



普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学 (一)

主编 董银丽



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学(一)

主 编 董银丽
副主编 任翠萍 吴 睿

 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学: 含习题集. 1/董银丽主编. —北京: 北京理工大学出版社, 2014. 8
ISBN 978 - 7 - 5640 - 9670 - 0

I. ①高… II. ①董… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 201524 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)
82562903 (教材售后服务热线)
68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京富达印务有限公司

开 本 / 787 毫米 × 1092 毫米 1/16

印 张 / 13.5

字 数 / 302 千字

版 次 / 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

总 定 价 / 29.80 元

责任编辑 / 张慧峰
文案编辑 / 张慧峰
责任校对 / 孟祥敬
责任印制 / 王美丽

前言

本书分为一、二两册,第一册包括一元函数微积分、空间解析几何和数学软件 MATLAB 的介绍;第二册包括多元函数微积分学、微分方程、级数.各章配有习题,书末附有习题答案.

教材编写中注重概念的表述形式,以使学生更好地理解微积分基本的思想.根据教学改革目标,本书在内容设计上注重数学的应用性介绍,让学生了解在专业知识领域中是如何运用数学这一工具解决问题的,有利于提升学生专业素质.

本书可作为高等学校本科高等数学课程的教材.

参加本书编写工作的有(按照编写章节次序介绍):西安欧亚学院任翠萍,负责编写第一章、第二章、第三章和第八章的内容;西安欧亚学院董银丽,负责编写第四章、第五章、第九章和第十章的内容;西安欧亚学院吴睿,负责编写第六章、第七章、第十一章和 MATLAB 的数学实验内容.本书的编写得到了学院领导、部门领导和同事的支持与鼓励,在此表示感谢!

限于编者水平,教材中存在的不足之处,希望广大读者批评指正.

编 者

第一章 函数、极限与连续	1
第一节 函数的概念与性态	1
第二节 数列的极限	8
第三节 函数的极限	10
第四节 无穷大量与无穷小量	13
第五节 极限的运算法则	15
第六节 两个重要极限	18
第七节 函数的连续性	20
总复习题一	24
第二章 导数与微分	26
第一节 导数的概念	26
第二节 函数的求导法则	30
第三节 高阶导数	33
第四节 隐函数的导数	34
第五节 函数的微分	37
总复习题二	41
第三章 导数的应用	43
第一节 微分中值定理	43
第二节 洛必达法则	46
第三节 函数的单调性与极值	49
第四节 函数的最值	53
第五节 函数曲线的凹凸性与拐点函数图形的描绘	58
第六节 曲线的弧微分与曲率	60
总复习题三	63
第四章 不定积分	66
第一节 不定积分的概念与性质	66
第二节 换元积分法(凑微分法)	71
第三节 简单有理函数和无理函数的积分法	76
第四节 分部积分法	79
第五节 三角函数的积分法	81
总复习题四	82
第五章 定积分	84
第一节 定积分的概念与性质	84

第二节 定积分的性质	92
第三节 微积分基本公式	94
第四节 定积分的换元积分法和分部积分法	99
第五节 广义积分	101
第六节 定积分的几何应用	105
第七节 定积分在经济学中的应用	112
第八节 定积分的物理应用	116
总复习题五	119
第六章 空间解析几何与向量代数	121
第一节 向量及其线性运算	121
第二节 空间直角坐标系及向量的坐标表示	123
第三节 数量积、向量积	127
第四节 平面及其方程	129
第五节 空间直线及其方程	132
第六节 曲面及其方程	136
第七节 空间曲线及其方程	139
总复习题六	142
附录 MATLAB 软件使用简介	143
习题参考答案	150

第一章 函数、极限与连续

17 世纪,数学在经历了两千多年的发展之后进入了一个被称为“高等数学时期”的新时代,微积分的创立更是这一时期最突出的成就之一.微积分研究的基本对象是定义在实数集上的函数.极限是研究函数的一种基本方法,而连续性则是函数的一种重要属性.因此,本章内容是整个微积分的基础.

第一节 函数的概念与性态

函数描述的是变量与变量之间的依赖关系,例如每天的气温随着时间的变化,圆的面积大小依赖于圆的半径,行驶的路程依赖于行驶的时间等.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果按照某种确定的法则, 对于每个 $x \in D$, 都有唯一的一个实数 y 与之对应, 则称为 y 是 x 的函数, 记做 $y=f(x)$. 自变量 x 的取值范围 D 称为函数的定义域, 因变量 y 的取值范围称为函数的值域, 记做 R_f .

函数可以由公式、表格、图形、语言叙述来表示, 例如散点图、心电图等.

函数的定义域应根据实际问题中问题的实际意义具体确定, 对于无实际背景的函数, 则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合为其定义域.

一、函数的简单性态

1. 函数的有界性

定义 2 函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 设区间 $I \subset D$, 如果存在常数 $M > 0$, 使得对于区间 I 内任意的 x 有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 否则, 称 $f(x)$ 在 I 上无界.

注: 有界函数的图形必位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

例如, $y=\sin x$ 是有界函数, 因为在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内, 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上无界.

2. 函数的单调性

定义 3 函数 $y=f(x)$, $x \in D$, 设区间 $I \subset D$, 若对区间 I 内任意的 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 有

(1) $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加;

(2) $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数, 单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间.

3. 函数的奇偶性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点 O 对称,任取 $x \in D$,如果

(1) $f(-x)=f(x)$,则函数 $y=f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x)=-f(x)$,则函数 $y=f(x)$ 为奇函数.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1 判断函数 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 的奇偶性.

解 函数的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -f(x),$$

故函数 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数.

奇偶函数的运算具有下列特点:

奇(偶)函数与奇(偶)函数的和仍为奇(偶)函数;奇(偶)函数与奇(偶)函数的乘积为偶函数,奇偶函数的乘积为奇函数.

4. 函数的周期性

定义 5 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数,如果存在 $T>0$,使得对于 D 上任意的 x 有 $(x \pm T) \in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数, T 是它的周期.

一般情况下,如果函数 $y=f(x)$ 的最小正周期为 T ,则函数 $y=f(ax+b)$ 的最小正周期为 $\frac{T}{|a|}$.

二、基本初等函数

1. 常值函数 $y=c$ (c 为常数)

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$,函数的图形是一条水平的直线.

2. 幂函数 $y=x^\mu$ ($\mu \in \mathbf{R}$)

其定义域和值域依 μ 的取值不同而不同,但是无论 μ 取何值,幂函数在 $x \in (0, +\infty)$ 内总有定义,图像都过 $(1,1)$ 点.

3. 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1$)

其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0, +\infty)$,其图像都过 $(0,1)$ 点,位于 x 轴上方.

4. 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1$)

其定义域为 $(0, +\infty)$,值域为 $(-\infty, +\infty)$.对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

在工程中,常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底,并记 $e^x=\exp x$, $\log_e x=\ln x$.

5. 三角函数

- (1) 正弦函数 $y = \sin x$, 定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = [-1, 1]$.
- (2) 余弦函数 $y = \cos x$, 定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $R = [-1, 1]$.
- (3) 正切函数 $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 定义域 $D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 值域 $R = (-\infty, +\infty)$.
- (4) 余切函数 $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, 定义域 $D: x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 值域 $R = (-\infty, +\infty)$.
- (5) 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, 定义域 $D: x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 值域 $R = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.
- (6) 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, 定义域 $D: x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 值域 $R = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

6. 反三角函数

- (1) 反正弦函数 $y = \arcsin x, x \in [-1, 1], y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (2) 反余弦函数 $y = \arccos x, x \in [-1, 1], y \in [0, \pi]$.
- (3) 反正切函数 $y = \arctan x, x \in \mathbf{R}, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}, y \in (0, \pi)$.

下面给出工程和物理问题中常用到的几类函数:

- (1) 双曲正弦 $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} (-\infty < x < +\infty)$, 它是奇函数, 其图像通过原点 $(0, 0)$ 且关于原点对称. 在 $\mathbf{R}$ 内单调增加(图 1-1-1).
- (2) 双曲余弦 $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} (-\infty < x < +\infty)$, 它是偶函数, 其图像通过点 $(0, 1)$ 且关于 y 轴对称, 在 $(-\infty, 0)$ 内单调减少; 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加(图 1-1-1).
- (3) 双曲正切 $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} (-\infty < x < +\infty)$, 它是奇函数, 其图像通过原点 $(0, 0)$ 且关于原点对称. 在 $\mathbf{R}$ 内单调增加(图 1-1-2).

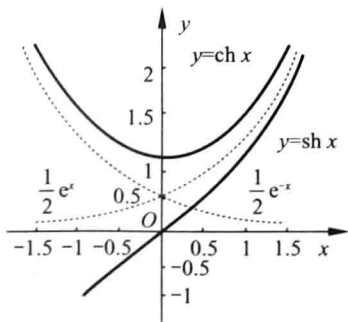


图 1-1-1

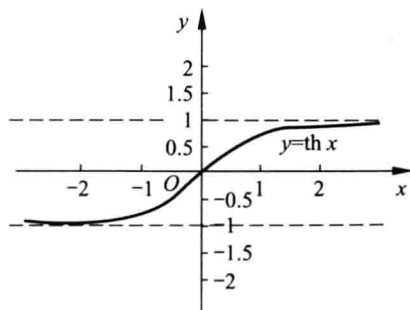


图 1-1-2

三、反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 若对于任意的 $y \in W$, 在 D 上有唯一确定的 x

与之对应,就可以得到一个新的函数:

$$x = f^{-1}(y)$$

称函数 $x = f^{-1}(y)$ 为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

注:(1) 反函数的定义域和值域分别是直接函数的值域和定义域.

(2) 直接函数 $y = f(x)$ 与反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(3) 根据反函数的定义,并不是任何一个函数都有反函数的.例如 $y = x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上就没有反函数,在 $[0, +\infty)$ 上有反函数 $x = \sqrt{y}$.

(4) 直接函数与反函数有相同的单调性.

例2 求函数 $y = 1 + \sqrt{e^x - 1}$ 的反函数.

解 $y = 1 + \sqrt{e^x - 1}$ 的定义域为 $x \geq 0$, 值域为 $y \geq 1$. 由 $y = 1 + \sqrt{e^x - 1}$, 得

$$x = \ln(y^2 - 2y + 2), \quad y \geq 1,$$

将 x, y 互换,得反函数

$$y = \ln(x^2 - 2x + 2), \quad x \geq 1.$$

四、复合函数

定义6 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 R_φ , 若 $D_f \cap R_\varphi \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数. x 称为自变量, u 称为中间变量, y 称为因变量. 这里 $\varphi(x)$ 称为内函数, $f(u)$ 称为外函数.

例3 将下列复合函数分解为基本初等函数.

$$(1) y = (\arctan \sqrt{x})^3; \quad (2) y = \sqrt{\lg\left(1 + \frac{1}{x}\right)};$$

$$(3) y = \sin^2 x; \quad (4) y = \sin x^2.$$

解 (1) $y = u^3, u = \arctan v, v = \sqrt{x}$;

$$(2) y = \sqrt{u}, u = \lg v, v = 1 + \frac{1}{x};$$

$$(3) y = u^2, u = \sin x;$$

$$(4) y = \sin u, u = x^2.$$

五、初等函数

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的,并且可以用一个解析式表达的函数称为初等函数.

六、几种常见的经济函数

1. 单利与复利

1) 单利计算公式

设初始本金为 p 元, 银行年利率为 r . 则第 n 年末的本利和为 $s_n = p(1 + nr)$.

2) 复利计算公式

设初始本金为 p 元, 银行年利率为 r . 则第 n 年末的本利和为 $s_n = p(1+r)^n$.

例 4 现有初始本金 100 元, 若银行年储蓄利率为 7%, 问:

- (1) 按单利计算, 3 年末的本利和为多少?
- (2) 按复利计算, 3 年末的本利和为多少?
- (3) 按复利计算, 需多少年能使本利和超过初始本金的一倍?

解 (1) 已知 $p=100, r=0.07$, 由单利计算公式得

$$s_3 = p(1+3r) = 100 \times (1+3 \times 0.07) = 121(\text{元}).$$

即 3 年末的本利和为 121 元.

(2) 由复利计算公式得

$$s_3 = p(1+r)^3 = 100 \times (1+0.07)^3 \approx 122.5(\text{元}).$$

即 3 年末的本利和为 122.5 元.

(3) 若 n 年后的本利和超过初始本金的一倍, 即要 $s_n = p(1+r)^n > 2p$.

解得

$$n > \ln 2 / \ln 1.07 \approx 10.2.$$

即需 11 年本利和可超过初始本金一倍.

2. 复利付息

因每次支付的利息都记入本金, 故年末的本利和与支付利息的次数是有关系的. 设初始本金为 p 元, 年利率为 r , 若一年分 m 次付息, 则一年末的本利和为

$$s = p \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m.$$

第 n 年末的本利和为

$$s_n = p \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mn}.$$

3. 需求函数、供给函数与市场均衡

需求函数是指在某一特定时期内, 市场上某种商品的各种可能的购买量和决定这些购买量的诸因素之间的数量关系.

假定其他因素(如消费者的货币收入、偏好和相关商品的价格等)不变, 则决定某种商品需求量的因素就是这种商品的价格. 此时, 需求函数表示的就是商品需求量和价格这两个经济量之间的数量关系:

$$q = f(p).$$

其中, q 表示需求量, p 表示价格. 需求函数的反函数 $p = f^{-1}(q)$ 称为价格函数, 习惯上将价格函数也统称为需求函数.

例如, $q_d = ap + b (a < 0, b > 0)$ 称为线性需求函数(见图 1-1-3).

供给函数是指在某一特定时期内, 市场上某种商品的各种可能的供给量和决定这些供给量的诸因素之间的数量关系.

假定生产技术水平、生产成本等其他因素不变, 则决定某种商

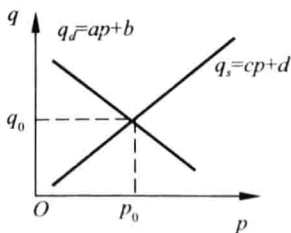


图 1-1-3

品供给量的因素就是这种商品的价格. 此时, 供给函数表示的就是商品供给量和价格这两个经济量之间的数量关系:

$$s = f(p).$$

其中, s 表示供给量, p 表示价格.

例如, $q_s = cp + d (c > 0)$ 称为线性供给函数(图 1-1-3).

对一种商品而言, 如果需求量等于供给量, 则这种商品就达到了**市场均衡**. 以线性需求函数和线性供给函数为例, 令

$$q_d = q_s,$$

$$\text{即} \quad ap + b = cp + d,$$

$$\text{故} \quad p = \frac{d-b}{a-c} \equiv p_0,$$

$$q_0 = ap_0 + b = cp_0 + d.$$

这个价格 p_0 称为该商品的**市场均衡价格**, q_0 为**市场均衡数量**.

根据市场的不同情况, 需求函数与供给函数还有二次函数、多项式函数与指数函数等. 但其基本规律是相同的, 都可找到相应的**市场均衡点** (p_0, q_0) .

4. 成本函数

成本函数表示费用总额与产量(或销售量)之间的依赖关系, 产品成本可分为**固定成本**和**变动成本**两部分. 所谓固定成本, 是指在一定时期内不随产量变化的那部分成本; 所谓变动成本, 是指随产量变化而变化的那部分成本. 一般地, 以货币计值的(总)成本 C 是产量 x 的函数, 即

$$C = C(x), \quad x \geq 0.$$

称其为**成本函数**. 当产量 $x=0$ 时, 对应的成本函数值 $C(0)$ 就是产品的固定成本值. 其图像称为**成本曲线**.

设 $C(x)$ 为成本函数, 称 $\bar{C} = \frac{C(x)}{x} (x > 0)$ 为**单位成本函数**或**平均成本函数**.

例 5 某服装有限公司每年的固定成本为 10 000 元. 要生产某个式样的服装 x 件, 除固定成本外, 每套(件)服装要花费 40 元. 即生产 x 套这种服装的变动成本为 $40x$ 元.

(1) 求一年生产 x 套服装的总成本函数.

(2) 生产 100 套服装的总成本是多少? 400 套呢? 并计算生产 400 套服装比生产 100 套服装多支出多少成本.

解 (1) 因 $C(x) = C_{\text{固}} + C_{\text{变}}$, 所以总成本为

$$C(x) = 40x + 10\,000, \quad x \in [0, +\infty).$$

(2) 生产 100 套服装的总成本是 $C(100) = 40 \times 100 + 10\,000 = 14\,000$ (元).

生产 400 套服装的总成本是 $C(400) = 40 \times 400 + 10\,000 = 26\,000$ (元).

生产 400 套服装比生产 100 套服装多支出成本是

$$C(400) - C(100) = 26\,000 - 14\,000 = 12\,000 \text{ (元)}.$$

5. 收入函数与利润函数

销售某种产品的收入 R 等于产品的单位价格 P 乘以销售量 x , 即 $R = P \cdot x$, 称其为**收入**

函数. 而销售利润 L 等于收入 R 减去成本 C , 即 $L=R-C$, 称其为利润函数.

当 $L=R-C>0$ 时, 生产者盈利;

当 $L=R-C<0$ 时, 生产者亏损;

当 $L=R-C=0$ 时, 生产者盈亏平衡, 使 $L(x)=0$ 的点 x_0 称为盈亏平衡点(又称为保本点).

例 6 参看例 5, 该有限公司销售 x 套服装所获得的总收入按每套 100 元计算, 即收入函数 $R(x)=100x$.

(1) 在同一坐标系中画出 $R(x)$ 、 $C(x)$ 和利润函数 $L(x)$ 的图形.

(2) 求盈亏平衡点.

解 (1) $R(x)=100x$ 和 $C(x)=40x+10\,000$ 的图形如图 1-1-4 所示.

当 $R(x)$ 在 $C(x)$ 下方时, 将出现亏损; 当 $R(x)$ 在 $C(x)$ 上方时, 将有收益.

利润函数

$$\begin{aligned} L(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 100x - (40x + 10\,000) \\ &= 60x - 10\,000 \end{aligned}$$

$L(x)$ 的图形用虚线表示. x 轴下方的虚线表示亏损, x 轴上方的虚线表示盈利.

(2) 为求盈亏平衡点, 需解方程

$$R(x) = C(x),$$

即

$$100x = 40x + 10\,000,$$

解之得 $x=166\frac{2}{3}$.

所以盈亏平衡点约为 167. 预测盈亏平衡点通常要进行充分考虑, 因为公司为了获利最大, 必须有效经营.

例 7 某电器厂生产一种新产品, 在定价时不单是根据生产成本而定, 还要依据各销售单位的出价, 即他们愿意购买的价格而定. 根据调查得出需求函数为 $x=-900P+45\,000$. 该厂生产该产品的固定成本是 270 000 元, 而单位产品的变动成本为 10 元. 为获得最大利润, 出厂价格应为多少?

解 收入函数为 $R(P)=P \cdot (-900P+45\,000)=-900P^2+45\,000P$.

利润函数为

$$L(P) = R(P) - C(P) = -900(P^2 - 60P + 800) = -900(P-30)^2 + 90\,000.$$

由于利润是一个二次函数, 容易求得, 价格 $P=30$ 元时, 利润 $L=90\,000$ 元为最大利润.

在此价格下, 可望销售量为 $x=-900 \times 30 + 45\,000 = 18\,000$ (单位).

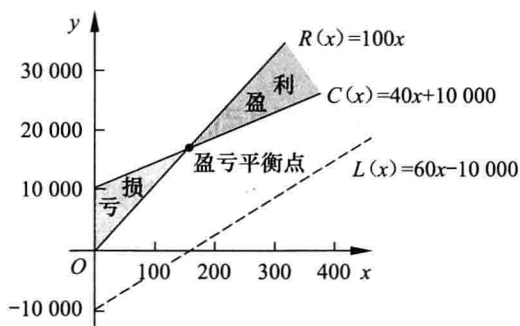


图 1-1-4

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = \frac{|x|}{x}; \quad (2) y = \ln \frac{1}{1-x} + \sqrt{x+6}; \quad (3) f(x) = \lg(2 - \lg x).$$

2. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \frac{1-x}{1+x}; \quad (2) y = 2\sin 3x; \quad (3) y = 6\log_4 x.$$

3. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台的, 每多订 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
- (2) 将厂房所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数;
- (3) 某一商行订购了 1 000 台, 厂方可获利润多少?

第二节 数列的极限

一、极限概念的引入

极限是研究变量的变化趋势的基本工具, 高等数学中许多基本概念如连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限的基础上的. 极限方法是研究函数的一种最基本的方法.

二、数列的定义

按照一定规律排列的无穷多个数 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 称为数列, 记做 $\{a_n\}$, 其中每个数称为一个项, a_n 称为通项或者一般项.

例 1 (1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

(2) $\{2^n\}: 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$

(3) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

(4) $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$

(5) $\left\{1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right\}: 2, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \dots, 1 + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \dots$

(6) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$

利用散点图和列表, 观察当项数 n 无限增大时, 通项 a_n 的变化趋势.

解 对于数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, 观察得下表:

n	1	100	1 000	10 000	...
$\frac{1}{n}$	1	0.01	0.000 1	0.000 01	...

由表看出, 当 n 无限增大时, $a_n = \frac{1}{n}$ 无限接近于常数 0. 其他数列依照同样方法观察可得相应的结果, 在此不再详述.

结论: 上面的例题中, 当项数 n 无限增大时, 通项 a_n 有两种变化趋势:

当 n 无限增大时, a_n 无限接近于某个常数, 例如 (1), (3), (5), (6);

当 n 无限增大时, a_n 不趋于任何常数, 例如 (2), (4).

三、数列极限及有界性

定义 1 设有数列 $\{x_n\}$ 和常数 a , 如果当 n 无限增大时, x_n 无限接近常数 a , 则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记做

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \text{或 } x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty).$$

如果一个数列没有极限, 就称该数列是发散的.

例 1 中 (1), (3), (5), (6) 为收敛数列; (2), (4) 为发散数列.

定义 2 设有数列 $\{x_n\}$, 若存在正数 M , 使对一切 $n=1, 2, \dots$, 有 $|x_n| \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是有界的, 否则称它是无界的.

对于数列 $\{x_n\}$, 若存在常数 M , 使对 $n=1, 2, \dots$, 有 $x_n \leq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有上界; 若存在常数 M , 使对 $n=1, 2, \dots$, 有 $x_n \geq M$, 则称数列 $\{x_n\}$ 有下界.

显然, 数列 $\{x_n\}$ 有界的充要条件是 $\{x_n\}$ 既有上界又有下界.

例如, 数列 $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ 有界; 数列 $\{n^2\}$ 有下界而无上界; 数列 $\{-n^2\}$ 有上界而無下界; 数列 $\{(-1)^n n - 1\}$ 既无上界又无下界.

定义 3 数列 $\{x_n\}$ 的项若满足 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调增加数列; 若满足 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$, 则称数列 $\{x_n\}$ 为单调减少数列.

定理 1 收敛的数列必有界.

推论 1 无界的数列必发散.

推论 2 单调有界数列必收敛.

例 2 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

例 3 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

解 由于 $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \rightarrow \infty$, $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \rightarrow 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0$.

习题 1-2

1. 数列 $\{x_n\}$ 的一般项 x_n 如下所示, 观察一般项 x_n 的变化趋势, 写出数列的极限.

(1) $x_n = \frac{1}{2^n}$; (2) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; (3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;

(4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$; (5) $x_n = (-1)^n n$.

2. 求数列极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+(-1)^n}{n}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{2n^2+5}$; (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-5} - \sqrt{n})$;

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}; \quad (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a}}{n}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n});$$

$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} \right).$$

第三节 函数的极限

一般地,函数 $y=f(x)$ 中的自变量 x 总是在某个实数集合中变化的,当 x 处于某一变化过程中时,函数值 $y=f(x)$ 也随之发生变化. 函数极限就是研究在自变量的各种变化过程中函数值的变化趋势的.

一、自变量趋于无穷大时函数的极限

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ ($a > 0$) 内有定义, 如果当 $|x|$ 无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A (即 $|f(x) - A| \rightarrow 0$), 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限. 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

可以类似定义以下两个极限:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \quad \text{和} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

例 1 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

解 函数图像如图 1-3-1, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 相应的函数值趋于 1; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 相应的函数值同样趋于 1, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何意义如图 1-3-2 所示:

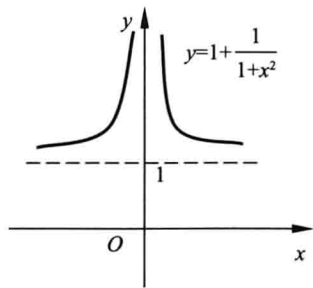


图 1-3-1

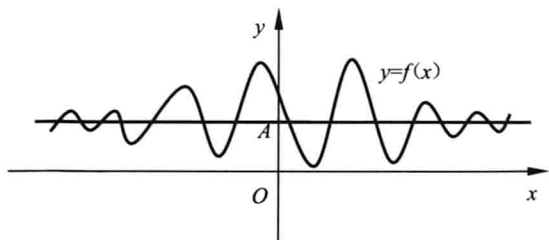


图 1-3-2

定理 1 设函数 $f(x)$ 当 $|x| > M$ (M 为某一正数) 时有定义, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 的极限不存在.

二、自变量趋于有限值时函数的极限

考察函数 $f(x) = \frac{x^4 - 4}{3(x - 2)}$ 当 x 趋于 2 时的变化趋势.

从图 1-3-3 不难看出, 虽然 $f(x)$ 在 $x=2$ 处无定义, 但当 $x \neq 2$ 而趋于 2 时, 对应的函数值 $f(x) = \frac{1}{3}(x+2)$ 能无限地趋于常数 $\frac{4}{3}$.

我们在研究当 x 趋近于 2 时函数 $y = \frac{x^4 - 4}{3(x - 2)}$ 的变化趋势时, 并不关注函数在 $x=2$ 处是否有定义, 而仅关心函数在 $x=2$ 的邻域 ($x \in \overset{\circ}{U}(2, \delta)$) 里的函数值的变化趋势, 也即我们认为当 $x \rightarrow 2$ 时隐含一个条件: $x \neq 2$. 因此, 当 $x \rightarrow 2$ 时,

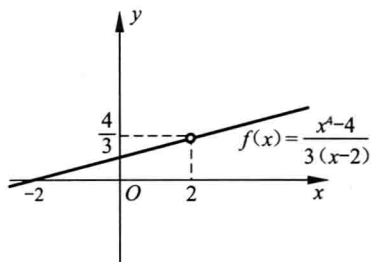
$$y = \frac{x^4 - 4}{3(x - 2)} \rightarrow \frac{4}{3}.$$


图 1-3-3

自变量 x 趋于一点 x_0 有以下三种情形: x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 , 记为 $x \rightarrow x_0^+$; x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 , 记为 $x \rightarrow x_0^-$; x 从 x_0 的两侧同时趋于 x_0 , 记为 $x \rightarrow x_0$.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 (点 x_0 可以除外) 有定义, 如果当自变量 x 无限趋近于 x_0 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A (即 $|f(x) - A| \rightarrow 0$), 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

思考: 根据定义, 考察极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 是否存在.

定义 3 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内 (点 x_0 可以除外) 有定义,

(1) 如果 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以常数 A 为极限, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$;

(2) 如果 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0 时, $f(x)$ 以常数 A 为极限, 则称常数 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0^+) = A$.

左极限和右极限统称为单侧极限.

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左极限和右极限存在并且相等, 即 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$.
即有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

例 4 验证 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 不存在.