高职高专公共基础课规划教材
GAOZHI GAOZHUAN GONGGONG JICHUKE GUIHUA JIAOCAI

一元微积分暨线性代数初步

聂学建 主 编
王建社 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

高职高专公共基础课规划教材
GAOZHIGAOZHUANGONGGONGJICHUKEGUIHUAJIAOCAI

一元微积分暨线性代数初步

主　编　聂学建
副主编　王建社
编　写　周素芳　唐亚娜　范志远　童之慧
主　审　曾庆柏

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为高职高专公共基础课规划教材。全书共分九章，主要内容为函数与极限连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、行列式、矩阵、线性方程组及简易积分表和各章习题答案。本书有较强的可读性、层次性和适用性，书中每一节后面都配备了习题，每章后面配备了复习题，书末附有参考答案。

本书可作为高职高专院校工科及非数学类理科专业的教材，也可作为相关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

一元微积分暨线性代数初步/聂学建主编．—北京：中国电力出版社，2010.1

高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-5083-9889-1

Ⅰ.①一… Ⅱ.①聂… Ⅲ.①微积分—高等学校：技术学校—教材 ②线性代数—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.①O172 ②O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第232942号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2010年1月第一版 2010年1月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 13.75印张 329千字

定价 **22.00** 元

前言

本书参照2000年教育部颁布的《高等职业学校数学大纲（试行）》教学要求，借鉴国内外先进的职业教育理念和模式，结合高职教育的实际，按照以能力培养为宗旨，以“必需，够用”为尺度的原则编写的。可供大多数专业的高职学历教育作为教材使用；也可供其他同等学历层次作教材使用。

本书约定：〖【××××】〗为知识点编号，其中的×（叉）实为数字。前两个叉为章节号，后两个叉为顺序号。【××××】表示某知识点被引用，所在之处便是所用之处。

本书有以下特点：

1. 有较强的可读性。本书在每一节中将内容划分成知识点，并给这些知识点赋予四位数码编号，后接例题涉及到的内容及时用该编号标识，知识点内前后涉及到的内容也及时用编号指引，这是本书与众不同或独树一帜之处。它使读者阅读本书时有了上串下联、前思后想和融会贯通的机会，提高了读者读懂本教材的可能性。

2. 有较强的选择性。本教材兼顾了高职数学教学课时的有限性和专业应用的必须性，大致上前60余学时安排教学一元微积分，后30余学时安排线性代数初步教学。一本书解决了当前诸如铁道工程等专业数学课程教学用书的问题，可避免一学年发两本数学教材但每本都学不完的尴尬，节约了国家的教育资源和学生家长的财力。

3. 有较强的层次性。本教材虽然经过章节内划分知识点，但保留了教学内容的前后连贯性和层次性。内容少而精，文字叙述力求简练易懂，普遍地采用了以学生易于接受的方式叙述那些数学的定义、定理、法则和公式等。

4. 有较强的适用性。本教材注意从高职学生的实际出发，变以“节”为阅读单位为以“点”为阅读单位，降低了阅读的难度。再以典型例题来示范和应用所读内容，以难易适中的习题来巩固和强化所学内容，可形成良性循环，并增强学生的求知欲望。

5. 本教材中每一节后面都配备了习题，让学生巩固相应章节的教学内容，供教师课内外安排学生作业使用；每一章后面都配备了复习题，供师生在习题课时复习选用。所有习题、复习题都在书后附有参考答案。

6. 本书共九章。各章内容和参考课时如下：

第1章　函数　极限　连续	14
第2章　导数与微分	10
第3章　导数的应用	10
第4章　不定积分	10
第5章　定积分	8
第6章　定积分的应用	10
第7章　行列式	10

本教材由湖南交通工程职业技术学院聂学建副教授担任主编，王建社副教授担任副主编。湖南对外经济贸易职业学院曾庆柏教授担任主审。参加编写的有周素芳、唐亚娜、范志远、童之慧。

由于成书仓促，不足之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵意见。

来邮请投 E-mail：nxj1954@163. com

编　者

2009 年 11 月

目 录

1

函数　极限　连续

初等数学研究的对象通常是不变的量，而高等数学研究的对象则通常是变量．函数是极限研究的对象和基础，极限是研究变量的必要工具，是学好高等数学的基础和关键．从有穷到无穷是人们认识事物的升华，学会用极限方法来研究问题正是这种升华的具体表现．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等内容，以便为后续的一元微积分奠定基础．

1.1　函　　数

〖【1101】〗　函数的定义　建立函数的模型

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$．数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量．当自变量 x 取定义域 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域．

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$．$f(x_0)$ 与 $f(x)$ 不可混为一谈，前者为常量，后者为变量．

由定义知，图 1 - 1（a）表现一对一，图 1 - 1（b）表现多对一，符合“有唯一确定的 y 值”要求，故它们都表示函数；而图 1 - 1（c）表现一对多，不符合“唯一”要求，故不表示函数．

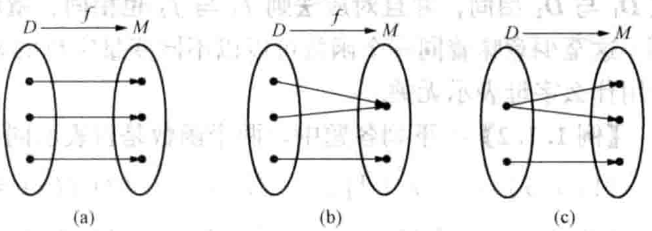

图 1 - 1

由定义又知，在函数表达式 $y = f(x)$ 中具有一种泛指的对应法则 f，它把自变量 x 对应到函数值 $f(x)$；但只有在特定的函数关系中，这种对应法则 f 才能明确表现出来．

例如 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 1$ 就是一个特定的函数，其中 f 确定的对应法则为

$$f(\quad) = (\quad)^3 + 4(\quad)^2 - 1$$

因此，函数的对应法则 f，泛指对其自变量 x 的加工程序或方法．

建立函数的模型：运用数学工具解决实际问题时，通常要先找出变量间的函数关系，用数学式子表示出来，然后再进行分析和计算．

建立函数模型的具体步骤可为：

（1）分析问题中哪些是变量，哪些是常量，分别用字母表示．

（2）根据所给条件，运用数学、物理、经济及其他知识，确定等量关系．

(3) 具体写出解析式 $y=f(x)$，并指明其定义域.

【例 1.1.1】 一下水道的截面是矩形加半圆形（见图 1－2），截面积为 A，A 是一常量，这常量取决于预定的排水量．设截面的周长为 y，底宽为 x，试建立 y 与 x 的关系式.

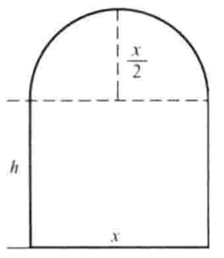

图 1－2

解 设矩形长为 x，高为 h，得 （参阅【1101】）

$$y=x+2h+\frac{1}{2}\pi x \qquad ①$$

显见，在式①中 h 也是变量，而我们只需要 y 和 x 的函数关系式．为此，需要把变量 h 用 x 表达出来.

根据题中所给限制条件——截面积为 A，建立 x 与 h 的关系式

$$A=xh+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

即

$$h=\frac{A}{x}-\frac{1}{8}\pi x \qquad ②$$

将②代入①得

$$y=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2A}{x} \quad (x>0) \qquad ③$$

式③即为本题所要找的周长 y 与底宽 x 的关系式.

〖【1102】〗 函数的两个要素

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围，而函数值 y 完全是由自变量 x 和对应法则 f 来确定的，所以函数的值域 M 完全是由其定义域 D 和对应法则 f 所确定的，因此通常称函数的定义域 D 和对应法则 f 为函数的两个要素．也就是说，**只要两个函数的定义域 D_1 与 D_2 相同，并且对应法则 f_1 与 f_2 也相同，就称这两个函数为相同的函数.**

这至少意味着同一个函数可以以不同变量字母的表达式出现，或者说一个函数与它的变量用什么字母表示无关.

【例 1.1.2】 下列各题中，两个函数是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=|x|$ 与 $s=\sqrt{v^2}$； (2) $f(x)=(1+x)^2$ 与 $g(t)=1+2t+t^2$；

(3) $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^2+1$； (4) $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$.

解 (1) 因为 $f(x)=|x|$ 与 $s=\sqrt{v^2}$ 的定义域和对应法则都相同．所以它们是同一函数. （参阅【1102】，下同）

(2) 因为 $f(x)$ 的定义域与 $g(t)$ 的定义域相同，且对应法则也相同，所以 $f(x)$ 和 $g(t)$ 是同一函数．这里应注意：函数相同与否与变量的记号无关.

(3) 因为 $f(x)$ 的对应法则是 $f(\quad)=(\quad)^2$，而 $g(x)$ 的对应法则是 $g(\quad)=(\quad)^2+1$，对应法则不同，所以 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=x^2+1$ 不是同一函数.

(4) 因为 $f(x)=x^2$ 的定义域是一切实数，而 $g(x)=\sqrt{x}$ 的定义域是 $x\geqslant 0$．它们的定义域不相同，所以 $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x}$ 不是同一函数.

〖【1103】〗 分段函数

在自变量的不同取值范围内，需用不同的表达式表示的函数，称为分段函数.

一般地，一个分段函数的定义域需用多少个部分区间，就有多少个分支表达式，但这样

单一的每个表达式并不应看成一个函数，而是一个分段函数的分支．故一个分段函数只能看成一个函数，而不是几个函数．

特别要注意的是：分段函数的图像必然是分段描绘的，甲（部分）区间上的图像严禁延伸到乙（部分）区间上去，否则就是错误的函数图像．

【例 1.1.3】 阐述函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0\\ x^2, 0\leqslant x<2\\ \ln x, 2\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$ 的表达方式、定义域、对应法则，并作图．

解 题中 $f(x)$ 是一个定义域为 $D=(-\infty,5]$ 的分段函数，它的定义域 D 是由三个部分区间合并而成：$(-\infty,0)\cup[0,2)\cup[2,5]$． （参阅【1103】）

它的对应法则 f 包括三个分支：f_1：（ ）+1、f_2：（ $)^2$、f_3：ln（ ），它们分别是区间（$-\infty$，0）、[0，2）、[2，5] 上的分支对应法则．

这个分段函数的图像如图 1-3 所示．

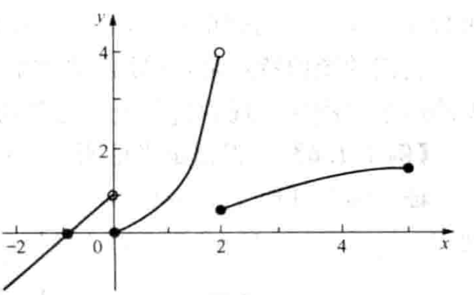

图 1-3

【例 1.1.4】 某工厂生产某产品年产量为若干台，每台售价为 300 元，当年产量超过 600 台时，超过部分只能打 8 折出售，这样可出售 200 台，如果再多生产，则本年就销售不出去了，试写出本年的收益函数模型．

解 设某产品年产量为 x 台，收益函数为 $y(x)$．因为产量超过 600 台时，售价要打 8 折，而超过 800 台时，多余部分本年销售不出去，从而没有效益，因此，把产量划分为三个阶段来考虑收益．故 （参阅【1101】、【1103】）

$$y(x)=\begin{cases}300x & 0\leqslant x\leqslant 600;\\ 300\times 600+0.8\times 300(x-600) & 600<x\leqslant 800;\\ 300\times 600+0.8\times 300\times 200 & x>800\end{cases}$$

即收益函数模型为

$$y(x)=\begin{cases}300x & 0\leqslant x\leqslant 600;\\ 180000+240(x-600) & 600<x\leqslant 800;\\ 228000 & x>800\end{cases}$$

〖【1104】〗 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数；若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数．

它们的图像特点是：偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称．

既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数．

【例 1.1.5】 讨论下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=x^2+x+2$； (2) $f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=ax^3+bx$； (4) $f(x)=ax+b(a\neq 0,b\neq 0)$．

解　(1) 因为 $f(x)=x^2+x+2$，$f(-x)=(-x)^2+(-x)+2=x^2-x+2$，

$-f(x)=-(x^2+x+2)=-x^2-x-2$，$f(-x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$.

所以 $f(x)=x^2+x+2$ 是非奇非偶函数.　　　(参阅【1104】，下同)

(2) 因为 $f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$，$f(-x)=(-x)^2+\sqrt{(-x)^2}=x^2+\sqrt{x^2}$，$f(-x)=f(x)$.

所以 $f(x)=x^2+\sqrt{x^2}$ 是偶函数.

(3) 因为 $f(x)=ax^3+bx$，$f(-x)=a(-x)^3+b(-x)=-ax^3-bx$，$f(-x)=-f(x)$

所以 $f(x)=ax^3+bx$ 是奇函数.

(4) 因为 $f(x)=ax+b$，$f(-x)=a(-x)+b=-ax+b$，$-f(x)=-ax-b$，$f(-x)\neq -f(x)$，$f(-x)\neq f(x)$. 所以：$f(x)=ax+b$ 非奇非偶.

〖【1105】〗　函数的单调性

定义　若对任意 x_1，$x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调增加函数；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调减少函数；单调增加函数和单调减少函数统称单调函数，若函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数，则称区间 (a,b) 为单调区间.

它们的图像特点是：单调增加的函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线；单调减少的函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线.

【例 1.1.6】　根据定义证明 $f(x)=\log_2 x$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的.

证　因为任取 x_1，$x_2\in(0,1)$，且 $x_1<x_2$

则
$$f(x_2)-f(x_1)=\log_2 x_2-\log_2 x_1$$
$$=\log_2\frac{x_2}{x_1}>\log_2 1=0,\text{即 } f(x_1)<f(x_2)$$

所以 $f(x)=\log_2 x$ 在开区间 $(0,1)$ 内是单调增加的.　　　(参阅【1105】)

同理可证 $f(x)=\log_2 x$ 在开区间 $(1,+\infty)$ 内也是单调增加的. 所以本题得证.

〖【1106】〗　函数的有界性

定义　如果存在 $M>0$，使对于任意 $x\in D$ 满足 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 是有界的.

有界函数图像的特点是：其图像处在两条平行直线 $y=\pm M$ 之间.

【例 1.1.7】　讨论函数 $y=\sin x$，$y=\tan x$，$y=\cos x$，$y=\cot x$，$y=\arcsin x$，$y=\arctan x$，$y=\arccos x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 的有界性.

解　因为对于函数 $y=\sin x$，存在 $M=1>0$，使当任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，都能满足不等式 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 是有界函数.　　　(参阅【1106】，下同)

因为对于函数 $y=\tan x$，不存在任何正数 M，使当任意 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 时，都能满足不等式 $|\tan x|\leqslant M$，所以：函数 $y=\tan x$ 是无界函数.

同理可知：$y=\cos x$，$y=\arcsin x$，　$y=\arctan x$，$y=\arccos x$，　$y=\operatorname{arccot} x$ 都是有界函数，而 $y=\cot x$ 是无界函数.

〖【1107】〗　函数的周期性

定义　如果存在常数 $T\neq 0$，使对于任意 $x\in D$，$x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

它们的图像特点是：在每一个周期上的图像都是相同的.

【例 1.1.8】 讨论函数 $f(x)=\sin x, f(x)=\tan x, f(x)=\cos x, f(x)=\cot x, f(x)=2^x, f(x)=\arcsin x, f(x)=\arctan x, f(x)=\arccos x, f(x)=\operatorname{arccot} x$ 的周期性.

解 因为函数 $f(x)=\sin x, f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x$，即 $f(x+2\pi)=f(x)$，所以 $f(x)=\sin x$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数. （参阅【1107】，下同）

因为函数 $f(x)=\arcsin x$，对于任何常数 $T\neq 0$ （x，$x+T\in[-1,1]$），都有 $f(x+T)\neq f(x)$，所以 $f(x)=\arcsin x$ 不是周期函数.

同理，函数 $f(x)=\tan x$，$f(x)=\cos x$，$f(x)=\cot x$ 都是周期函数. 而 $f(x)=2^x$，$f(x)=\arctan x$，$f(x)=\arccos x$，$f(x)=\operatorname{arccot} x$ 都不是周期函数.

〖【1108】〗 反函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 为定义在数集 D 上的函数，其值域为 M. 如果对于数集 M 中的每个数 y，在数集 D 中都有唯一确定的数 x 使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个定义在数集 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称其为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

识别一个函数是否存在反函数其实不难，只要看它是否是一一对应的即可，是，则存在，不是，则不存在. 图 1-4（a）所示函数 $y=f(x)$ 中的 x 和 y 是一一对应的，符合反函数定义中的条件，所以它有反函数 $x=f^{-1}(y)$，如图 1-4（b）所示.

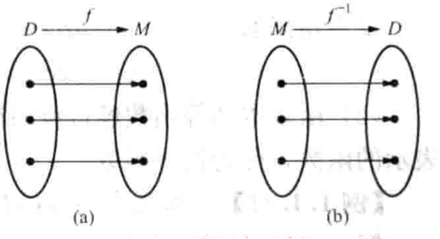

图 1-4

一般地，因为函数相同与否与变量的记号无关，所以在获得定义中的反函数后，还需要将反函数中的两个变量的字母相互改写，以便符合用 y 表示函数，用 x 表示自变量的习惯表示方法.

【例 1.1.9】 求函数 $y=\sin x$ 在指定区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数.

解 正弦函数 $y=\sin x$ 在其定义域（$-\infty$，∞）内不符合【1108】中的条件，给定一个角度 x，有无穷多个正弦值 y 与之对应，所以按反函数的定义，它没有反函数.

函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 内符合【1108】中的条件，所以按反函数的定义，它有反函数 $x=\arcsin y$，（$-1\leqslant y\leqslant 1$），一般习惯称此反函数为反正弦函数.

按习惯用法，该反正弦函数的常见形式为 $y=\arcsin x$，（$-1\leqslant x\leqslant 1$）

〖【1109】〗 复合函数

定义 若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 在 D_2 上有定义，其值域为 $W_2=\{u\,|\,u=\varphi(x), x\in D_2\}$，且 $W_2\cap D_1=U\neq\phi$，则存在 $x\in D_2$，通过函数 $u=\varphi(x)$ 有确定的 $u\in U$ 与之对应，通过函数 $y=f(u)$ 有确定的 y 值与之对应. 这样就存在 $x\in D_2$，通过函数 u 有确定的 y 值与之对应，从而得到一个以 x 为自变量，y 为因变量的函数，称其为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为 $y=f[\varphi(x)]$，u 称为中间变量. 当 $M_2\cap D_1=U=M_2$ 时，其定义域为 D_2，否则其定义域为 D_2 的某一部分. 如图 1-5 所示.

【例 1.1.10】 讨论下面两组函数复合的可能性.

（1）$y=u^2$，$u=\cos x$；（2）$y=\sqrt{1-u}$，$u=2+e^x$.

解 (1) 因为函数 $y=u^2$ 的定义域 D_1（一切实数）与函数 $u=\cos x$ 的值域 W_2（$-1\leqslant u\leqslant 1$）之交非空集，所以它们可复合成复合函数 $y=(\cos x)^2$. （参阅【1109】）

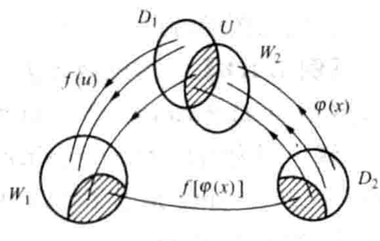

图 1-5

(2) 因为函数 $y=\sqrt{1-u}$ 的定义域 D_1（$u\leqslant 1$）与函数 $u=2+e^x$ 的值域 W_2（$u\geqslant 2$）之交是空集，所以，它们不能复合成复合函数. 或称 $y=\sqrt{1-(2+e^x)}$ 不是函数.

〖【1110】〗 **基本初等函数　初等函数**

(1) 基本初等函数包括以下六种函数：

函数	解析表达式
常函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数	$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$，$y=\operatorname{arcsec} x$，$y=\operatorname{arccsc} x$

(2) 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合运算而得到的，且仅用一个式子表示的函数，称为初等函数.

【例 1.1.11】 举几个初等函数的例子，并说明分段函数不一定是初等函数.

解 (1) 显然，函数 $f(x)=2^{x^2+1}+5(\ln x)^4$ 是初等函数. （参阅【1110】，下同）

(2) 因为分段函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 不能由基本初等函数的四则运算或复合运算而成，所以它不是初等函数.

因为分段函数 $f(x)=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 可以由基本初等函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成，即 $y=\sqrt{x^2}$ 表示，所以，它是初等函数.

由上述两个分段函数的情况知：分段函数不一定是初等函数.

〖【1111】〗 **求函数的定义域**

当函数由表达式（也称解析式）给出时，其定义域是使解析表达式有意义的自变量的一切可取值. 为此求函数的定义域时应遵守以下原则：

(1) 在表达式中分母不能为零.

(2) 在偶次根式内非负.

(3) 在对数中真数大于零.

(4) 反三角函数 $\arcsin x$，$\arccos x$，要满足 $|x|\leqslant 1$.

(5) 两函数和（差）的定义域，应是两函数定义域的公共部分.

(6) 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

(7) 求复合函数的定义域时，一般是由外层向里层将上述 6 条原则逐步落实（此处里层和外层恰与复合函数的求值计算过程相符，在先的计算对应里层，在后的运算对应外层）.

【例 1.1.12】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{16-x^2}+\ln\sin x$；(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$.

解 (1) 由所给函数知，要使函数 y 有定义，必须同时满足两个条件：①偶次根式的被开方式大于或等于零；②对数函数符号管内的式子只能为正值. （参阅【1111】）

故为求该函数的定义域，应建立如下不等式组

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

注意到不等式 $\sin x>0$ 的解是 $2n\pi<x<(2n+1)\pi$，($n=0$，±1，$\pm2\cdots$)，可知不等式组的解为 $-4\leqslant x<-\pi$ 与 $0<x<\pi$，所以函数的定义域为：$[-4,\ -\pi)\cup(0,\ \pi)$.

(2) 由所给函数知，要使函数有定义，必须同时满足两个条件：①分母不为零且偶次根式的被开方式非负；②反正弦函数符号管内的式子的绝对值小于等于 1.

故为求该函数的定义域，应建立如下不等式组 （参阅【1111】）

$$\begin{cases}3-x^2>0\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|<1\end{cases}$$

对上列不等式组同解变形，得$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\ 0\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$显然其解为 $0\leqslant x<\sqrt{3}$.

因此，所给函数的定义域为 $[0,\ \sqrt{3})$.

〖【1112】〗 **指出复合函数的复合过程**

(1) 复合函数的复合过程是由里到外，函数套函数而成的. 指出复合函数的复合过程，是采取由外到内层层剥离的办法.

指出复合函数的复合过程，必定表现为将它剥离成若干个基本初等函数或基本初等函数的四则运算.

(2) 由基本初等函数仅仅经过有限次四则运算所得到的函数称为**简单函数**.

(3) 在指出复合函数的复合过程中，每一个中间函数允许的形式有：①基本初等函数，如 $y=\sqrt{u}$，$u=\arcsin x$ 等；②简单函数，如 $u=2+x^2$，$v=1-\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$，$w=\ln x+x^2\cos x$ 等(此三式中间变量分别用 u、v、w，意味着它出现在复合过程的最里层).

(4) 在指出复合函数的复合过程中，每一个函数不允许的形式有：①函数仍然拥有复合函数的形式，如 $u=\cos x^2$；②函数仅为字母代换，$y=u$，$u=x$ 等.

【例 1.1.13】 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{2+x^2}$； (2) $y=\sin e^x$；

(3) $y=\sqrt{1-\sin x}$； (4) $y=\ln\cos x^2$.

解 (1) 显然，$y=\sqrt{2+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=2+x^2$ 复合而成； （参阅【1112】，下同）

(2) 显然，$y=\sin e^x$ 是由 $y=\sin u$ 与 $u=e^x$ 复合而成；

(3) 显然，$y=\sqrt{1-\sin x}$是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-\sin x$ 复合而成；

(4) 显然，$y=\ln\cos x^2$ 是由 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=x^2$ 复合而成.

【例 1.1.14】 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sin^2\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；　　(2) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

解 (1) 该函数最外层运算是二次方，即 $y=u^2$，次外层是正弦，即 $u=\sin v$，从外向里第三层是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$，最里层是多项式，即 $w=x^2+1$，

所以，复合过程 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$. （参阅【1112】，下同）

(2) 该函数最外层运算是对数，即 $y=\ln u$，次外层是正切，即 $u=\tan v$，从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^w$，最里层是简单函数，即 $w=x^2+2\sin x$.

所以，复合过程为 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$，$w=x^2+2\sin x$.

〖【1113】〗 另外两种用解析式表示的函数形式

(1) 用参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(t\in I)$ 表示的变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数.

(2) 如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数.

能表示成 $y=f(x)$［其中 $f(x)$ 仅为 x 的解析式］的形式的函数，称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程称为隐函数的显化.

【例 1.1.15】 举例说明某些函数、隐函数、显函数、参数方程之间可以互相转化.

解 (1) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x\in[-1,1])$ 是一个显函数，令 $x=\cos t$.

可以将它转化成参数方程 $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$. （参阅【1113】，下同）

(2) 方程 $e^x+xy-1=0$ 确定了变量 y 与 x 之间的函数关系；因为它不是 $y=f(x)$ 的形式，所以该函数被方程所隐藏，解所给方程容易得到这个隐函数是 $y=\dfrac{1-e^x}{x}$. 这个过程称之为隐函数的显化.

(3) 方程 $e^x+xy-e^y=0$ **确定了变量 y 是 x 的隐函数**，读者可以自行验证这个函数 y 不能显化.

注意： 并不是任意一个二元方程所确定的隐函数都能显化，如上 (3) 中方程所确定的隐函数就不能显化.

习 题 1.1

1. 下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　(2) $f(x)=x-1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$；

(3) $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$；　　(4) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg|x|$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-2x}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-16}$；

(3) $y=\dfrac{1}{x+2}+\sqrt{x-5}$； (4) $y=\dfrac{1}{x-1}+\lg(x+1)$.

3. 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$

4. 设 $y=\begin{cases}1 & -2<x\leqslant 0\\ x^2 & 0<x\leqslant 1\\ 3-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，求函数的定义域及函数值 $f(-1)$，$f(0)$，$f(\sqrt{3})$，并作出函数的图像.

5. 指出下列函数哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既不是奇函数，也不是偶函数？

(1) $f(x)=x^2-2x+3$； (2) $f(x)=x^2\cos x$；

(3) $f(x)=\sin x+\cos x-2$； (4) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

6. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=e^{x+1}$；

(3) $y=\sin\dfrac{3x}{2}$； (4) $y=\cos^2(3x-1)$.

7. 指出下列各复合函数的复合过程.

(1) $y=\sin^2(3x+1)$； (2) $y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{4}}$；

(3) $y=\ln\sqrt{1+x}$； (4) $y=(20x-1)^{10}$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

9. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本运费计算，如从北京到该地每千克收 0.3 元. 当超过 50kg 时，超过部分按每千克 0.45 元收费. 试求从北京到该地的行李费 y（元）与重量 x（kg）（假定的最大值不超过 400kg）之间的函数关系式. 并画出函数的图像.

10. 某市某旅行社组团到湘西凤凰三日游，10 人以下每人 380 元，超过 10 人且 40 人以下每人按原价打九折，试求这个旅行社 40 人以下的收入和人数之间的函数关系.

11. 小王到市场上去买红富士苹果，若买 10 斤以下每斤 3 元，若买 10 斤以上每斤可打 8 折，试确定小王所买苹果支出和售量之间的函数关系.

12. 已知电脑城出售某种 MP_4，购 30 只以内每只 80 元，30 只及 30 只以上 100 以内打 8 折出售，试求该种 MP_4 在 100 只以内的销售收入与销量之间的函数关系并指出这个函数是不是初等函数.

1.2 极 限

【1201】 数列 $\{u_n\}$ 的极限

定义 对于数列 $\{u_n\}$，若当自然数 n 无限增大时，相应的 $|u_n-A|$ 无限接近于常数 0，则称 A 为当 n 趋于无穷时数列 $\{u_n\}$ 的极限，或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A$，或 $u_n\to A(n\to\infty)$.