KOALAGOGO
考拉进阶

薛金星·教材全解 畅销18年
全国一亿读者首选

依据教育部最新本科数学教学大纲和考研大纲编写
配高教社《高等数学》第六版 同济大学数学系 编

大学教材全解
高等数学（上册）

同步辅导+考研复习

考拉进阶《大学教材全解》编委会 编
曹圣山教授◎主 编

同济·第六版

教材解析最详 方法技巧最全

- 课后习题配详解 使用更贴心
- 关键步骤加注解 讲解更透彻
- 考研真题同步练 备考更高效

赠 历年考研真题及高等数学重要公式手册，请登陆考拉进阶官方网站www.koalagogo.com下载。

中国海洋大学出版社

考拉进阶

大学教材全解

高等数学（上册）

同济·第六版

主　编：曹圣山
副主编：胡京爽　丁双双
王学锋　生汉芳

中国海洋大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 曹圣山主编. --青岛 : 中国海洋大学出版社, 2011.8

(大学教材全解)

ISBN 978-7-81125-734-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①曹… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 138038 号

出版发行　中国海洋大学出版社

社　　址　青岛市香港东路 23 号　　邮政编码　266071

网　　址　http://www.ouc-press.com

电子信箱　book@bjjxsy.com

订购电话　0532-88918393

传　　真　0532-88918393

责任编辑　世　青　　电　　话　0532-88913510

印　　制　北京泽宇印刷有限公司

版　　次　2011 年 8 月第 1 版

印　　次　2011 年 8 月第 1 次印刷

成品尺寸　212mm×148mm

印　　张　14

字　　数　380 千字

定　　价　15.80 元

前言

“教材全解”系列图书十多年来一直是初高中学生的首选辅导材料，每年销售量位居同类辅导书首位，帮助千万学子取得了理想的成绩。为帮助广大读者学好《高等数学》这门课程(该课程不仅是理工、经济、管理类等专业学生必修的一门课程，同时也是全国硕士研究生入学考试的重点科目)，我们特邀请了全国各地治学严谨、业务精湛的一线名师，严格遵循教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”(教学大纲)和教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，精心编写了这本《大学教材全解——高等数学》。希望通过“教材全解”系列全心全意、解疑解难的独有特色，帮助读者全面透彻地解析高等数学知识，真正做到学好教材，提升解题能力与数学思维水平，轻松达到期中、期末、考研等各项考试的测试要求。

本书是同济大学数学系编写的《高等数学》上册(第六版，高等教育出版社)的配套用书。其章节内容与教材保持一致，讲解顺序与课堂授课完全同步，非常贴近读者的学习习惯，每章内容编写如下：

本章知识结构图解 以清晰的结构图形式，展现本章的知识体系及知识点间的内在逻辑关系。

本章考试出题点 概括本节在考试时重点考查知识点的哪些方面，出哪些类型的试题。重要考点和题型一目了然，为考试复习指明方向，使备考更加轻松、高效。

教材内容全解 这部分突出必须掌握或考频较高的核心内容，以知识点进行分类，对重点和难点，在知识点后进行标注，方便读者在课后复习及期末考试复习时快速查找本节重点。与众不同的是，本书在重要知识点后面配了相应例题，而且特别注重讲解知识点实际应用时易混淆、不容易理解之处以及解题过程中需要注意的事项，并列举与此知识点相关、在解题中广泛使用的核心结论，帮助读者学好、吃透本节重要概念、定理(公理)、公式、性质等。

常考基本题型 以每节的重点问题为主线，对每节涉及的学校期中、期末考试，全国硕士研究生入学考试等常考基本题型做全面、详尽分析，揭示解题思路、传授方法技巧。部分例题给出多种解法，培养读者从不同角度思考问题、解决问题的能力。

课后习题全解 这部分给出了配套教材中各节习题过程步骤最详尽，方法技巧最全面的解答过程，并且还对重要步骤和较难理解之处做了注解，这也是本书的一大特色。

本章解题方法归纳 归纳、提炼本章涉及的重要解题方法，培养读者运用数学思想独立思考问题、解决问题的能力。为满足读者获得高分以及通过考研的更高需求，

每种方法下面所配的例题以近几年的考研真题为主，让读者在初次学习本课程时就对研究生入学考试的难度和要求有初步认识，为考研打下坚实基础。

本章总习题　习题全解　给出了每章章末总习题的详尽解析，对重要步骤和较难理解之处均做了注释，对典型习题，给出了两种及两种以上的解法。

除此之外，本书还附上了期末考试模拟试卷及相应答案解析，方便读者进行期末考试考前自测，检测学习效果。

本书内容贯彻了“教材全解”系列讲解细致、层次清晰、深入浅出的特点，并在此基础上突出了三大亮点：

1. 解题过程最详，方法技巧最全。

对“常考基本题型”、“本章解题方法归纳”和“课后习题全解”这些板块，本书不仅设置了“题型解析”、“解题提示”、“方法技巧”、“特别提醒”等栏目，而且每一道题均给出了详细的解题步骤。不仅如此，针对有代表性的习题，本书给出了两种及两种以上的解法，使读者举一反三，达到事半功倍的学习效果。

2. 习题难度分级，关键步骤加批注，讲解更到位。

在“课后习题全解”和“本章总习题　习题全解”里面，根据习题难易及重要性程度，将全书习题分三个等级：基础题，多知识点综合题，灵活题和难题，分别以易、中、难的标志标记在题号前。在给出详尽解题过程的同时，关键步骤间还加了注解释疑，帮助读者理解解题的每一个步骤。

3. 密切联系考研，精选并详细解析历年考研真题。

在“常考基本题型”、“本章解题方法归纳”里，以近几年考研真题为载体，详细阐述解题方法和技巧，针对典型例题还给出了多种解法，让读者在初学本课程时就对研究生入学考试有较好的认知。

参与本书的编者长期主讲《高等数学》，教龄均在27年以上，在本领域有着丰富的研究成果和教学经验，在编写过程中，我们重点突出解题思路和方法，力求将多年的成果与经验渗透到本书内容中。在本书市场调研与选题策划阶段，高红伟教授给予了大力支持，提出许多宝贵意见和建议，在此，致以衷心的感谢！

本书可作为：高等学校理工科和其他非数学专业学生学习高等数学的辅导用书，参加硕士研究生入学考试的复习用书；教师讲授高等数学课程的教学参考书。

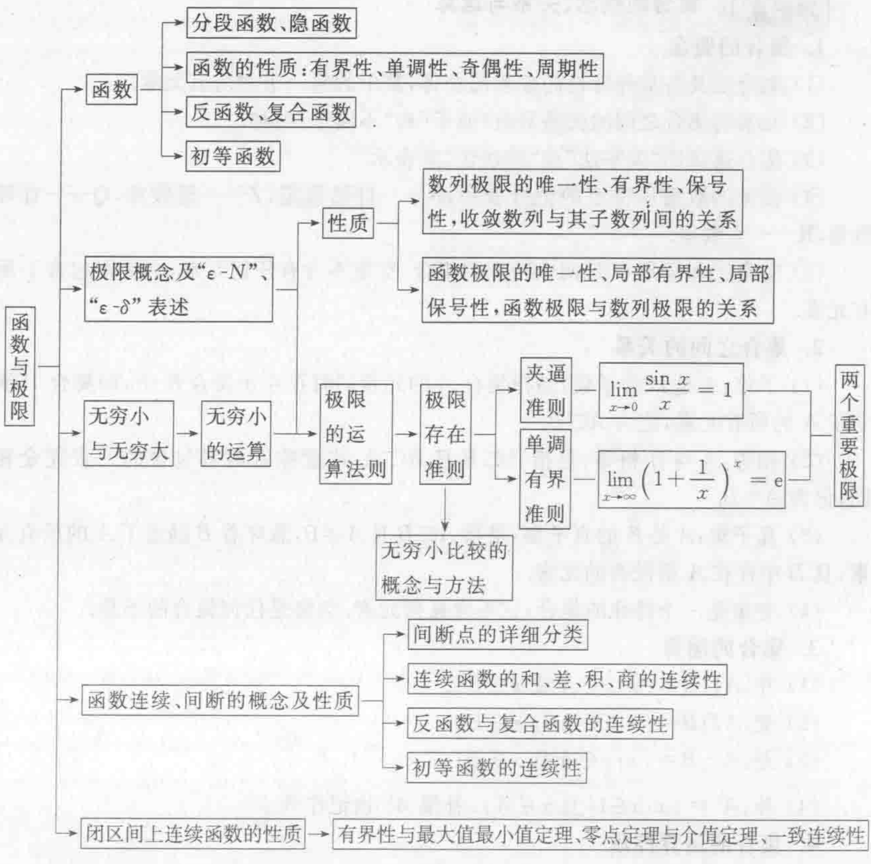
由于时间仓促及编者水平有限，书中定会存在不当和疏漏之处，敬请读者批评指正。

考拉进阶教育研究院
“大学教材全解”编委会

目录

第一章　函数与极限

本章知识结构图解



第一节　映射与函数

一　本节考试出题点

本节在考试中的出题点主要体现在以下方面:

1. 集合的关系与运算:集合的包含与相等,集合的并、交、差、补.
2. 函数定义域的确定.

3. 函数性质的讨论：讨论函数的有界性、单调性、奇偶性与对称性.

4. 反函数与复合函数：反函数的求法，函数的复合与分解.

5. 基本初等函数与初等函数：基本初等函数的性质与图像，一些常见函数的图形及规律.

6. 建立函数关系式，特别是根据实际问题建立函数关系.

二 教材内容全解

知识点1 集合的概念、关系与运算

1. 集合的概念

(1) 集合是具备某种特性的事物的全体，其中的每一事物为其元素.

(2) 元素与集合之间的关系只有"属于"和"不属于"两种.

(3) 集合通常用"列举法"或"描述法"来表示.

(4) 常见的数集用特定的记号表示：**N**——自然数集，**Z**——整数集，**Q**——有理数集，**R**——实数集.

(5) 空集$\varnothing$和全集U是两个特殊的集合. 空集不含有任何元素，全集则包含了所有元素.

2. 集合之间的关系

(1) 子集：A是B的子集，是指集合A的元素同时存在于集合B中，即集合B涵盖了A的所有元素，记为$A\subset B$.

(2) 相等：A与B相等，是指$A\subset B$且$B\subset A$，这意味着两者包含的元素完全相同，记为$A=B$.

(3) 真子集：A是B的真子集，是指$A\subset B$且$A\neq B$，意味着B涵盖了A的所有元素，且B中存在A所没有的元素.

(4) 空集是一个特殊的集合，它不含任何元素. 空集是任何集合的子集.

3. 集合的运算

(1) 并：$A\cup B=\{x|x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

(2) 交：$A\cap B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.

(3) 差：$A-B=\{x|x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$.

(4) 补：$A^C=\{x|x\in U\text{ 且 }x\notin A\}$. 补集$A^C$也记作$\bar{A}$.

4. 集合的运算性质

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

(5) 包含关系：$A\cap B\subset A\subset A\cup B$，$A\cap B\subset B\subset A\cup B$.

(6) 包含运算：若$A\subset B$，则$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

温馨提示：集合之间的关系和运算，通常用文氏图来直观地表示.

知识点 2 函数的有关概念(重点)

1. 函数定义的要点

(1) 函数是两个集合 D 和 R 之间的一个对应法则 f：对于每一个 $x\in D$，都有唯一确定的实数 y 与之对应.

(2) 函数体现了变量间的依赖关系.

(3) 函数关系可以有多种形式，例如公式、表格、图像等. 用公式表示可以是一个解析式，也可以是分段函数的形式. 但需要注意的是：每一个自变量的值，只能对应一个函数值.

2. 函数的定义域

(1) 函数的定义域就是其自变量的取值范围. 解析式函数的自然定义域就是实数范围内使函数有意义的所有点的集合.

(2) 函数的自变量 x 必须满足能够运算的条件. 常见的条件有：

① 分式的分母不能为零.

② 对数的真数要大于零.

③ 开偶次方根时，根式下的式子要非负.

④ 正切函数 $\tan x$ 需满足 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 为整数)，余切函数 $\cot x$ 需满足 $x\neq k\pi$ (k 为整数).

⑤ 反正弦 $\arcsin x$ 和反余弦 $\arccos x$ 均需满足 $|x|\leqslant 1$.

温馨提示：当上面的 x 换为一个表达式 M 时，需保证该表达式满足相应的条件.

3. 求函数定义域的解题步骤

(1) 首先，给定的函数通常是由基本初等函数(或简单函数)复合而成，列出使每个基本初等函数(或简单函数)有定义所需满足的关系式(等式或不等式)，得到使函数有意义的联立不等式组；

(2) 其次，求解所得的联立不等式组；

(3) 最后，用区间或集合的形式表示所得到的结果，即为所求的定义域.

例 1 求函数 $f(x)=\frac{x-2}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域.

解 对于 $\frac{x-2}{\ln x}$，要求 $x>0$ 且 $x\neq 1$，即 $(0,1)\cup(1,+\infty)$；对于 $\sqrt{16-x^2}$，要求 $16-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 16$，它等价于 $|x|\leqslant 4$，即 $[-4,4]$. 于是取两个函数定义域的公共部分，得所求函数定义域为 $[(0,1)\cup(1,+\infty)]\cap[-4,4]=(0,1)\cup(1,4]$.

知识点 3 函数的性质之一——有界性

1. 有界性的定义

(1) 有界：函数 $f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在一个常数 K，使得对任意的 $x\in X$，都成立

$$|f(x)|\leqslant K.$$

(2) 无界：函数 $f(x)$ 在 X 上无界 $\Leftrightarrow$ 对任何正数 M，都存在某个 $x_0\in X$，使得

$$|f(x_0)|>M.$$

2. 利用定义证明函数有界的方法

(1) 首先，对函数取绝对值（或者直接利用上述"有界的等价表述"，直接转入下面的第二步）；

(2) 其次，进行适当的不等式放大；

(3) 最后，找出定义中所说的常数 M.

3. 证明函数有界应注意的问题

(1) 将来学过连续的有关知识后，利用闭区间上连续函数的性质，也可以方便地证明函数在闭区间上有界.

(2) 函数的有界性与所在区间有密切的关系. 一个函数可能在一个区间内有界，在另一区间内无界，因此描述函数的有界性时需要指明对应的区间.

例 2 研究函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 和 $(0,1)$ 上的有界性.

解 函数在 $[1,+\infty)$ 上有界，因为对该范围内所有 x，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$；但在 $(0,1)$ 上无界，因为当 x 接近 0 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 可以任意大. 事实上，对任给的正数 M，只要取 x_0 满足 $|x_0|>\dfrac{1}{M}$，便有 $\left|\dfrac{1}{x_0}\right|>M$，因而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上是无界的.

知识点 4 函数的性质之二——单调性(重点)

1. 单调性的定义

(1) 单调增加：$f(x)$ 在 I 上单调增加 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2).$$

(2) 单调减少：$f(x)$ 在 I 上单调减少 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2).$$

2. 根据定义判断函数单调性的步骤

(1) 记 I 为自变量的变化范围，任取两点 $x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_1<x_2$；

(2) 研究是否恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）成立，一般通过考察 $f(x_1)-f(x_2)$ 是否不变号来研究；

(3) 根据定义，确定函数是否具备单调性.

3. 运用定义研究函数的单调性时需要注意的问题

(1) 比较 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 的大小，有时考察比值形式 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$，研究 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}<1$ 是否成立（此时情况较为复杂，还应注意 $f(x)$ 的符号变化）.

(2) 通常要借助于常用的不等式，对 $f(x_1)-f(x_2)$ 或 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}$ 进行放缩变形.

(3) 微积分中采用导数来研究函数的单调性，非常方便有效，这将在导数应用部

分作详细介绍.

例 3　判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的单调性.

解　函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 在 $(0,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{\sqrt{x_1}}-\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})}>0,$$

故 $f(x_1)>f(x_2)$，所以函数在定义域内单调减少.

方法技巧　也可从 $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}=\dfrac{1/\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_2}}=\sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}>1$，得出 $f(x_1)>f(x_2)$ 的结论.

知识点 5　函数的性质之三——奇偶性(重点　难点)

1. 奇(偶)函数的定义

(1) 奇函数：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in X$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是奇函数.

(2) 偶函数：设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in X$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 在 X 上是偶函数.

温馨提示：(1) 奇函数和偶函数都是特殊的函数. 一般的函数，往往是非奇非偶函数.

(2) 奇函数和偶函数的定义域都必须是一个关于原点对称的区间.

2. 奇(偶)函数的几何意义

奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

3. 奇(偶)函数的运算规律

(1) 奇函数±奇函数＝奇函数，偶函数±偶函数＝偶函数.

(2) 奇函数×奇函数＝偶函数，奇函数÷奇函数＝偶函数.

(3) 偶函数×偶函数＝偶函数，偶函数÷偶函数＝偶函数.

(4) 奇函数×偶函数＝奇函数，奇函数÷偶函数＝奇函数.

温馨提示：一个奇函数和一个偶函数的和(差)，既不是奇函数，也不是偶函数，而是非奇非偶函数.

4. 利用定义研究函数奇偶性的步骤

(1) 对任意的 x，写出 $f(-x)$ 的表达式，并考察它与 $f(x)$ 的关系.

(2) 根据两者关系，确定奇偶性. 有三种可能性：如果 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；若前两式都不满足，则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

例 4　判断函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解　函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

知识点 6 函数的性质之四——周期性(重点 难点)

1. 周期函数的定义

设 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在常数 $T\neq 0$,使得任意 $x\in X$,$x+T\in X$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,称 T 为 $f(x)$ 的周期.

2. 关于周期性需要注意的问题

(1) 周期函数有无穷多个周期,通常我们所说的周期是指最小正周期.

(2) 周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数 $f(x)=C$ 和狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in \mathbf{Q},\\ 0, & x\in \mathbf{Q}^C\end{cases}$ 均为周期函数,但无最小正周期.

(3) 函数周期性的几何意义:周期函数的图形是周期变化的.

(4) 最常见的周期函数是三角函数.

知识点 7 分段函数 反函数 复合函数

1. 分段函数

分段函数是一种特殊形式的函数:在定义域不同的范围内,其对应关系用不同的表达式来表达.分段函数一般不是初等函数.

2. 反函数

(1) 反函数是将自变量与因变量互换而得的函数,其对应关系与直接函数正好相反.

(2) 单调函数一定存在反函数,且反函数也单调.

(3) 反函数与直接函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(4) 常见的反函数有:指数函数与对数函数;三角函数与反三角函数;双曲函数与反双曲函数.

3. 复合函数

(1) 定义:设 $y=f(u)$ 的定义域为 U,$u=g(x)$ 的定义域为 X,值域为 U^*.如果 $U^*\subset U$,则称 $y=f[g(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 构成的复合函数,u 称为中间变量.

(2) 两个以上的函数也可以复合,只要满足复合的条件.

(3) 并非任何两个函数都能复合.两函数能够复合的条件是内层函数的值域全部或部分落于外层函数的定义域之中,即两者的交集非空.

4. 初等函数

(1) 初等函数是由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和复合,并可以用一个式子表示的函数.

(2) 初等函数是最常见的一类函数,它有着良好的性质,例如后面要涉及的“初等函数的连续性”.

(3) 分段函数一般不是初等函数,但个别情况除外.

例 5 $f(x)=\begin{cases}-x, x<0,\\ x, \quad x\geqslant 0\end{cases}$ 是否为初等函数？

解 该函数与 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$ 完全相同，所以 $f(x)$ 等同于由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 构成的复合函数，它能够用一个式子表示：$f(x)=\sqrt{x^2}$，因而是初等函数.

三 常考基本题型

题型Ⅰ 求函数的定义域

题型解析 函数的定义域需使得函数的所有部分有定义. 例如分母不等于零、真数大于零、偶次根式下的式子要不小于零等. 若同时包含这些约束，需找其公共部分，即求各集合的交集.

例 1 求函数 $f(x)=\ln[\ln(\ln x)]+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域.

解 要使 $\ln[\ln(\ln x)]$ 有意义，需 $\ln(\ln x)>0$，即 $\ln x>1$，这等价于 $x>\mathrm{e}$；要使 $\sqrt{100-x^2}$ 有意义，需 $x^2\leqslant 100$，即 $|x|\leqslant 10$，或表示为 $-10\leqslant x\leqslant 10$. 两集合的交集为 $\mathrm{e}<x\leqslant 10$，故函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e},10]$.

例 2 求函数 $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln(x+1)}}$ 的定义域.

解 该函数受多个约束条件的限制. 要使函数有意义，需满足

$$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ \sqrt{x^2-1}\neq 0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\leqslant 1,\\ x+1>0,\\ \ln(x+1)\neq 0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x^2-1>0,\\ \sqrt{x^2-1}\geqslant 1,\\ x+1>0,\\ x\neq 0,\end{cases}$$

也即 $\begin{cases}x^2-1\geqslant 1,\\ x>-1 \text{ 且 } x\neq 0,\end{cases}$ 故所求定义域为 $D=\{x\,|\,x\geqslant\sqrt{2}\}$，或写为 $D=[\sqrt{2},+\infty)$.

方法技巧 求多个部分的交集时，若借助数轴表示，可以简单而快速地得到结果.

特别提醒 若函数涉及实际问题，在保证数学式子有意义的同时，需要结合考虑变量代表的具体含义，使得函数有实际意义. 例如长度、时间、质量等均要大于或等于零.

例 3 设 $f(x)$ 的定义域为 $[-a,a]\,(a>0)$，求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

解 要求 $f(x^2-1)$ 有意义，需 $-a\leqslant x^2-1\leqslant a$，即 $1-a\leqslant x^2\leqslant 1+a$.

当 $a\geqslant 1$ 时，$1-a\leqslant 0$，上式等价于 $x^2\leqslant 1+a$，即 $|x|\leqslant\sqrt{1+a}$.

当 $0<a<1$ 时，$1-a>0$，上式等价于 $\sqrt{1-a}\leqslant|x|\leqslant\sqrt{1+a}$，所以函数的定义域为 $\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$ 或 $-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{1-a}$.

综上，当 $a\geqslant 1$ 时，函数定义域为 $-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$；当 $0<a<1$ 时，函数定义域为 $\sqrt{1-a}\leqslant x\leqslant\sqrt{1+a}$ 或 $-\sqrt{1+a}\leqslant x\leqslant-\sqrt{1-a}$.

题型Ⅱ　函数值的运算

题型解析　函数值的计算常有两类问题：一是知道函数的表达式，求某些函数值；二是给出一些运算的结果，去确定函数的具体表达式.

例 4　已知函数 $f(x+1)=x^2+2x-3$，求 $f(x)$，$f\left(\frac{1}{a}\right)$ 和 $\frac{1}{f(a)}$.

解题提示　本题关键是求出 $f(x)$，可以采取两种不同的方法求解.

解法Ⅰ　采取“凑项”的方法，将等式右端表示成 $x+1$ 的函数

$$f(x+1)=x^2+2x+1-4=(x+1)^2-4,$$

于是便知

$$f(x)=x^2-4.$$

利用 $f(x)$ 可直接得到 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-4$ 和 $\frac{1}{f(a)}=\frac{1}{a^2-4}$.

解法Ⅱ　将 $x+1$ 看作一个变量，即作变量代换 $t=x+1$，这样得到 $x=t-1$，代入原式有

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)-3=t^2-2t+1+2t-2-3=t^2-4,$$

因函数关系与表示自变量的字母无关，故由上式得到 $f(x)=x^2-4$.

求 $f\left(\frac{1}{a}\right)$ 和 $\frac{1}{f(a)}$ 的步骤与结果同解法Ⅰ.

例 5　设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

解　令 $e^x+1=u$，$x=\ln(u-1)$，则

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+\ln(u-1)=u^2-u+\ln(u-1),$$

于是

$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1).$$

本题也可以采取凑项的方法. 因为

$$f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x=(e^x+1)^2-(e^x+1)+x$$
$$=(e^x+1)^2-(e^x+1)+\ln(e^x+1-1),$$

所以

$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1).$$

题型Ⅲ　函数性质的研究

题型解析　函数的性质包括有界性、单调性、奇偶性和周期性. 这些性质一般按照各自的定义来研究.

例 6　证明函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}+\sin x+\cos x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

证 因为 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$,所以

$$x+\frac{1}{x}+\sin x+\cos x\geqslant 2+\sin x+\cos x,$$

一方面,$2+\sin x+\cos x\geqslant 0$,即 $f(x)\geqslant 0$. 另一方面,

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2+\sin x+\cos x}=\frac{1}{2+\sqrt{2}\left[\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\sin\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$=\frac{1}{2+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)},$$

所以当 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时,函数 $y=\frac{1}{2+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ 取到最大值,最大值为 $\frac{1}{2-\sqrt{2}}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,于是 $f(x)\leqslant 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故可取 $M=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$,则有 $|f(x)|\leqslant M$,即函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

例 7 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$,求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

解 在区间 $[0,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2,不妨设 $x_1<x_2$,注意到

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)$$

$$=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right).$$

(1) 当 $a\geqslant 1$ 时,因为 $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$,所以 $\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$,又 $x_1-x_2<0$,故 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$. 所以,当 $a\geqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递减函数.

(2) 当 $0<a<1$ 时,在区间 $[0,+\infty)$ 上存在两点 $x_1=0,x_2=\frac{2a}{1-a^2}$,满足 $f(x_1)=1,f(x_2)=1$,即 $f(x_1)=f(x_2)$,所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数.

综上,当且仅当 $a\geqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

特别提醒 根据单调性的定义研究函数的单调性,关键是不等式的分析讨论,此时常常会用到一些基本的不等式;对于含参数的函数,应针对参数的取值范围分类讨论.

例 8 若函数 $f(x)=a|x-b|+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,求实数 a,b 的取值范围.

解 将函数改写为

$$f(x)=\begin{cases}a(x-b)+2, & x\geqslant b,\\ a(b-x)+2, & x<b.\end{cases}$$

若 $a=0$,则函数 $f(x)\equiv 2$,单调不减,或单调不增,不符合题意,即 $a\neq 0$;

若 $a<0$,则函数 $f(x)$在$(-\infty,b]$上单调递增,在$[b,+\infty)$上单调递减.这也与题设不符,故也不可能出现该情况;

若 $a>0$,则函数 $f(x)$在$(-\infty,b]$上单调递减,在$[b,+\infty)$上单调递增.由题设,函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,于是在此情况下,又必有 $b\leqslant 0$.

所以要使得 $f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,a,b 的取值范围应为 $a>0,b\leqslant 0$.

例 9 已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x-4)=-f(x)$,且在区间$[0,2]$上是增函数,若方程 $f(x)=m(m>0)$在区间$[-8,8]$上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4,求 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的值.

解题提示 注意到函数的奇偶性、单调性、对称性、周期性,以及由函数图像分析函数零点问题,运用数形结合的思想和函数与方程的思想解答问题.

解 因为函数 $f(x)$满足 $f(x-4)=-f(x)$,所以

$$f(x-8)=f(x-4-4)=-f(x-4)=f(x),$$

因此函数 $f(x)$是以 8 为周期的周期函数. ①

又因为 $f(x)$是 **R** 上的奇函数,所以 $f(0)=0$,且 $f(x-4)=-f(x)=f(-x)$.

记 $x=t-2$,有 $f(2-t)=f(-x)=f(x-4)=f(t-6)=f(t+2-8)=f(t+2)$,即函数 $y=f(x)$的图像关于直线 $x=2$ 对称. ②

再由函数 $f(x)$在区间$[0,2]$上是增函数,且是 **R** 上的奇函数,所以 $f(x)$在区间$[-2,0]$上也是增函数,即 $f(x)$在区间$[-2,2]$上是增函数. ③

由②和③得,$f(x)$在区间$[2,6]$上是减函数,且 $f(4)=0$.

再由①,②,③,得函数 $y=f(x)$的图像关于 $x=-6$ 对称.

由题意,方程 $f(x)=m(m>0)$在区间$[-8,8]$上有四个不同的根 x_1,x_2,x_3,x_4,不妨设 $x_1<x_2<x_3<x_4$,由对称性(图 1-1)知 $x_1+x_2=-8-4=-12$,$x_3+x_4=0+4=4$,所以 $x_1+x_2+x_3+x_4=-12+4=-8$.

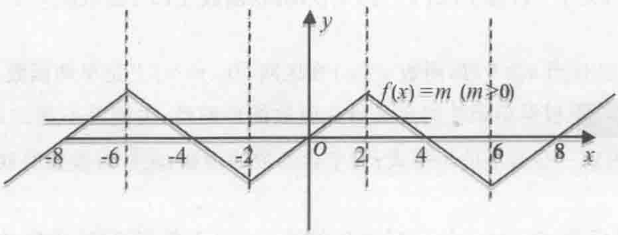


图 1-1

方法技巧 充分利用所给函数的奇偶性、单调性、对称性和周期性,结合函数图