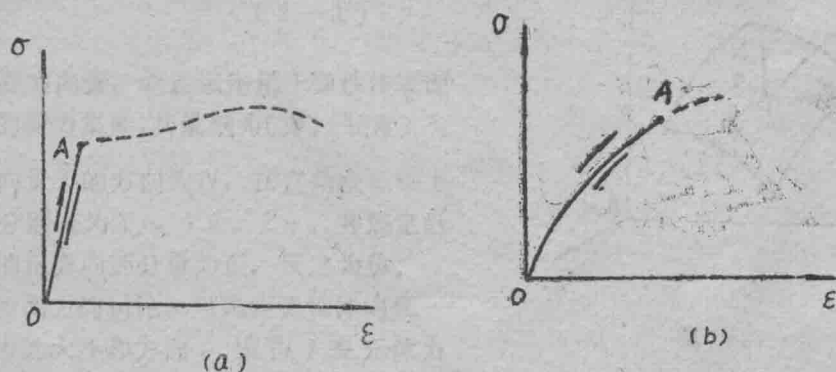


图 1—2

### (五) 初始无应力的自然状态假设

在讨论物体内的应力和应变时，假设在未受载之前，物体内的应力和应变均为零。这种零应力—应变状态，称为物体的自然状态。

事实上，由于冷轧、热处理、焊接等机加工或热加工过程的作用，材料或物体内部早在受载之前，就不可避免地有内应力存在，这种内应力的数值，有时可能达到或超过材料的屈

服极限。可是在弹性力学处理问题时，对此一般都不加考虑，因为初应力的计算，并非仅由弹性力学所能解决，还要有塑性力学和材料科学等多学科的综合运用，而且至今还有待于进一步的探索研究。因此，在建立弹性力学的理想模型时，自然状态假设是必要而合理的。

在以上假设基础上建立起来的弹性理论，称为**数学弹性理论**，或称**线性弹性理论**也称**经典弹性理论**，如除此之外，还进一步对变形或应力分布加上补充性的假设，如杆弯曲时的平截面假设，板、壳弯曲时的克希霍夫假设等，在充分符合工程要求的精度范围内，使问题得到进一步的简化和更便于处理，则称为**应用弹性力学**。

线弹性理论的基本原理的论证，分析和计算方法的研究，基本方程的求解，都须利用许多数学上的成就作为工具，使所得结果具有数学过程的可靠性，因此，在学科上可认为是属于数学物理的一部分。另一方面，由于物理模型是理想化了的，是实际情况的近似，尽管基本假数的提出是以大量经验（实验与实践）事实为基础，但数学分析的结果与实际符合程度究竟如何，须用实验的方法才能得出可靠的证明。所以，在数学弹性理论的发展过程中，实验应力分析的原理、方法和技术，得到了并行的发展，而且还能处理许多无法用解析法处理的复杂问题。近期来使用电子计算机的有限单元法，为弹性力学的数值计算开创了新的前景，使许多过去仅由模型或全尺寸试验才能获得数据的复杂问题，可以比较容易地得到尽可能精确的数值结果。

本教材看重论述弹性力学的理论、基本方法及典型问题的解，对有限单元法也作一定范围的介绍，但对实验应力分析方法则不再论述。





## 第二章 应力分析

弹性体在外力作用下，其内部要产生应力和应变，弹性体内的应力分布规律是弹性力学研究的主要内容之一。本章讨论应力的概念、特性及其基本关系，为求解具体问题，探求应力分布规律提供理论基础。

### § 2—1 外力和应力

作用于弹性体上的外力分为面力和体力两类。作用于弹性体表面上的力称为**面力**，如流体压力、机械传动力等。作用于弹性体内各部分的力称为**体力**，如重力、惯性力、电磁力等。

面力的分布一般是不均匀的，为了表明弹性体表面上任一点  $P$  处面力的大小和方向，可取包括该点在内的微面积元素  $\Delta A$  来讨论，图 2—1。设在  $\Delta A$  上有连续分布的面力  $\Delta \bar{T}$ ，则面力的平均集度为  $\Delta \bar{T} / \Delta A$ 。当  $\Delta A$  不断地向该点缩小， $\Delta \bar{T} / \Delta A$  及  $\Delta \bar{T}$  将不断地改变其大小和方向，当  $\Delta A$  无限地缩小且趋于该点时，则  $\Delta \bar{T} / \Delta A$  将趋于一极限  $\bar{T}$ ，即有

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{T}}{\Delta A} = \bar{T} \quad (2-1)$$

$\bar{T}$  称为**面力向量**，它表示作用于弹性体表面某点处的面力集度，其量纲为〔力〕〔长度〕<sup>-2</sup>。

设面力向量  $\bar{T}$  的方向为  $N$ ，在直角坐标轴上的分量分别表为  $X_N, Y_N, Z_N$ 。并规定沿坐标轴的正方向的分量为正，反之为负。

仿照面力的讨论，可确定弹性体内任一点处体力的大小和方向，设以  $\bar{f}$  表示**体力向量**，则有

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta V} = \bar{f} \quad (2-2)$$

其中， $\Delta V$  表示包括该点在内的微体积元素， $\Delta \bar{f}$  表示连续分布于  $\Delta V$  内的体力。体力向量的量纲为〔力〕〔长度〕<sup>-3</sup>。在直角坐标轴上的分量分别表示为  $f_x, f_y, f_z$ 。同样，规定沿坐标轴的正方向的分量为正，反之为负。

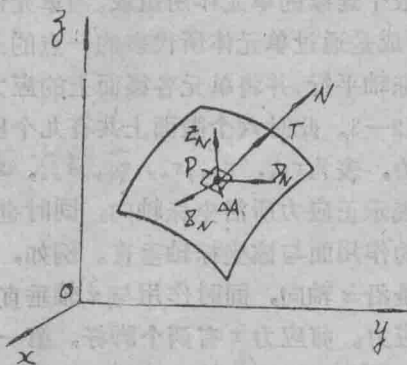


图 2—1

为定义在外力作用下处于平衡状态时弹性体内任一点 $M$ 处的应力，设想通过该点示一截面 $S$ 将弹性体分为 $A$ 、 $B$ 两部分，图2—2。现考虑任一部分 $B$ ，由 $A$ 部分对它的作用，就表现为此截面上连续分布的，但一般不是均匀的内力。我们取包括 $M$ 点在内的微面积元素 $\Delta A$ ，设 $\Delta A$ 上的内力为 $\Delta \bar{p}$ ，则平均量为 $\Delta \bar{p} / \Delta A$ ，其极限值

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta A} = \bar{p} \quad (2-3)$$

称为 $M$ 点的应力向量，也称该点的全应力。量纲为〔力〕〔长度〕<sup>-2</sup>。在直角坐标轴上的分量为 $p_x, p_y, p_z$ ，称为轴向应力分量。轴向应力分量和弹性体的变形及材料的强度没有直接的关系，有直接关系的是通过该点所在截面的法向和切向的应力分量。沿法向的应力分量称为正应力或法向应力，用符号 $\sigma$ 表示；沿切向的应力分量称为剪应力或切向应力，用符号 $\tau$ 表示，如图2—2所示。

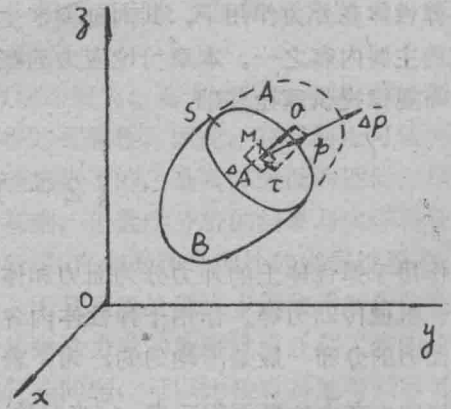


图 2—2

通过弹性体内任一点沿不同截面上的应力是不同的，为了描述一点处的应力状态，可围绕该点取一个微平行六面体，并称此为单元体。因假设弹性体为连续介质，于是，整个弹性体可认为由无数个连续的单元体所组成。当单元体的三个棱边趋于零时，作用于单元体各微面上的应力，可看成是通过单元体所代表的一点的三个互相垂直平面上的应力。如单元体的三个棱边与所选坐标轴平行，并将单元各微面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力，且分别平行于坐标轴，图2—3。此时六个微面上共有九个应力分量，其中，三个正应力，通常表为 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ；六个剪应力，表为 $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ，这些应力，统称为一点的应力分量。正应力 $\sigma$ 的脚标表示正应力所沿坐标轴向，同时也表示正应力的作用面与该坐标轴垂直。例如， $\sigma_x$ 所代表的是沿 $x$ 轴向，同时作用与 $x$ 轴垂直微面上的正应力。剪应力 $\tau$ 有两个脚标，第一个脚标表示剪应力所沿坐标轴向；第二个脚标表示剪应力的作用面与该坐标轴垂直。例如， $\tau_{yx}$ 所代表的是沿 $y$ 轴向，同时作用在与 $x$ 轴垂直微面上的剪应力，其正、负号规定是：如单元体微面外法线方向沿坐标轴的正向，则该微面上的应力规定为沿坐标轴正向为正，反向为负；反之，如微面外法线方向沿坐标轴的反向，则该微面上的应力规定为沿坐标轴反向为正，正向为负。在图2—3上的应力分量，按上述正、

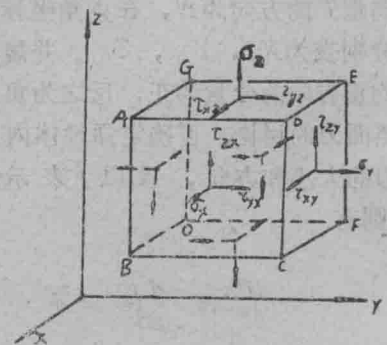


图 2—3

负号规定，均为正号。

当给定一点的应力分量时，下一节将要证明，可求得通过该点任意截面上的正应力和剪应力。于是，一点的应力分量完全决定了该点的应力状态。这样，一点的应力就可用它的九个分量来表示，是一个二阶张量。写成矩阵的形式，便有

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2-4)$$

$[\sigma]$ 称为一点的应力张量矩阵，简称应力矩阵。由剪应力互等（证明见 § 2-7）关系

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2-5)$$

可知，应力矩阵 $[\sigma]$ 将是一个三阶的对称方阵，九个应力分量中只有六个应力分量是独立的。将六个应力分量用列阵表示，有

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T \quad (2-6)$$

$\{\sigma\}$ 称为一点的应力张量列阵，简称应力列阵。

## § 2-2 一点的应力状态

设弹性体内任一点 $M$ 的应力矩阵 $[\sigma]$ 为已知，试确定通过 $M$ 点任一斜截面上的应力。设想过 $M$ 点取一微四面体 $MABC$ ，其斜微面 $ABC$ 平行于通过 $M$ 点的斜截面，三根棱边 $MA$ 、 $MB$ 、 $MC$ 分别平行于坐标轴，图 2-4。当斜微面 $ABC$ 无限趋近于 $M$ 点时，其上的应力就代表该斜截面上的应力。

设作用在微四面体斜微面 $ABC$ 上的应力向量为 $\bar{P}$ ，轴向应力分量为 $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$ ，作用在其它三个微面上的应力分量分别为： $\sigma_x$ 、 $\tau_{yx}$ 、 $\tau_{zx}$ ； $\tau_{xy}$ 、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{zy}$ ； $\tau_{xz}$ 、 $\tau_{yz}$ 、 $\sigma_z$ 。微四面体的体力分量为 $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$ （图中未标出）。斜微面 $ABC$ 的外法线方向为 $N$ ，它与坐标轴 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 夹角的余弦，

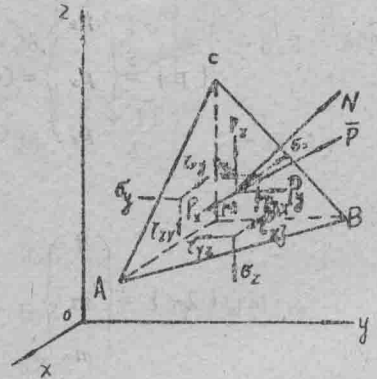


图 2-4

称为方向余弦，分别表为  $l, m, n$ ，即

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(N, x) \\ m &= \cos(N, y) \\ n &= \cos(N, z) \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

设斜微面  $ABC$  的面积为  $\Delta A$ ，微面  $BMC$ ， $CMA$ ， $AMB$  的面积分别为  $\Delta A_x$ ， $\Delta A_y$ ， $\Delta A_z$ ，它们与  $\Delta A$  之间的关系为

$$\Delta A_x = l\Delta A, \quad \Delta A_y = m\Delta A, \quad \Delta A_z = n\Delta A \quad (b)$$

又设斜微面  $ABC$  到锥顶  $M$  的距离为  $\Delta h$ ，则微四面体的体积为

$$\Delta V = \frac{1}{3} \Delta h \Delta A \quad (c)$$

因微四面体处于平衡状态，由于平衡条件  $\Sigma x = 0$ ，可得

$$p_x \Delta A - \sigma_x \Delta A_x - \tau_{xy} \Delta A_y - \tau_{xz} \Delta A_z + f_x \Delta V = 0 \quad (d)$$

将式 (b) 和 (c) 代入式 (d)，得到

$$p_x - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n + \frac{1}{3} f_x \Delta h = 0 \quad (e)$$

当  $\Delta h \rightarrow 0$  时，式 (e) 中所含体力分量项趋于零，于是，得到方程组 (2-7) 的第一式。同理，由平衡条件  $\Sigma y = 0$  和  $\Sigma z = 0$ ，得到方程组 (2-7) 的第二式和第三式，即

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ p_y &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ p_z &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

将方程组 (2-7) 用矩阵表示，成为

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \{\lambda_N\} \quad (2-8)$$

其中

$$\{\lambda_N\} = \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

$\{p\}$  为一点的全应力列阵， $\{\lambda_N\}$  为斜微面外法线方向  $N$  的方向余弦列阵。

斜微面  $ABC$  上的正应力用  $\sigma_N$  表示，由三个轴向应力分量在  $N$  方向的投影可得

$$\sigma_N = p_x l + p_y m + p_z n = [l \ m \ n] \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} \\ = [\lambda_N] \{ p \} = [\lambda_N] [\sigma] \{ \lambda_N \} \quad (2-10)$$

剪应力用  $\tau_N$  表示, 则有

$$\tau_N = [p^2 - \sigma_N^2]^{\frac{1}{2}} = [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_N^2]^{\frac{1}{2}} \quad (2-11)$$

由式(2-10)、(2-11)表明, 如已知一点的应力矩阵  $[\sigma]$ , 便可求出通过该点任一斜截面  $[\lambda_N]$  上的正应力和剪应力。表达式(2-7)或(2-8)反映了弹性体内任一点的应力状态。

例 2-1 设弹性体内一点处的应力分量为:

$$\sigma_x = -80 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_y = 26 \text{ MN/m}^2, \quad \sigma_z = -36 \text{ MN/m}^2; \\ \tau_{xy} = 16 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_{yz} = -28 \text{ MN/m}^2, \quad \tau_{zx} = 26 \text{ MN/m}^2.$$

且已知过此点斜微面的方向余弦为  $l = \frac{1}{4}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ , 试确定此斜微面上的正应力  $\sigma_N$  及剪应力  $\tau_N$ 。

解: 先确定方向余弦  $n$  值

由解析几何知, 方向余弦之间具有

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

的关系, 于是, 得到

$$n = (1 - l^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \sqrt{11}$$

斜微面上轴向应力分量为

$$\{ p \} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \{ \lambda_N \} = \begin{bmatrix} -80 & 16 & 26 \\ 16 & 26 & -28 \\ 26 & -28 & -36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{11}}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9.6 \\ -6.2 \\ -37.2 \end{Bmatrix} \text{ MN/m}^2$$

斜微面上正应力  $\sigma_N$  和剪应力  $\tau_N$  分别为

$$\sigma_N = [\lambda_N] \{ p \} = \left[ \frac{1}{4} \ \frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{11}}{4} \right] \begin{Bmatrix} 9.6 \\ -6.2 \\ -37.2 \end{Bmatrix} = -31.7 \text{ MN/m}^2$$

$$\tau_N = \left[ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_N^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[ (9.6)^2 + (-6.2)^2 + (-37.2)^2 - (-31.7)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ = 22.7 \text{ MN/m}^2$$

## § 2—3 应力分量的坐标转换式

坐标系的转换对弹性体内各点的应力状态不会产生影响，但其应力分量却要发生变化。设在弹性体内某点处的原坐标系为  $0xyz$ ，其应力矩阵为  $[\sigma]$ ，经坐标转换后，得到同一点的新坐标系为  $0x'y'z'$ ，新坐标系的应力矩阵设为  $[\sigma']$ ，则应力矩阵  $[\sigma']$  可用应力矩阵  $[\sigma]$  来确定。

设新坐标系各轴对原坐标系各轴的方向余弦关系由表 2—1 所示，其方向余弦列阵  $[\lambda_1]$ ， $[\lambda_2]$ ， $[\lambda_3]$  分别为

表 2—1

	$x$	$y$	$z$
$x'$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y'$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z'$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

$$\left. \begin{aligned} \{\lambda_1\} &= [\lambda_1]^T = [l_1 \ m_1 \ n_1]^T \\ \{\lambda_2\} &= [\lambda_2]^T = [l_2 \ m_2 \ n_2]^T \\ \{\lambda_3\} &= [\lambda_3]^T = [l_3 \ m_3 \ n_3]^T \end{aligned} \right\} (a)$$

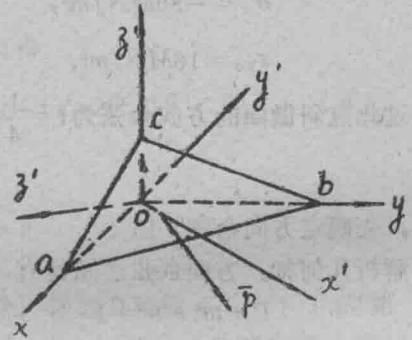


图 2—5

设以  $x'$  轴为外法线方向微面  $abc$  上的应力向量为  $\bar{p}$ ，图 2—5，其轴向应力分量为  $p_x$ ， $p_y$ ， $p_z$ ，根据式 (2—8) 将有

$$[p] = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = [\sigma][\lambda_1]^T \quad (b)$$

将微面  $abc$  上的轴向应力分量  $p_x$ ， $p_y$ ， $p_z$  向  $x'$  轴投影，得到微面的正应力为

$$\sigma_{x'} = p_x l_1 + p_y m_1 + p_z n_1 = [\lambda_1] \{p\} \quad (c)$$

当图示微面  $abc$  到坐标原点  $0$  的距离无限接近时，微面  $abc$  可看成通过坐标原点  $0$ ，于是， $y'$  和  $z'$  轴均处在微面  $abc$  之内。将轴向应力分量分别向  $y'$  和  $z'$  轴设影，得到微面的剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{y,x'} &= p_x l_2 + p_y m_2 + p_z n_2 = [\lambda_2] \{p\} \\ \tau_{z,x'} &= p_x l_3 + p_y m_3 + p_z n_3 = [\lambda_3] \{p\} \end{aligned} \right\} (d)$$

将式 (b) 分别代入式 (c) 和 (d)，得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_1} &= [\lambda_1] [\sigma] [\lambda_1]^T \\ \tau_{y_1, x_1} &= [\lambda_2] [\sigma] [\lambda_1]^T \\ \tau_{z_1, x_1} &= [\lambda_3] [\sigma] [\lambda_1]^T \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

同理，以  $y'$  轴和  $z'$  轴为外法线方向微面上的正应力和剪应力，分别有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{y'} &= [\lambda_2] [\sigma] [\lambda_2]^T \\ \tau_{x_1, y'} &= [\lambda_1] [\sigma] [\lambda_2]^T \\ \tau_{z_1, y'} &= [\lambda_3] [\sigma] [\lambda_2]^T \end{aligned} \right\} \quad (2-13)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z'} &= [\lambda_3] [\sigma] [\lambda_3]^T \\ \tau_{x_1, z'} &= [\lambda_1] [\sigma] [\lambda_3]^T \\ \tau_{y_1, z'} &= [\lambda_2] [\sigma] [\lambda_3]^T \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

根据方程组 (2-12)、(2-13)、(2-14) 的结果，应力矩阵  $[\sigma']$  可表为

$$[\sigma'] = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1} & \tau_{y_1, x_1} & \tau_{z_1, x_1} \\ \tau_{x_1, y_1} & \sigma_{y_1} & \tau_{z_1, y_1} \\ \tau_{x_1, z_1} & \tau_{y_1, z_1} & \sigma_{z_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\lambda_1] \\ [\lambda_2] \\ [\lambda_3] \end{pmatrix} [\sigma] [[\lambda_1]^T [\lambda_2]^T [\lambda_3]^T] \quad (e)$$

令

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix} \quad (f)$$

将式 (f) 代入式 (e)，即有

$$[\sigma'] = [\lambda] [\sigma] [\lambda]^T \quad (2-15)$$

由式 (e) 的结果表明，有下列关系存在，即

$$\tau_{x_1, y_1} = \tau_{y_1, x_1}, \quad \tau_{y_1, z_1} = \tau_{z_1, y_1}, \quad \tau_{z_1, x_1} = \tau_{x_1, z_1} \quad (g)$$

由此，经坐标转换后，应力矩阵  $[\sigma']$  的对称性不变，它仍是一个三阶的对称方阵。

## § 2-4 主应力与主方向

一般情况下，弹性体内一点任意方向的斜微面上，都存在有正应力和剪应力。当给定此点的应力矩阵  $[\sigma]$  时，这些应力是该点所在微面外法线方向  $N$  的方向余弦的函数。即它们随着外法线方向  $N$  的改变而变化，在方向  $N$  不断改变的过程中，能够找到这样的微面，在此微面上只有正应力  $\sigma_N$  而无剪应力  $\tau_N$ 。我们把剪应力  $\tau_N$  为零的微面称为主平面，主平面上的正

应力  $\sigma_N$  称为主应力，主平面的外法线方向  $N$  称为主方向。

设过某点有一个主平面存在，其方向余弦为  $l, m, n$ ，图 2-6。因主平面上的剪应力为零，故主平面上全应力  $\bar{p}$  的大小就等于主应力  $\sigma_N$ ，其轴向应力分量成为

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \sigma_N l \\ p_y &= \sigma_N m \\ p_z &= \sigma_N n \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

将式 (a) 代入式 (2-7)，得到

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_N)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n &= 0 \\ \tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma_N)m + \tau_{yz}n &= 0 \\ \tau_{zx}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_N)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

又有

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (c)$$

联立求解方程组 (b) 和式 (c)，便可求出主应力  $\sigma_N$  及其相应主方向的方向余弦  $l, m, n$  之值。由式 (c) 可知，方向余弦  $l, m, n$  不能同时为零，于是，要使方程组 (b) 有非零解，其方向余弦  $l, m, n$  的系数行列式必须为零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_N & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_N & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_N \end{vmatrix} = 0 \quad (d)$$

将行列式 (d) 展开，得到

$$\sigma_N^3 - \Theta_1 \sigma_N^2 + \Theta_2 \sigma_N - \Theta_3 = 0 \quad (2-16)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ \Theta_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ \Theta_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

方程 (2-16) 称为应力状态的特征方程，求解此方程，得到  $\sigma_N$  的三个根，可以证明均为实根，分别记为  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，且规定  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ 。这就是一点的三个主应力。

将主应力  $\sigma_1$  的值代入方程组 (b) 的任意两式，并与式 (c) 联解，可求出相应于主应力  $\sigma_1$  主方向的方向余弦  $l_1, m_1, n_1$ ，同理，可求得相应于主应力  $\sigma_2$  及  $\sigma_3$  主方向的方向余弦  $l_2,$

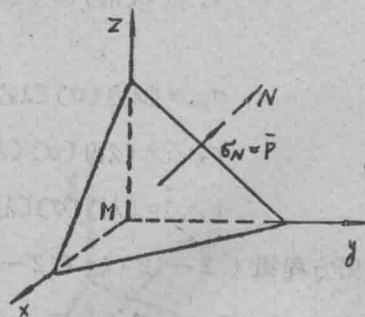


图 2-6



$m_2, n_2$  及  $l_3, m_3, n_3$ 。当三个主应力互不相等 ( $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$ ) 时, 三个主方向将互相垂直。证明如下:

将  $\sigma_1, l_1, m_1, n_1$  代入方程组 (b), 得下列方程组 (e) 的前三式, 将它们分别乘以  $l_2, m_2, n_2$ ; 以  $\sigma_2, l_2, m_2, n_2$  代入方程组 (b) 得下列方程组 (e) 的后三式, 再分别乘以  $-l_1, -m_1, -n_1$ , 即

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0 & l_2 \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0 & m_2 \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 &= 0 & n_2 \\ (\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 &= 0 & -l_1 \\ \tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 &= 0 & -m_1 \\ \tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 &= 0 & -n_1 \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

将方程组 (e) 各式展开, 并求其总和, 再经整理后得到方程组 (2-18) 的第一式。当用  $\sigma_2, l_2, m_2, n_2$  和  $\sigma_3, l_3, m_3, n_3$  和  $\sigma_1, l_1, m_1, n_1$  代入方程组 (b), 类似上述讨论, 可得方程组 (2-18) 的第二式和第三式, 即

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_2 - \sigma_1)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) &= 0 \\ (\sigma_3 - \sigma_2)(l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3) &= 0 \\ (\sigma_1 - \sigma_3)(l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

在  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$  时, 由式 (2-18) 可知, 必有

$$\left. \begin{aligned} l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 &= 0 \\ l_2l_3 + m_2m_3 + n_2n_3 &= 0 \\ l_3l_1 + m_3m_1 + n_3n_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

方程组 (2-19) 中的每一式表达了两条直线互相垂直的条件, 由此证明了  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  的三个主方向互相垂直。在三个主应力中, 当有两个相等时, 由方程组 (2-18) 可知, 第三个主方向必与这两个相等的主应力的主方向互相垂直, 而这两个相等的主应力的主方向可以互相垂直, 也可以互相不垂直。当三个主应力都相等时, 则三个主方向可以互相垂直, 也可以互相不垂直。

现运用方程组 (2-18), 证明  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  都是实根。

当应力状态的特征方程 (2-16) 要有复根时, 复根必定成对出现, 因此三个根中至少有一个是实根。设  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  为一对共轭复根, 则  $\sigma_3$  必为实根, 将  $\sigma_1$  与  $\sigma_2$  的共轭复根表示为

$$\sigma_1 = A + iB \quad \sigma_2 = A - iB \quad (f)$$

由于  $\sigma_1$  是复根, 代入方程组 (b) 的任意两式和式 (c) 联解, 所得的  $l_1, m_1, n_1$  一定也是复数。同理, 因  $\sigma_2$  是复根, 所得的  $l_2, m_2, n_2$  也是复数, 且两组方向余弦互为共轭复数,