GAODENGSHUXUE

QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版 （上册）

滕兴虎 刘希强 毛自森 编著
张 燕 徐 为

重点难点提示
典型例题分析
课后习题全解
考研真题精解
同步测试检验
权威全面全能
考试考研无敌

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

GAODENGSHUXUE

QUANCHENGXUEXIZHIDAOYUXITIJINGJIE

高等数学

全程学习指导与习题精解

同济七版 （上册）

滕兴虎　刘希强　毛自森
张　燕　徐　为　编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS
·南京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程学习指导与习题精解:同济七版.上册/滕兴虎等编著.—南京:东南大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-5641-5662-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①滕… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 076286 号

高等数学全程学习指导与习题精解(同济七版·上册)

主　　编	滕兴虎　刘希强　毛自森 张　燕　徐　为	**责任编辑**	戴季东
电　　话	(025)83793329/83362442(传真)	**电子邮件**	liu-jian@seu.edu.cn
特约编辑	李　香		
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83793191/57711295(传真)		
网　　址	http://www.seupress.com	**电子邮件**	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京新洲印刷有限公司
开　　本	718mm×1005mm　1/16	**印　　张**	20　**字　数**　540千
版　　次	2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷		
书　　号	ISBN 978-7-5641-5662-6		
定　　价	25.00 元		

前　言

《高等数学》是理工科院校各专业必修的一门重要课程，是理工科各专业研究生入学考试的必考科目。《高等数学》概念与理论是其他诸多理工课程的基础，其思想与方法更是贯穿科学技术、经济管理、工农业生产和社会人文各个领域。

《高等数学》中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密、无懈可击。上海同济大学应用数学系主编的《高等数学》各版教材，以体系完整、层次清晰和深入浅出的特点而成为众多高校高等数学课程的首选教材。为了帮助广大同学扎实地掌握《高等数学》的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，根据多年的教学经验，我们编写了与同济大学应用数学系主编的《〈高等数学〉第七版》配套的上、下册辅导教材。

本辅导教材由以下几个部分组成：

1. 基本要求、重点与难点：给出了每一章的基本要求及该章的重点和难点内容；

2. 主要概念与公式：列出了每一章的基本概念、重要定理和重要公式，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容；

3. 重点、难点解答：这是本辅导教材的独有特色，这一部分列出了每一章的重点与难点，并根据教学经验，对学生一般难于理解的重、难点内容，给出了详细的归纳与解答，以帮助广大同学对相应内容理解得更加透彻；

4. 典型例题分析：精选每一章内容所涉及的重要题型，并进行了详细的分析和解答，以帮助广大同学更好地掌握和理解相关题型的解法，达到举一反三、触类旁通的效果；

5. 课后习题全解：对教材中课后每一道习题均给出了详细的解答，以帮助广大同学回顾、巩固、深化每一章的内容讲解；

6. 考研真题精解：精选历年硕士研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的分析和解答。这些题目涉及内容广，题型多，解题技巧性强，可以进一步帮助广大同学举一反三、触类旁通、开拓解题思路，更好地掌握《高等数学》的基本内容和解题方法；

7. 同步测试题：根据《高等数学》课程考试和考研内容，在每一章设计了一套同步测试题，目的是给广大同学提供练习机会，帮助广大同学进一步消化知识、夯实基础、提高能力，同时检验自己对高等数学知识的掌握程度，找出差距，以便更好地学习。

本辅导教材上册由解放军理工大学理学院滕兴虎、刘希强、毛自森、张燕、徐为编写，下册由滕兴虎、毛磊、李静、寇冰煜、裴玉编写，全书由滕兴虎统稿。在本书的策划、编写、审稿等方面得到了东南大学出版社的大力支持和热情帮助，在此表示感谢。由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请广大同行和读者批评指正。

编者

目　录

第五章　定积分

第六章　定积分的应用

第七章　微分方程

第一章　函数与极限

基本要求、重点与难点

基本要求：

(1) 理解函数及其定义域、值域、图形等概念，掌握函数的表示法. 了解函数的有界性、单调性和奇偶性；

(2) 理解复合函数、反函数和分段函数的概念；

(3) 理解基本初等函数及其定义域、值域等概念. 掌握基本初等函数的性质及其图形，理解初等函数的概念；

(4) 会建立简单应用问题中的函数关系式；

(5) 了解数列与函数极限的概念和性质，理解左、右极限的概念及极限存在与左、右极限之间的关系；

(6) 了解无穷小的概念和性质，了解无穷大与无穷小之间的关系，掌握无穷小阶的比较方法；

(7) 了解函数连续(在一点 x_0 处连续以及连续函数)的概念，理解左、右连续的概念以及函数连续与左、右连续之间的关系，掌握讨论分段函数连续性的方法；

(8) 了解函数间断的概念，掌握函数间断点的分类，会判断函数的间断点；

(9) 理解闭区间上连续函数的性质，会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题；

(10) 熟练掌握极限的四则运算法则和两个重要极限，掌握极限的两个存在准则，能熟练运用极限的四则运算、两个重要极限、极限的存在准则以及无穷小的性质、等价无穷小代换、函数的连续性等方法求极限.

重点：

(1) 复合函数的定义域；
(2) 函数的基本性质；
(3) 求函数的复合及反函数；
(4) 建立简单应用问题的函数关系式；
(5) 求极限；
(6) 讨论函数的连续性；
(7) 间断点的分类；
(8) 闭区间上连续函数的性质.

难点：

(1) 抽象函数的表达式；
(2) 分段函数的复合及反函数的求法；
(3) 极限的概念；
(4) 求极限的各种方法的应用；
(5) 闭区间上连续函数性质的应用.

主要概念与公式

特殊数集

名　称	表　示
自然数集	$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$
整数集	$\mathbf{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots,\pm n,\cdots\}$
有理数集	$\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle\vert\, p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0,\text{且 }p、q\text{ 互质}\right\}$
正实数集	$\mathbf{R}^{+}=\{x\mid x\in\mathbf{R},x>0\}$
去零实数集	$\mathbf{R}^{*}=\{x\mid x\in\mathbf{R},\ x\neq 0\}$
复数集	$\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,\ b\in\mathbf{R},\ \mathrm{i}^2=-1\}$

集合运算公式

运　算	公　式
并　集	$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$
交　集	$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$
差　集	$A\backslash B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$
余　集	$A^{c}=\{x\mid x\in I\text{ 且 }x\notin A\}$
直　积	$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$

区间与邻域

名　称	表　示
开区间	$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$
闭区间	$[a,b]=\{a\leqslant x\leqslant b\}$
左开右闭区间	$(a,b]=\{a<x\leqslant b\}$
点 a 的 δ 邻域	$U(a,\delta)=\{x\mid \vert x-a\vert<\delta\}=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$
点 a 的去心邻域	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<\vert x-a\vert<\delta\}=\{x\mid (a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\}$
点 a 的左 δ 邻域	$U_{-}(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a\}$
点 a 的右 δ 邻域	$U_{+}(a,\delta)=\{x\mid a<x<a+\delta\}$

映射及相关定义

名　称	定　义
映　射	给定两个非空集合,如果存在一个法则 T,使得任意 $x\in X$,按法则 T 使存在唯一的元素 y 与之对应,则称 T 为从 X 到 Y 的一个映射,记作 $T:X\to Y$. 其中 x 称为原像,y 为像. 集合 X 称映射 T 的定义域. X 的所有元素的像的集合称映射 T 的值域
满　射	若 $T(X)=Y$,则称 T 为从 X 到 Y 的满射
单　射	若任意 $x_1,x_2\in X,x_1\neq x_2$,必有 $T(x_1)\neq T(x_2)$,则称 T 为从 X 到 Y 的单射

(续 表)

名 称	定 义
双 射	若 T 是从 X 到 Y 的满射且又是单射,则称 T 为双射
复合映射	若映射 $T_1:X\to Y_1$, $T_2:Y_2\to Z$,且 $T_1(x)\subset Y_2$,则 $T_2\circ T_1:X\to Z$,$(T_2\circ T_1)(x)=T_2(T_1(x))$,称为由 T_1,T_2 构成的复合映射

函数及相关定义

名 称	定 义
函 数	设数集 $D\in\mathbf{R}$,则 D 到 $\mathbf{R}$ 的映射 f 称为定义在 D 上的一元函数,记为 $y=f(x)$, $x\in D$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域,$\{f(x)\mid x\in D\}$ 称为值域
函数的图形	点集 $\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形
反函数	若函数 $f:D\to f(D)$ 为单射,则称其逆函数 $f^{-1}:f(D)\to D$ 为 f 的反函数,f^{-1} 的对应法则由 f 来决定,即若 D 与 $f(D)$ 之间是一一对应的,则 x 也是 y 的函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因此反函数也记作 $y=f^{-1}(x)$
复合函数	若函数 $y=f(u)$ 的定义域包含 $u=g(x)$ 的值域,则在函数 $g(x)$ 的定义域上可确定一个函数 $y=f(g(x))$,称其为 g 与 f 的复合函数,记作 $y=f(g(x))$ 或 $y=f\circ g$
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数

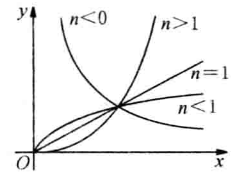
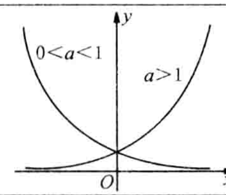
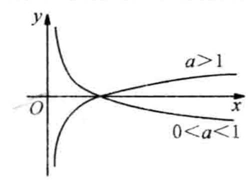
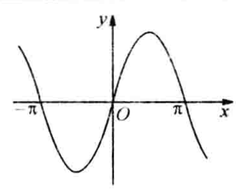
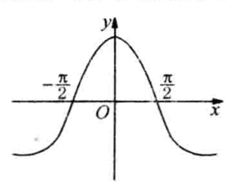
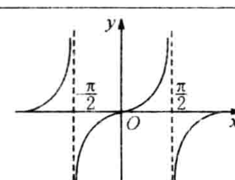
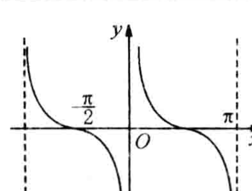
函数的几种特性

性 质	定 义
奇偶性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,任意 $x,-x\in D$,有 $f(-x)=f(x)(f(-x)=-f(x))$,则称 $f(x)$ 为 D 上的偶(奇)函数
单调性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $x_1,x_2\in D$,由 $x_1<x_2$ 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加(单调减少)的
周期性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使任 $x\in D$,均有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,通常把满足关系式的最小正数 T 称为最小正周期,简称周期
有界性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若存在 $M>0$,使任意 $x\in D$,有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界
无界性	设 $f(x)$ 在 D 上定义,若任意 $M>0$,均存在 $x_0\in D$,使 $\lvert f(x_0)\rvert\geqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上无界

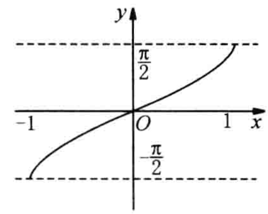
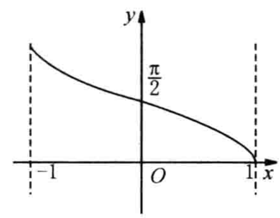
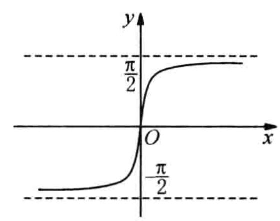
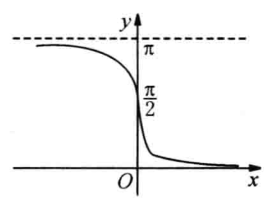
函数的运算

运 算	定 义
和	$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ x\in D$
差	$(f-g)(x)=f(x)-g(x),\ x\in D$
积	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),\ x\in D$
商	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x\in D$ 且 $g(x)\neq 0$

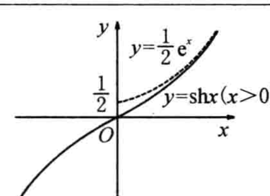
基本初等函数

名　称	定义域及性质	图例
幂函数	$y=x^n$ $n>0$ 时,函数 x^n 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增 $n<0$ 时,函数 x^n 在 $(0,+\infty)$ 上严格递减 $y=x^n$ 与 $y=x^{\frac{1}{n}}$ 互为反函数	
指数函数	$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ $a>1$ 时,函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增 $0<a<1$ 时,函数 a^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递减	
对数函数	$y=\log_a x(a>0,\ a\neq 1,\ x>0)$ $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数	
三角函数	正弦函数　$y=\sin x, x\in\mathbf{R}$	
	余弦函数 $y=\cos x, x\in\mathbf{R}$	
	正切函数 $y=\tan x$, $\left(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)$	
	余切函数 $y=\cot x$, $(x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z})$	

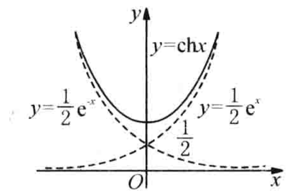
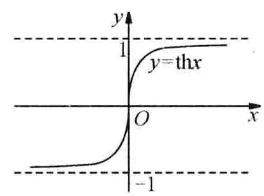
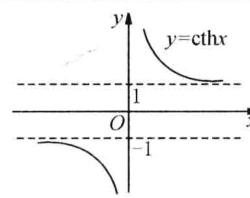
（续　表）

名　称	定义域及性质	
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$，$\left(-1\leqslant x\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y=\arccos x$，$(-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\pi)$	
	反正切函数 $y=\arctan x$，$\left(-\infty< x<+\infty,-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$(-\infty< x<+\infty,0< y<\pi)$	

双曲函数

名　称	定　义	图　形
双曲正弦	$y=\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 奇函数	

(续　表)

<table>
<tr><th>名　称</th><th>定　义</th><th>图　形</th></tr>
<tr><td>双曲余弦</td><td>$y=\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$
偶函数</td><td>
</td></tr>
<tr><td>双曲正切</td><td>$y=\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$
奇函数</td><td>
</td></tr>
<tr><td>双曲余切</td><td>$y=\mathrm{cth}x=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}=\dfrac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}$
奇函数</td><td>
</td></tr>
<tr><td>反双曲正弦</td><td>$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$</td><td rowspan="3">图略</td></tr>
<tr><td>反双曲余弦</td><td>$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$</td></tr>
<tr><td>反双曲正切</td><td>$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$</td></tr>
</table>

数列极限的定义

分　类		定　义
数列极限	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(有限)	$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\lvert x_n-a\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$	$\forall M>0,\exists N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\lvert x_n\rvert>M$

数列收敛的性质

唯一性	若 $\{x_n\}$ 收敛,则其极限必唯一
有界性	若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 有界(反之不真)
保号性	若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,其中 $A>0$(或 $A<0$),则存在 $N>0$,当 $n>N$ 时恒有 $x_n>0$(或 $x_n<0$)
保序性	若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,且当 n 充分大时有 $x_n\leqslant y_n(x_n<y_n)$,则 $A\leqslant B$
	注:反之,若 $A\leqslant B$,未必有 $x_n\leqslant y_n$ 成立
子数列收敛定理	数列 $\{x_n\}$ 收敛到 A 的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子数列也收敛且收敛到 A

函数极限的定义

分　类		定　义
函数极限	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$	$\forall M>0$, $\exists \delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,有 $\|f(x)-A\|>M$
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\forall \varepsilon>0$, $\exists X>0$,当 $\|x\|>X$ 时,有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$	$\forall M>0$, $\exists X>0$,当 $\|x\|>X$ 时,有 $\|f(x)\|>M$
单侧极限	左极限 $f(x_0-0)=A$	$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\Leftrightarrow\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,当 $-\delta<x-x_0<0$ 时,有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$
	右极限 $f(x_0+0)=A$	$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A\Leftrightarrow\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$,当 $0<x-x_0<\delta$ 时,有 $\|f(x)-A\|<\varepsilon$
注		$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$

函数极限的性质

唯一性	若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一
局部有限性	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则存在 $M>0$ 及 $\delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,有 $\|f(x)\|\leqslant M$
局部保号性	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,其中 $A>0$(或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,当 $0<\|x-x_0\|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $(f(x)<0)$)
保序性	设在 x_0 的某去心邻域内,$f(x)\leqslant g(x)$(或 $f(x)<g(x)$),且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则 $A\leqslant B$
归并原则	若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\{x_n\}$ 为 $f(x)$ 定义域内以 x_0 为极限的数列,$x_n\neq x_0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$

无穷小量与无穷大量的定义与性质

分　类	定　义	性　质
无穷小量	若变量 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$(或 ∞)时,极限为0,则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$(或 ∞)时的无穷小量,记作 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0(\text{或}\infty))$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$ 其中 $\alpha(x)=o(1)(x\to x_0)$
无穷大量	若变量 $\alpha(x)$ 在 $x\to x_0$(或 ∞)时,极限为 ∞,则称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$(或 ∞)时的无穷大量	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$(其中 $f(x)\neq 0$)

注:无界变量与无穷大量的区别:无穷大量是对任给定的正数,其自变量到某一时刻时,它的绝对值要大于该正数,无界变量并没有要求永远大于任意大的正数.

极限运算法则

运算类别	运算法则	
无穷小的运算	有限个无穷小量的和、差、积是无穷小量	
	有界量与无穷小量的积是无穷小量	
数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$	和差	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$
	积	$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$
	商	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$
函数极限 $\lim f(x) = A$ $\lim g(x) = B$	和差	$\lim(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
	积	$\lim(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$
	商	$\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$
复合函数的极限	$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x)) = A$，其中 $u(x)$ 与 $f(u(x))$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内定义且 $u(x) \neq u_0$	
四则运算公式的前提	① $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，$A,B$ 有限 ② $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内定义且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$，$A,B$ 有限	

极限存在的准则

数列极限存在准则	单调有界定理	单调递增有上界的数列必有极限 单调递减有下界的数列必有极限
	两边夹法则	给定数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$，满足 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$
	柯西收敛准则	数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当 $n > N, m > N$ 时，有 $\lvert x_n - x_m \rvert < \varepsilon$
函数极限存在准则	两边夹法则	在 $\mathring{U}(x_0)$ 内，$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$
	单侧极限判别法	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$

两个重要极限

基本形式	变　形	备　注
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$， 其中 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ 且 $f(x) \neq 0$	分子、分母中 $f(x)$ 形式要统一，包括正负号及系数

（续　表）

<table>
<tr><th>基本形式</th><th>变　形</th><th>备　注</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$</td><td>$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$</td><td rowspan="3">$f(x)$ 在形式上要统一，特别要注意正负号</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$
其中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ 且 $f(x)\neq0$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0}(1+f(x))^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)}$
其中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$</td></tr>
</table>

无穷小阶的比较

<table>
<tr><th colspan="2">前提条件</th><th>定　义</th><th>记　号</th></tr>
<tr><td rowspan="5">$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$
$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(x)$ 内定义且 $g(x)\neq0$（x_0 可为无穷）</td><td rowspan="4">$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$</td><td>$A=0$，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 高阶的无穷小</td><td>$f(x)=o(g(x))$
$(x\to x_0)$</td></tr>
<tr><td>$A=1$，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 等价的无穷小</td><td>$f(x)\sim g(x)$
$(x\to x_0)$</td></tr>
<tr><td>$A\neq0$，$A\neq1$，且有限，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的同阶的无穷小</td><td>可记作 $f(x)\sim Ag(x)$
$(x\to x_0)$</td></tr>
<tr><td>$A=\infty$，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 低阶的无穷小</td><td></td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=B$</td><td>$B\neq0$，且有限，称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的 k 阶的无穷小</td><td>可记作 $f(x)\sim Bg^k(x)$
$(x\to x_0)$</td></tr>
</table>

等价无穷小量的性质

分　类	性质与公式
等价无穷小的充要条件	$\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$（$x_0$ 可为 ∞）$\Leftrightarrow\beta(x)=\alpha(x)+o(\alpha(x))(x\to x_0)$
等价无穷小的代换公式	$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)(x\to x_0)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在（x_0 可为 ∞），则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$
等价无穷小的性质	自反性　$\alpha(x)\sim\alpha(x)(x\to x_0)$ 对称性　若 $\alpha(x)\sim\beta(x)(x\to x_0)$，则 $\beta(x)\sim\alpha(x)(x\to x_0)$ 传递性　若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)(x\to x_0)$，则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)(x\to x_0)$

常用等价无穷小($x\to0$)

<table>
<tr><td colspan="2">$\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim x$</td></tr>
<tr><td>$\ln(1+x)\sim x$</td><td>$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}(a>0,\ a\neq1)$</td></tr>
</table>

(续　表)

<table>
<tr><td colspan="3">$a^x - 1 \sim x\ln a\ (a > 0,\ a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$</td><td>$\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{x}{n}$</td><td>$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$</td></tr>
<tr><td>$x-\sin x \sim \frac{x^3}{6}$</td><td>$\tan x - x \sim \frac{x^3}{3}$</td><td>$\tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$</td></tr>
</table>

常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0(\lvert q \rvert < 1)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0(a>0)$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$

函数连续的定义与等价条件

<table>
<tr><th colspan="2">定　义</th><th>等价条件</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)$ 在点 x_0 处连续</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$</td><td rowspan="2">$f(x)$ 在 x_0 处连续
$\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续
$\Leftrightarrow f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0)$</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $\lvert x - x_0 \rvert < \delta$ 时，有 $\lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$ 在 (a,b) 内连续</td><td>$f(x)$ 在 (a,b) 内任一点处连续</td><td></td></tr>
</table>

间断点的定义与分类

<table>
<tr><th>定　义</th><th colspan="3">分　类</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$f(x)$ 的不连续点称为间断点</td><td rowspan="3">第一类间断点</td><td rowspan="2">可去间断点</td><td>$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 存在且相等，但 $f(x_0)$ 无定义</td></tr>
<tr><td>$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 存在且相等，$f(x_0)$ 有定义但 $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$</td></tr>
<tr><td>跳跃间断点</td><td>$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在，但 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$</td></tr>
<tr><td>第二类间断点</td><td colspan="2">$f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 至少有一个不存在</td></tr>
</table>

连续函数的运算

<table>
<tr><th>分　类</th><th>性　质</th></tr>
<tr><td>和、差、积、商的连续性</td><td>设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 x_0 处连续，则 $f(x) \pm g(x)$，$f(x)g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$($g(x) \neq 0$ 时) 均在 x_0 处连续</td></tr>
<tr><td>反函数的连续性</td><td>设 $f(x)$ 在区间 I_x 上严格单调且连续，则其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 必存在且在相应区间 $I_y = \{y \mid y = f(x),\ x \in I_x\}$ 上连续并具有相同的单调性</td></tr>
<tr><td>复合函数的连续性</td><td>设 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$，$u = u(x)$ 在 $x = x_0$ 处均连续，$f(u(x))$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则复合函数 $y = f(u(x))$ 在 $x = x_0$ 处连续</td></tr>
<tr><td rowspan="2">初等函数的连续性</td><td>基本初等函数在其定义域内是连续的</td></tr>
<tr><td>一切初等函数在其定义区间内是连续的</td></tr>
</table>

闭区间[a,b]上的连续函数及性质

定　义	性　质	
$f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续，在 $x=a$ 处右连续，在 $x=b$ 处左连续，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续	零点定理	$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$
	有界性	$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界
	最值定理	$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必达到最小值与最大值
	介值定理	$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，常数 c 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=c$
		$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，m,M 分别为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的最小值与最大值，$m\leqslant c\leqslant M$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=c$
	一致连续性定理	$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上一致连续

重、难点解答

1. 函数的定义域

(1) 如果不考虑函数的实际意义，是指使得函数表达式有意义的所有实数的集合，即自然定义域；

(2) 求复杂函数的定义域，就是求由简单函数定义域所构成的不等式组；

(3) 求复合函数定义域时，同时要使得函数满足函数复合的条件：内层函数的值域不超过外层函数的定义域.

2. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时，常常利用函数的表达式与所用字母无关的特性.

【例 1】 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a,b,c 为常数且 $|a|\neq|b|$，求函数 $f(x)$ 并证明它是奇函数.

分析　由 $f(x)$ 所满足的方程，无法直接求出 $f(x)$ 的表达式，但作代换令 $x=\frac{1}{t}$，可以得到新的方程；联立并消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，即可解出 $f(x)$，再利用奇函数定义即可证之.

解　在原方程中作代换 $x=\frac{1}{t}$，可得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+bf(t)=ct$，

即

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx,$$

与原方程联立，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，可解出 $f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$.

又

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right),\ f(x)+f(-x)=0,$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

3. 关于反函数

(1) 求 $y=f(x)$ 的反函数，首先由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，再把所得表达式中的 x 与 y 对换，即得所求函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$. 或者先把表达式 $y=f(x)$ 中的 x 与 y 对换，再解出 $y=f^{-1}(x)$；

(2) 对于分段函数的反函数，应当分段去求；

(3) 反函数的定义域为原来函数的值域.