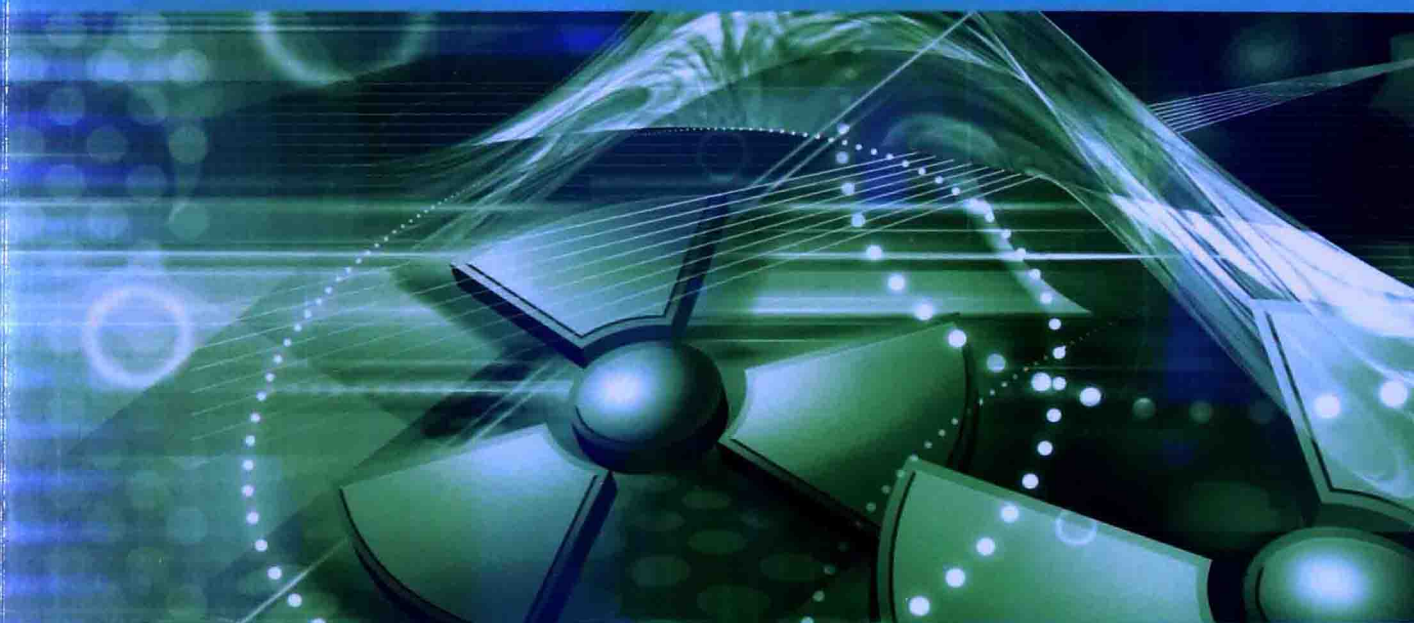




普通高等教育“十二五”规划教材



现代控制理论基础 (第二版)

宋丽蓉 邢灿华 主编



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS



普通高等教育“十二五”规划教材

现代控制理论基础

(第二版)

主 编 宋丽蓉 邢灿华
副主编 刘美俊
编 写 刘 坤 周 磊
主 审 黄 坚 孙扬声



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。

本书是针对应用型本科及各类成人高等教育而编写的。为了简单明了地表述现代控制理论的基本概念，本书仅以线性定常系统作为讨论对象。本书主要介绍了线性控制系统的状态空间描述、线性控制系统的状态空间分析、线性控制系统的能控性和能观测性、控制系统的稳定性分析以及状态反馈和状态观测器。

本书可作为自动化类等相关专业的教学用书，也可作为其他相近专业的读者和工程技术人员学习和参考用书。

图书在版编目 (CIP) 数据

现代控制理论基础/宋丽蓉，邢灿华主编. —2 版. —北京：中国电力出版社，2015. 2

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5123 - 7111 - 8

I. ①现… II. ①宋… ②邢… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 014821 号

中国电力出版社出版、发行

(北京市东城区北京站西街 19 号 100005 <http://www.cepp.sgcc.com.cn>)

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2006 年 2 月第一版

2015 年 2 月第二版 2015 年 2 月北京第七次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 13 印张 319 千字

定价 27.00 元

敬告读者

本书封底贴有防伪标签，刮开涂层可查询真伪
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

前 言

本书是在普通高等教育“十五”规划教材《现代控制理论基础》的基础上,根据我国高等教育的发展形势和对人才培养新的需求,结合前期教材的使用情况而编写的。

近年来,计算机技术的进一步飞速发展为现代控制理论的应用提供了更好的基础和平台,该理论的应用也越来越广泛,理论本身也在不断发展和完善,现代控制理论的基础也越显重要。

本书对现代控制理论的核心基础——状态空间分析法的基本概念和分析方法作了简要的介绍。为了简单明了地表述现代控制理论的基本概念,本书仅以线性定常系统作为讨论对象。

本书除保留了前一版突出物理概念、简明扼要等特点外,更加突出了理论的应用;另外,增加了绪论,使读者能较全面快捷地了解现代控制理论的概貌及其与经典控制理论的异同;增加了许多例题,体现了根据使用者的特点,将抽象叙述具象化的思路;还增加了习题解答,方便自学。

读者在阅读本书之前,需掌握线性代数和经典自动控制理论的基本概念。

本书由南京工程学院宋丽蓉老师和邢灿华老师任主编,宋丽蓉老师编写了绪论和第一章以及全书的统稿,南京工程学院的刘坤老师编写了第二章,邢灿华老师编写了第三章以及附录、习题解答和 MATLAB 的内容,厦门理工学院刘美俊老师任副主编,编写了第四章,南京工程学院周磊老师编写了第五章。本书由南京工程学院黄坚教授、华中科技大学孙扬声教授主审,在此表示衷心感谢。

限于编者水平,加之时间较紧,书中难免有不妥和疏漏之处,恳请广大读者和专家批评指正。

编 者

2015 年 1 月

目 录

前言

绪论	1
第一章 线性控制系统的状态空间描述	6
第一节 控制系统的状态空间表达式	6
第二节 经典数学模型转化为状态空间表达式	17
第三节 状态空间表达式转换为传递函数矩阵	33
第四节 状态方程的线性变换	38
第五节 离散系统的状态空间表达式	52
第六节 MATLAB 用于状态空间描述	59
习题	62
第二章 线性控制系统的状态空间分析	65
第一节 线性连续系统的状态空间分析	65
第二节 状态转移矩阵的几种算法	74
第三节 线性离散系统的状态空间分析	80
第四节 MATLAB 用于状态空间分析	85
习题	87
第三章 线性控制系统的能控性和能观测性	90
第一节 线性连续系统的能控性	90
第二节 线性连续系统的能观测性	95
第三节 线性定常离散系统的能控性和能观测性	100
第四节 对偶原理	102
第五节 系统的结构分解	105
第六节 能控标准型和能观测标准型	113
第七节 MATLAB 用于能控性能观测性分析	118
习题	122
第四章 控制系统的稳定性分析	125
第一节 李雅普诺夫稳定性定义	125
第二节 李雅普诺夫稳定性定理	128
第三节 线性系统李雅普诺夫稳定性分析	137
第四节 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	141
第五节 基于 MATLAB 的李雅普诺夫稳定性分析	149
习题	150

第五章 状态反馈和状态观测器.....	153
第一节 线性系统的状态反馈和输出反馈.....	153
第二节 闭环系统的极点配置.....	156
第三节 镇定问题.....	161
第四节 线性系统的解耦.....	163
第五节 状态观测器.....	168
第六节 状态反馈和状态观测器的应用.....	173
第七节 MATLAB 用于极点配置和状态观测器	177
习题.....	179
附录 1 矩阵的基础知识	182
附录 2 MATLAB 应用简介	187
部分习题参考答案.....	193
参考文献.....	201

绪 论

一、控制理论的形成及其发展

控制理论的形成和发展来自于控制工程的实际需求,同时理论又反过头来指导和促进了控制技术的进步。

一般将控制理论的形成和发展分为三个阶段。

1. 经典控制理论阶段

1769年,英国人瓦特设计出离心式飞锤调速器,并应用于其发明的蒸汽机,这是人类比较自觉地运用反馈原理来设计控制装置的最早实例之一。实际使用中,遇到了如何才能平稳运行的问题,这就需要理论的指导。1868年,英国数学家麦克斯韦发表论文,对该系统进行了分析,提出系统的动态性能可由相应的微分方程来描述,其稳定性则与方程的解相关。

对于线性系统,可用拉普拉斯变换将描述它的微分方程变换为代数方程求解。英国人劳斯和德国人赫尔维茨分别于1875年和1895年提出了根据代数方程系数来判别线性系统稳定性的准则。在此期间,俄国人李雅普诺夫于1892年发表专著,提出可用李雅普诺夫(能量)函数的正定性及其导数的负定性来判别系统稳定性的准则,创立了动力学系统的一般稳定性理论。

20世纪20~30年代,电子技术的快速发展促进了自动控制技术及其理论的发展。美国人奈奎斯特和伯德在贝尔实验室研究电话系统和电子反馈放大器。1932年,奈奎斯特提出了根据频率响应判断反馈系统稳定性的奈奎斯特判据;1948年,伯德提出了频率响应分析法,即伯德图法;同年,美国人伊文思提出了另一种图解分析法,即根轨迹法;这两种方法都是图解的方法,避免了求解高阶方程,分析过程也直观简便。还是在这一年,美国著名科学家韦纳出版了《控制论——关于在动物和机器中控制和通信的科学》一书,推广了反馈的概念,系统论述了控制理论的一般原理和方法。一般情况下,也将该书的出版作为控制学科诞生的标志。

从20世纪30年代初到50年代末,逐步发展形成了以反馈控制为主题的经典控制理论。研究的对象主要是单变量、线性定常的连续系统,主要数学工具为拉普拉斯变换,分析方法有时域法、根轨迹法和频率法。对于非线性系统的分析,在一定条件下,采用线性化方法可以将其近似处理成线性系统;针对某些特殊情况下的非线性,则主要采用相平面法和描述函数法。

经典控制理论存在两个突出的问题:其一,应用范围有限,它只适于单变量的线性系统;其二,用它来综合设计系统时,只能按要求的性能指标来“试凑”,不能寻得某项指标的“最优”。

2. 现代控制理论阶段

20世纪50年代,航空航天事业快速发展,研究对象往往是多变量、非线性、时变、离散的系统,对控制技术提出了新的要求,而计算机技术的发展也为新理论的产生奠定了基

础。于是有了现代控制理论的基础,也是重要的组成部分——线性系统理论。它能解决“多变量”的问题,并能方便地推广到时变系统和离散系统。而关于非线性系统分析,也引入了微分几何、李代数、非线性动力学等方法并有了很大的进展,但依然没有找到一种有效的一般分析方法。

如何从“满足”性能指标,发展到在给定的性能指标和限制条件下,使系统性能在一定意义下达到最优,这就产生了最优控制理论。从某种意义上讲,现代控制理论就是围绕“最优”控制来展开的。

1956年,美国人贝尔曼提出了寻求最优控制的动态规划。1958年,美国人卡尔曼提出了递推估计的自动优化控制,1960年,他发表了“关于控制系统的一般理论”等论文,陈述了优化问题的新观点,引入状态空间分析法来分析系统,提出了能控性、能观测性、最优调节器以及卡尔曼滤波等新概念。1961年,前苏联学者庞特里亚金证明了极大值原理,为系统研究最优轨迹控制奠定了理论基础。

控制中遇到的另外一个问题是:当被控对象的结构及参数在事先不可预知并随时间发生变化时,如何使系统保持原有的性能?解决这一问题的一种思路是:通过测量相关信息并进行处理之后,根据被控对象的变化,在线修改控制器的结构和参数,以保持系统的性能,这就是自适应控制。

20世纪50~60年代,自适应控制得到了迅速发展。1967年瑞典人阿斯特勒姆提出了以最小二乘法为基础的系统辨识,解决了线性定常系统的参数估计问题,他和法国人朗道等一起,为自适应控制理论作出了重要贡献。

这一时期最主要的成果研究是:以状态空间分析法为基础内容,形成了以极大值原理和动态规划为主要方法的最优控制;以卡尔曼滤波理论为核心的最佳估计;基于最小二乘法的系统辨识以及自适应控制。

解决被控对象的结构及参数在事先不可预知并随时间发生变化这一问题的另一种思路就是鲁棒控制,即在系统设计的时候就考虑了被控对象结构和参数的变化问题,设计的控制器“以不变应万变”,能在被控对象变化时,保持系统性能不变。

20世纪70年代末到80年代初,基于输入/输出或频率分析设计的方法有了新的进展,这种方法和鲁棒控制有较好的结合,即允许对所有镇定控制器参数化,并可从中选择其性能在所有频率范围内均一致符合要求的一个控制器。鲁棒控制中的 H_∞ 方法是这个年代最重要的成果之一。

3. 智能控制和复杂系统理论阶段

当系统的规模越来越大,结构越来越复杂,特别是应用范围除了复杂的工程系统之外,还涉及社会、经济以及管理等其他非工程系统时,原有的理论难以应对这些问题。于是,有了相应的大系统理论和复杂系统理论。复杂系统理论主要针对大型及复杂的工程、社会、经济、管理等系统,进行相关的控制理论研究。

在工程实际中,被控对象往往是复杂的、不确定的,相应的数学模型难以精确地描述其动力学特征。有一种观点认为,控制效果的好坏取决于被控对象数学模型的精确与否;另一种观点则认为,可以通过反馈来减小包括模型误差在内的不确定性的影响,关键是从控制理论来保证控制的鲁棒性,而不是依赖精确的模型。实际上,在不同的应用场合会各有侧重。例如,在航天控制中,精确的模型显得非常重要;而在过程控制中,难以得到精确的模型,

因而更依赖于从控制器的设计理论来保证控制的效果。

在无法获取确定的精确数学模型的情况下,如何保证系统的控制性能,这是又一个重要的问题。现代控制理论是基于被控对象精确模型的,因而显得无能为力。而智能控制则无需精确的模型,因而是解决这一问题的利器。

智能控制是指模仿人类智能的非传统控制方法。它包括模仿人类思维模式的模糊控制,模拟人类大脑神经系统结构的神经网络控制,仿照人类处理问题经验的专家系统等。智能控制不基于被控对象的精确数学模型,有些还有自学习能力。

20世纪60年代中期,出现了用基于计算机的数字控制器来代替模拟控制器的直接数字控制DDC,用计算机来确定最优设定值的计算机监督控制SCC。由此,推动了对各种控制算法和采样周期选择的研究。

20世纪60~70年代以来,一方面计算机控制及相关理论得到了快速发展;另一方面,控制理论与计算技术、人工智能等其他学科交叉渗透,形成了智能控制和大系统理论(后发展为复杂系统理论)。

二、现代控制理论的主要分支

随着社会生产力的不断发展以及控制理论应用范围的不断扩大,新的问题将不断涌现,这将推动控制理论的发展,新的理论分支也将随之产生。

构建一个动态系统需要一些基本的步骤,由这些步骤可以引出现代控制理论的主要分支。

1. 线性系统理论(基本规律的研究)

在构建任何一个动态系统时,都需要对其运动规律及改进措施进行研究。线性系统理论主要研究在外部作用下线性系统状态的变化规律及其改变的措施,揭示系统内部结构、参数和性能之间的关系。其内容主要包括系统的状态空间描述、能控性、能观测性、稳定性分析以及状态反馈、极点配置和状态观测器等内容。线性系统理论是现代控制理论的基础,也是应用最广的部分。

2. 建模及系统辨识

现代控制理论中,要对动态系统进行分析 and 综合设计,需要先建立能反映系统各变量间关系的数学模型——状态空间表达式。如果不能通过解析的方法建立模型,就需要采用系统辨识的方法来建立模型。系统辨识就是通过系统的输入、输出数据来确定其模型的过程。如果模型的结构已经确定,只是其参数有待确定,则系统辨识成为参数估计问题。

3. 最优滤波理论(信号的处理)

如何从被噪声污染的信号中重构出原信息,以利于进一步的控制,是现代控制理论的一个重要分支。该理论也应用于需要对信号进行处理的其他场合。最优滤波理论也称最佳估计理论,即运用统计的方法,从被噪声等污染的数据中获得原有用信号的最优估计值。韦纳滤波理论是按均方意义的最佳滤波,仅针对平稳随机过程;卡尔曼滤波理论则是运用状态空间法设计的最佳滤波器,可适合于非平稳过程。

4. 控制的综合

如何形成系统的控制规律以达到预想的控制效果就是控制的综合,它或多或少与上述理

论分支有关。控制规律主要有:

(1) 最优控制。最优控制是针对确定的被控对象及其环境,在满足一定约束条件下,寻求最优控制规律,使得给定的性能指标(目标函数)取得极值。其主要方法有庞特里亚金的极大值原理、贝尔曼的动态规划以及各种广义梯度描述的优化算法等。

(2) 自适应控制。自适应控制是针对不确定的被控对象及其环境,自动辨识系统的模型,并据此调整控制规律,以保持系统的最佳控制性能。自适应控制可分为模型参考自适应和自校正控制两种基本类型。

(3) 鲁棒控制。系统的鲁棒性就是其健壮性,是指系统在一定参数摄动下维持某些性能的特性。鲁棒控制的着重点是系统的稳定性和可靠性。一般情况下,系统并不工作在最优状态。按鲁棒控制理论进行设计,可使系统保持良好的性能而不受模型与信号中不确定性因素的影响。

(4) 智能控制。智能控制可针对模型不确定、高度非线性以及有复杂任务要求的系统。智能控制是传统控制理论的发展,但又突破了传统控制理论中被控对象有明确的数学描述,控制目标是可以数量化的限制。智能控制是模仿人类智能来进行控制的,虽然理论还不够成熟,但在实际中已得到广泛的应用。

针对不同的应用场合,还有多变量控制、随机控制、分布参数控制、离散事件控制以及非线性控制等专项研究。

三、现代控制理论的应用现状及前景

现代控制理论的应用基础及环境是数字计算机及相应的计算技术。随着计算机技术的发展,现代控制理论才有了较为广阔的应用空间。目前,现代控制理论的应用已经涉及许多行业。

现代控制理论最典型的实验室应用就是倒立摆的控制,如采用经典控制理论来实现这种控制将很难达到理想的控制效果。

现代控制理论最成功的应用领域是空间工程。例如,用于飞机,包括航天飞机的数字飞行控制系统就是一种典型的应用;在船舶自动驾驶仪中也有很好的应用。

在电力行业中,一种成功的应用就是电力生产管理控制。当水电、风电以及太阳能发电等供电电源受环境影响而不确定,用电负荷也不确定时,如何以最小代价满足电力需求,就是此应用所要完成的任务。另外,在有源电力滤波器中的应用也取得了良好的效果。

在石油化工、钢铁、水泥等生产过程控制中也得到了应用。这是一种需要对多变量进行控制的场合,许多工程实例中都采用了多变量的自适应控制策略。

在建筑行业中,也用到了现代控制理论。例如,对高层建筑采用主动阻尼系统,对结构主动控制,以减少建筑在承受强风时的动态漂移。

在机电行业中也有许多应用,如机器人、汽车发动机、内热机、交流电机的控制等。

在医药行业中的一种成功应用就是给药速率控制系统的构建。

现代控制理论能够解决一些运用经典控制理论解决不了的问题,但是它也有一些局限性。因为现代控制理论和数学的关联度很强,对系统精确数学模型的依赖程度比较高,故在一些难以获取系统精确数学模型及模型不确定的场合,其应用效果不太理想。因此,前面提到的智能控制在这些方面得到了快速的发展。

四、关于本书

本书着重介绍现代控制理论的基本内容，即线性系统理论的主要内容。它主要面向应用型本科院校，力图使重点放在基本理论及其应用的介绍上。书中尽量减少纯数学的推导，加强物理概念的阐述。本书前一版已使用多年，在此基础上做了进一步的修改，相信将更加贴近应用型本科院校的教学。

第一章 线性控制系统的状态空间描述

系统的数学模型有两种基本类型：一种是描述系统输入、输出特性的。这种描述将系统看作一个“黑箱”，只反映系统输入、输出变量间的关系，即系统的外部特性描述，而不能表征系统内部各独立变量的变化，因而不能包含系统的所有信息，这种描述只是对系统的一种不完全描述。经典控制理论中的微分方程或传递函数就属于这种类型。另一种则反映系统输入、输出变量与内部状态变量之间的关系，揭示系统内在的运动规律，包含系统动态性能的全部信息，这就是系统的状态空间描述，它是对系统的完全描述。现代控制理论中的状态空间表达式就是这样一种描述。

第一节 控制系统的状态空间表达式

一、系统状态空间描述的基本概念

1. 状态和状态变量

状态：系统在时域中的行为或运动信息的集合。

状态变量：能完全表征系统状态的一组（最小个数）独立变量。对于 n 阶系统，必须由 n 个独立变量组成状态变量组。状态变量的选取不具有唯一性。状态变量常用符号 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ 表示。

当给定了状态变量在初始时刻 $t=t_0$ 时的值，又已知 $t \geq t_0$ 时系统输入的时间函数，则系统在 $t \geq t_0$ 任何瞬时的行为就完全而且唯一地确定了。

2. 状态向量和状态空间

状态向量：将描述系统状态的 n 个状态变量 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\dots$, $x_n(t)$ 作为向量 $\mathbf{x}(t)$ 的分量，表示为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{x}(t)$ 称为 n 维状态向量。

状态空间：以 n 个状态变量为坐标轴所构成的 n 维空间称为状态空间。

3. 状态空间表达式

状态空间表达式是基于状态空间的数学模型，通常由两个数学表达式组成。一个是反映系统内部变量与输入变量间关系的一阶微分方程组，即一阶向量微分方程，称之为状态方程；另一个是表征系统输入变量、内部变量与输出变量间关系的代数方程组，即向量代数方程，称之为输出方程。由于采用了矩阵表示法，使得系统的数学表达式简洁明了，易于计算机求解，也为多输入、多输出系统的分析研究提供了方便。

若描述系统的数学模型是线性的，且其系数不是时间变量的函数，则称此类系统为线性

定常系统。虽然利用状态空间描述也可以解决非线性和时变系统的分析问题，但本书仅以线性定常系统作为讨论对象。

线性定常系统的状态空间表达式的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (1-1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (1-1b)$$

式中： $\mathbf{A}$ 为系统矩阵； $\mathbf{B}$ 为输入矩阵； $\mathbf{C}$ 为输出矩阵； $\mathbf{D}$ 为直联矩阵。

式 (1-1a) 称为状态方程，它表征了系统由输入所引起的系统内部状态的变化；式 (1-1b) 称为输出方程。

状态空间表达式可用图 1-1 所示结构图表示。

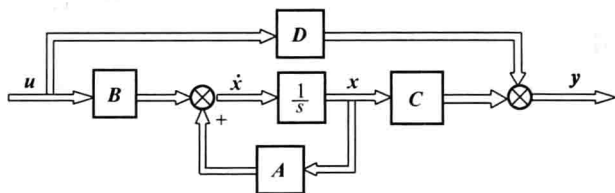


图 1-1 状态空间表达式结构图

4. 状态空间分析法

在状态空间中描述和分析系统的方法。

二、线性定常连续系统状态空间表达式的建立

根据控制系统所遵循的基本定律，选择适当的状态变量，就可建立系统的状态空间表达式。其一般步骤为：

- (1) 确定系统的输入变量、输出变量，选取状态变量；
- (2) 根据变量所遵循的物理、化学定律，列出系统的微分方程；
- (3) 将微分方程转化为关于状态变量的一阶导数与状态变量、输入变量的关系式以及输出变量与状态变量、输入变量的关系式；
- (4) 将关系式整理成状态方程和输出方程的标准形式，见式 (1-1) 所示。

下面举例说明。

【例 1-1】 试建立图 1-2 所示机械位移系统的状态空间表达式。图中， k 为弹簧的弹性系数， f 为阻尼器的阻尼系数。

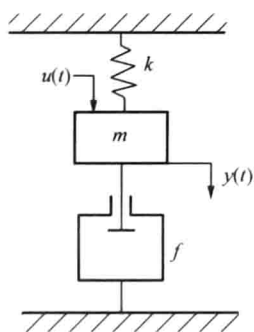


图 1-2 机械位移系统

解 机械位移系统的输入变量为外作用力 $u(t)$ ，输出为质量 m 的位移量 $y(t)$

根据牛顿定律可写出系统的微分方程

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t)$$

选择 $y(t)$ 和 $\frac{dy(t)}{dt}$ 作为状态变量，令

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \frac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

将状态变量代入微分方程并整理得状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

输出方程

$$y = x_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或表示成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases}$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \mathbf{c} = [1 \quad 0]$$

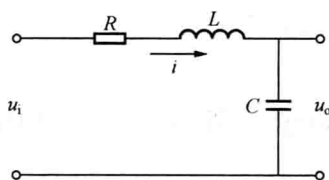


图 1-3 RLC 电路

【例 1-2】 试建立图 1-3 所示 RLC 电路的状态空间表达式。

解 输入变量为 u_i , 输出变量为 u_o 。根据电路定律可写出微分方程

$$u_i = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

(1) 设状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases}$$

则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_i \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

输出方程

$$u_o = x_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$u_o = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或表示成

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u_i \\ u_o = \mathbf{c}\mathbf{x} \end{cases}$$

(2) 设状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \int i dt \end{cases}$$

则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}u_i \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

输出方程

$$u_o = \frac{1}{C}x_2$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$u_o = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(3) 设选状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = u_o \end{cases}$$

考虑到

$$i = C \frac{du_o}{dt}$$

则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_i \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

输出方程

$$u_o = x_2$$

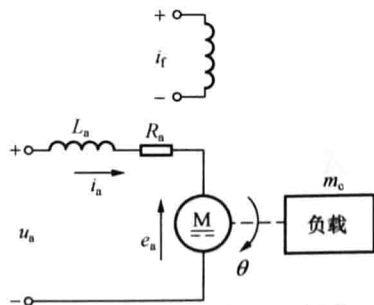
状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_i$$

$$u_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

通过这个例子可见,系统的状态空间表达式不具有唯一性。对于同一个系统,若选取不同的状态变量,则对应着不同的状态空间表达式。

【例 1-3】 图 1-4 所示为电枢控制的直流电动机转速控制系统。试列写以电枢电压 u_a 为输入,电动机角位移 θ 为输出的状态空间表达式。



解 设电动机的反电动势系数为 C_e , 转矩系数为 C_m , 图 1-4 直流电动机转速控制系统

电动机轴上的转动惯量为 J ，摩擦系数为 f 。

电动机电枢回路的微分方程和电动机轴的运动方程为

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a$$

$$e_a = C_e \frac{d\theta}{dt}$$

$$M = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}$$

$$M = C_m i_a$$

合并后得

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + C_e \frac{d\theta}{dt}$$

$$C_m i_a = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \frac{d\theta}{dt}$$

选状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = i_a \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \dot{\theta} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{C_e}{L_a}x_3 + \frac{1}{L_a}u_a \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{C_m}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_3 \end{cases}$$

$$\theta = x_2$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{C_e}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{C_m}{J} & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_a$$

$$\theta = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{cx}$$

【例 1-4】 求图 1-5 所示 RLC 网络的状态空间表达式。

解 输入/输出如图中所示。根据基尔霍夫定律列写回路、节点电压、电流方程为

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + u_c \\ u_c &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2 \\ i_1 &= i_2 + C \frac{du_c}{dt} \\ y &= R_2 i_2 + u_2 \end{aligned}$$

选状态变量

$$\begin{cases} x_1 = i_1 \\ x_2 = i_2 \\ x_3 = u_c \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}u_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2}x_2 + \frac{1}{L_2}x_3 - \frac{1}{L_2}u_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{C}x_2 \\ y = R_2 x_2 + u_2 \end{cases}$$

状态空间表达式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$y = [0 \quad R_2 \quad 0] \mathbf{x} + [0 \quad 1] \mathbf{u}$$

状态空间表达式中的状态变量可以用向量表示即可。

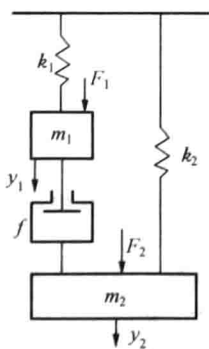


图 1-6 机械位移系统

【例 1-5】 求图 1-6 所示系统的状态空间表达式。其中 m_1 和 m_2 为质量， F_1 和 F_2 为外作用力， y_1 和 y_2 为 m_1 和 m_2 的位移， k_1 和 k_2 为弹簧系数， f 为阻尼系数。

解 F_1 和 F_2 为系统的输入， y_1 和 y_2 为系统的输出，以 m_1 和 m_2 为对象，根据牛顿第二定律，列出两个基本方程

$$\begin{cases} F_1 - f \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} - k_1 y_1 = m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} \\ F_2 - f \frac{d(y_2 - y_1)}{dt} - k_2 y_2 = m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} \end{cases}$$

将上式整理得