大学数学应用型本科
“十二五”规划教材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shulitongji

主　编　王国政　刘　洋
副主编　肖继红　陈相兵

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

大学数学应用型本科"十二五"规划教材

概率论与数理统计

主　编　王国政　刘　洋
副主编　肖继红　陈相兵

重庆大学出版社

内容提要

本书内容包括3个部分,第1至第4章分别介绍了概率论的基本知识,包括概率的定义与计算、随机变量及其分布、二维随机变量简介、数字特征、大数定律和中心极限定理等内容;第5至第8章则分别介绍了数理统计的基本知识,包括数理统计的基本概念与抽样分布、点估计与区间估计、假设检验、回归分析等内容;第9章为实验部分,介绍了Excel在概率统计中的简单应用,包括利用Excel进行概率分布计算、参数估计、假设检验、回归分析等基本操作.

本书注重基本概念的阐释,略去了一些较复杂定理的证明,选取了许多应用性例题与习题,力求做到简明、实用、可操作;本着够用即好的原则,对二维随机变量的有关内容做了一些删节. 书末附有习题参考答案,以方便读者学习.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王国政,刘洋主编. —重庆:重庆大学出版社,2015.1

ISBN 978-7-5624-8721-0

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… ②刘… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第280386号

大学数学应用型本科"十二五"规划教材

概率论与数理统计

主 编 王国政 刘 洋

副主编 肖继红 陈相兵

责任编辑:陈 力 版式设计:陈 力

责任校对:关德强 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

万州日报印刷厂印刷

*

开本:720×960 1/16 印张:16.75 字数:283千

2015年2月第1版 2015年2月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 978-7-5624-8721-0 定价:34.00元

前 言

概率统计是一门研究与探索随机现象统计规律性的科学，它在自然科学和社会科学的许多领域中得到了广泛的应用，在金融、保险、经济与企业管理等方面都发挥了重要作用.

独立学院的学生具有自身的特点，为适合独立学院学生的知识基础和实用性要求，本教材由西南财经大学天府学院、四川大学锦江学院、西南交通大学希望学院有关教师联合编写. 在系统地阐述概率论与数理统计的基本概念、基本思想与基本方法的基础上，结合经济管理类学生的需要及数学基础，本着简明实用的原则，删减了一些较复杂的内容，注重概念的引入与讲授，省略了许多定理的证明推导，精选了很多应用性例题、习题，增加了 Excel 实验操作.

本书编写中参阅了不少优秀的教材及文献资料，谨向这些教材、文献的编者及出版单位致以诚挚的感谢！由于编者水平所限，难免存在疏漏之处，恳请专家、同行及读者不吝赐教.

编 者

2014 年 12 月

目 录

第1章 随机事件与概率

§1.1 随机现象与随机试验

一、随机现象

什么是随机现象呢?当人们观察自然界和人类社会时,会发现存在着两类不同的现象. 其中一类现象,如在没有外力作用的条件下,作匀速直线运动的物体必然继续作匀速直线运动;在 1 个标准大气压下,水加热到 100 ℃ 时必然会沸腾等. 这些现象均是在一定条件下必然会发生的现象. 反之,也有很多在一定条件下,必然不会发生的现象,这两种现象的实质是相同的,即其发生与否完全取决于它所依存的条件,可以根据其所依存的条件来准确地断定其发生与否. 故称这类现象为**确定性现象**,其广泛地存在于自然现象和社会现象中,概率论以外的数学分支研究的正是确定性现象的数量规律.

另一类现象却与确定性现象有着本质的不同, 如用同一仪器多次测量同一物体的质量,所得结果总是略有差异,这是由于大气对测量仪器的影响、观察者生理或心理上的变化等偶然因素引起的. 又如,同一门炮向同一目标发射多发同一类型的炮弹,炮弹落点也不一样,从某生产线上用同一种工艺生产出来的灯泡的寿命会有差异等,这些现象有一个共同的特点,即在基本条件不变的情况下,一系列试验或观察会得到不同的结果. 换言之,就一次试验或观察而言,它会时而出现这种结果,时而出现那种结果,呈现出一种偶然性. 这类现象称为

随机现象. 对于随机现象,只讨论它可能出现什么结果,意义不大,而指出各种结果出现可能性的大小往往更有价值. 因此就需要对随机现象进行定量研究,概率论正是研究随机现象的数量规律的一门数学学科.

二、随机试验

在概率论中,为叙述方便,将对随机现象进行的观察或科学试验统称为**试验**. 用字母 E 表示.

如果在相同条件下重复进行试验,每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果,但在每次试验之前不能确定哪一个结果会出现,则称这样的试验为一个**随机试验**.

例 1.1 观察下列几个试验:

① 投掷一枚骰子,观察出现的点数(即朝上那一面的点数).

② 在一批产品中,任取一件,考察其是正品,还是次品.

③ 投掷两枚质地均匀的硬币,观察它们出现正面和反面的次数.

④ 记录电话交换台 1 分钟内接到的呼叫次数.

⑤ 从一批灯泡中,任取一只,测试其寿命.

可以看到,它们都是随机试验,这些试验的结果都是可以观测的。通常将随机试验简称为**试验**,并通过随机试验来研究随机现象.

三、概率论简介

17 世纪中叶,人们就开始了对随机现象的研究,在这些研究中建立了概率论的一些基本概念,如事件、概率、随机变量、数学期望等. 当时研究的模型较为简单,现在称其为**古典概型**.

其后,由于许多社会问题和工程技术问题,如人口统计、保险理论、天文观测、误差理论、产品检验和质量控制等问题的提出,更进一步地促使人们就概率论的极限理论方面进行深入研究,开始主要针对伯努利试验概型进行,后来推广到更为一般的场合. 极限定理的研究在 18 世纪到 19 世纪近 200 年间成了概率论研究的中心课题,直到 20 世纪初,由于新的数学方法的引入,这些问题才得到了较好的解决. 其间,伯努利、棣莫弗、拉普拉斯、高斯、泊松、切比雪夫、马尔可夫等著名数学家都对概率论的发展作出了杰出的贡献.

尽管概率论在各个领域获得了大量成果,但是严格的数学基础的建立、理论研究和实际应用的极大发展主要是 20 世纪以后的事情. 1917 年,苏联科学家伯恩斯坦首先给出了概率论的公理体系. 1933 年,柯尔莫哥洛夫又以更完整的

形式提出了概率论的公理结构，自此，现代意义上的完整的概率论臻于完成.

20 世纪以来，由于物理学、生物学、工程技术、农业技术和军事技术发展的推动，概率论得到了飞速发展，理论课题不断扩大与深入，应用范围大大拓宽. 在最近几十年中，概率论的方法被引入各个工程技术学科和社会学科. 目前，概率论在近代物理、自动控制、地震预报和气象预报、工厂产品质量控制、农业试验和公用事业等方面都得到了重要应用. 以下给出近现代概率论应用的一些实例：

① 在遗传学中用于描述变异的模型，以获得自然的变异倾向.

② 在大气动力学理论中，用于描述气体运动的或然性.

③ 用于设计和分析计算机的操作系统，因为系统里各种队列的长度是随机的.

④ 用于电子设备和通信系统中噪声的处理，因为噪声是随机的.

⑤ 大气湍流的研究中大量用到概率论.

⑥ 在营运研究中，对商品库存的需求通常看作是随机的.

⑦ 精算，如保险公司所用到的保险精算，大量用到概率论.

⑧ 用于研究复杂系统的可靠性，如商用或军用飞行器等.

诸如此类还有很多，现在越来越多的概率论方法被引入经济、金融和管理科学. 概率论的思想渗入各个学科，成为近代科学发展明显的特征之一. 与此同时，由于生物学和农业实验的推动，数理统计学也获得了很大的发展，它以概率论为理论基础又为概率论的应用提供了强有力的工具，两者相互推动、迅速发展. 而概率论本身的研究则转入以随机过程为中心课题，在理论上和应用上都取得了重要的成果.

§1.2　随机事件

一、样本空间

对于随机实验，人们感兴趣的是实验的结果，将试验 E 的每一种可能结果称为**基本事件**，或称为**样本点**，所有样本点或基本事件组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 Ω. 在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步.

例如，在抛掷一枚硬币的试验中，有两个可能的结果，即出现正面或出现反

面,分别用"正面""反面"表示,因此这个随机试验中有两个基本事件,这个试验的样本空间是由这两个基本事件组成的集合,即 $\Omega=\{$正面、反面$\}$.

例 1.2 写出 §1.1 节例 1.1 中随机试验的样本空间.

① 投掷一枚骰子,出现的点数可能是 1,2,3,4,5,6 中的任何一种情况,因此样本空间记为:$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

② 在一批产品中,任取一件,其结果可能是正品,也可能是次品,因此样本空间记为: $\Omega=\{$正品,次品$\}$.

③ 投掷两枚质地均匀的硬币,它们可能出现的结果为:两次都为正面;两次都为反面;第一次出现正面且第二次出现反面;第一次出现反面且第二次出现正面,因此样本空间记为:

$\Omega=\{$(正面、正面),(正面,反面),(反面,正面),(反面,反面)$\}$.

以上 3 个样本空间中只有有限个样本点,是比较简单的样本空间.

④ 电话交换台接到的呼叫次数的可能结果一定是非负整数,而且很难(实际上也没有必要)指定一个数作为它的上界,因此,可以将样本空间取为 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$. 这个样本空间有无穷多个样本点,但这些样本点可以按照某种次序一个一个地排列出来,我们称其样本点数是可列的.

⑤ 从一批灯泡中任取一只,灯泡的寿命 t 肯定不能取负值,样本空间可记为:$\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$ 或 $\Omega=[0,+\infty)$. 这个样本空间包含有无穷多个样本点,它们充满一个区间,我们称其样本点数是不可列的.

事实上,随着问题的不同,样本空间可以相当简单,也可以相当复杂. 对于一个实际问题或一个随机现象,如何用一个恰当的样本空间来进行描述也不是一件易事. 在概率论的研究中,一般都认为样本空间是给定的,这是必要的抽象. 这种抽象使人们能够更好地把握随机现象的本质,而且得到的结果能够更广泛地应用. 通常,一个样本空间可以用来描述各种实际内容大不相同的问题,如只包含两个样本点的样本空间既能作为投掷硬币出现"正面"与"反面"的模型,也能用于产品检验中"正品"与"次品",又能用于气象中"下雨"及"不下雨",以及公共服务的排队现象中"有人排队"与"无人排队"等. 尽管问题的实际内容如此不同,但都能归结为相同的概率模型.

二、随机事件

在随机试验中,有可能发生也可能不发生的结果,我们称其为**随机事件**,简称为**事件**,常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 若 A 表示投掷一枚骰子出现 1 点这一事件,人们通常记为 $A=$"投掷一枚骰子出现 1 点".

随机事件也是样本空间的子集，样本空间中每一个样本点称为**基本事件**. 在每次试验中，一定出现的事件称为**必然事件**，记为 Ω；一定不可能出现的事件称为**不可能事件**，记为 ϕ. 如掷一枚骰子的试验，掷出点数为 7 点就是不可能事件. 必然事件与不可能事件都具有确定性，它们不是随机事件，但是为了今后讨论方便，我们可以将它们看作一类特殊的随机事件.

例 1.3　在投掷一枚骰子的试验中，若记事件 A = “出现的点数为偶数”，B = “出现的点数小于 5”，C = “出现的点数为小于 5 的奇数”，D = “出现的点数大于 6”，则 A,B,C,D 都是随机事件，也可表示为：$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{1,3\}$，D 为不可能事件，即 $D=\varnothing$.

在这个试验中，记事件 A_n = “出现 n 点”，$n=1,2,3,4,5,6$. 显然，$A_1,A_2,\cdots,A_6$ 都是基本事件.

三、事件间的关系及运算

在一个样本空间中可以定义很多个随机事件，在这些事件中，有的比较简单，有的则比较复杂，但是事件与事件之间往往有一定的关系. 因此，通过分析事件之间的关系，不仅让我们更深刻地认识事件的本质，也可以大大地简化一些复杂事件的概率计算.

由例 1.3 可知，事件是样本点的集合，因此事件间的关系与运算可以按照集合与集合之间的关系与运算来处理.

下面假设试验 E 的样本空间为 Ω，$A,B,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 分别是 E 的事件.

1. 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B **包含**事件 A，也称事件 A 包含于事件 B，记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

如例 1.3 中 $\{1,3\}\subset\{1,2,3,4\}$，即事件 $C\subset B$，所以 C 是 B 的子事件，事件 B 包含事件 C.

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，即 $B\subset A$ 且 $A\subset B$，则称事件 A 与事件 B **相等**，或称 A 与 B **等价**，记为 $A=B$.

若 $A\subset B$，则事件 A 中每一个样本点必包含在事件 B 中. 对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

2. 事件的和(并)

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，也称为事件 A 与事件 B 的**并**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 即

$$A \cup B = \{A\text{ 发生或 }B\text{ 发生}\} = \{A,B\text{ 中至少有一个发生}\}.$$

事件 A、B 的和是由 A 与 B 的样本点合并而成的事件.

如例 1.3 中 $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, 则 $A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$.

类似地, n 个事件的和为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$, 或记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

3. **事件的积(交)**

事件 A 与事件 B 同时发生的事件, 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**, 也称为事件 A 与事件 B 的交, 记作 $A \cap B$ 或 AB. 即

$$A \cap B = \{A\text{ 发生且 }B\text{ 发生}\} = \{A,B\text{ 同时发生}\}$$

事件 A 与 B 的积是由 A 与 B 的公共样本点所构成的事件.

如例 1.3 中 $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, 则 $A \cap B = \{2,4\}$.

类似地, n 个事件的积为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, 或记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

4. **事件的差**

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件, 称为事件 A 关于事件 B 的**差事件**, 记为 $A - B$. 即 $A - B = \{A\text{ 发生而 }B\text{ 不发生}\}$.

事件 A 关于 B 的差是由属于 A 且不属于 B 的样本点所构成的事件.

如例 1.3 中 $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, 则 $A - B = \{6\}$, $B - A = \{1,3\}$.

5. **互不相容事件**

如果事件 A 与事件 B 不能同时发生, 即 $A \cap B = \varnothing$, 则称事件 A 与事件 B **互不相容**, 或称事件 A 与事件 B **互斥**.

如例 1.3 中 $A = \{2,4,6\}$, $C = \{1,3\}$, 则 A,C 是互不相容的.

对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 它们两两互不相容是指这 n 个事件中任意两个都有 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots,n$.

对可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$, 它们两两互不相容是指任意两个事件都有 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i,j = 1,2,\cdots$.

显然, 随机试验中基本事件都是两两互不相容的.

6. **对立事件**

试验中"A 不发生"这一事件称为 A 的**对立事件**或 A 的**逆事件**, 记为 $\overline{A}$.

上述定义意味着在一次试验中, A 发生则 $\overline{A}$ 必不发生, 而 $\overline{A}$ 发生则 A 必不发生, 因此 A 与 $\overline{A}$ 满足关系

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad A\overline{A} = \varnothing$$

如例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,2,3,4\}$,则 $\overline{A}=\{1,3,5\}$, $\overline{B}=\{5,6\}$. 又如“至少发生一次事故”与“没有发生事故”互为对立事件.

由定义可知,两个对立事件一定是互不相容事件;但是,两个互不相容事件不一定为对立事件.

如例 1.3 中 $A=\{2,4,6\}$, $C=\{1,3\}$,则 $A\cap C=\varnothing$,故 A,C 互不相容. 但是 $A\cup C=\{1,2,3,4,6\}\neq\Omega$,故 A,C 不是对立事件.

7. 完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容,并且它们的和为必然事件(或样本空间),则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个**完备事件组**.

即如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,则必须满足如下两个条件:

①$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$;

②$A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$.

显然,$\{A,\overline{A}\}$就构成一个完备事件组.

事件间的关系与运算可用维恩(Venn)图(图 1.1)直观地加以表示. 图中方框表示样本空间 Ω,圆 A 和圆 B 分别表示事件 A 和事件 B.

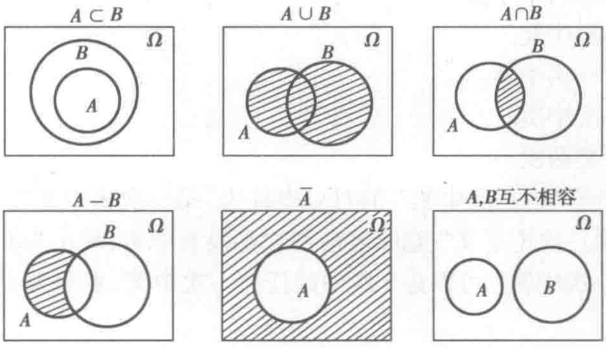

图 1.1

不难验证事件的运算满足如下关系:

1. 交换律

$$A\cup B=B\cup A$$

2. 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

3. 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

4. 对偶公式(De Morgan 定理)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

对偶公式还可以推广到多个事件的情况. 一般而言,对 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有:

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n$$
$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n$$

对偶公式表明,"至少有一个事件发生" 的对立事件是"所有事件都不发生";"所有事件都发生" 的对立事件是"至少有一个事件不发生".

例 1.4 某人连续 3 次购买体育彩票,每次一张. 令 A,B,C 分别表示其第一、第二、第三次所买的彩票中奖的事件. 试用 A,B,C 及其运算表示下列事件:

① 第三次未中奖.

② 只有第三次中了奖.

③ 恰有一次中奖.

④ 至少有一次中奖.

⑤ 不止一次中奖.

⑥ 至多中奖两次.

解 ① 显然"第三次中奖" 的对立事件为"第三次未中奖",表示为$\overline{C}$.

②"只有第三次中了奖" 意味着前两次都没有中奖,表示为$\overline{A}\,\overline{B}C$.

③"恰有一次中奖" 可以是3 次中的任何一次中奖,表示为$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

④"至少有一次中奖" 意味着可以是3 次中的任何一次中奖,或者看成3 次都不中的逆事件,该事件表示为 $A \cup B \cup C$ 或$\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}$.

⑤"不止一次中奖" 说明3 次中至少有两次中奖,表示为 $AB \cup AC \cup BC$.

⑥"至多中奖两次" 的对立事件为"3 次都中奖", 因此该事件可表示为$\overline{ABC}$.

例 1.5 对某产品的质量进行抽样检验,产品分为正品和次品两种,进行 3 次抽样每次抽取一件产品,记事件 A_n = "第 n 次取到正品",$n = 1,2,3$. 试用事件 A_1, A_2, A_3 表示下列事件:

① 前两次都取到正品,第三次未取到正品.

② 3 次都未取到正品.

③ 3 次中只有一次取到正品.

④ 3 次中至多有一次取到正品.

⑤ 3 次中至少有一次取到正品.

解　显然,$\overline{A}_n$ = "第 n 次未取到正品",$n = 1,2,3$.

①$A_1A_2\overline{A_3}$.

②$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ 或$\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

③$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$.

④$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 或$\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3$.

⑤$A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

事件间的关系及运算与集合间的关系及运算在记号表示上是一致的. 对初学概率的读者来说,要学会用概率论的语言来解释集合间的关系及运算,并能运用它们. 为便于学习,现将事件间关系与集合间关系比较列于表 1.1。

表 1.1

记　号	概率论	集合论
Ω	样本空间、必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点、基本事件	点(元素)
A	随机事件	Ω 的子集
$A \subset B$	A 发生导致 B 发生	A 为 B 的子集
$A = B$	二事件相等	二集合相等
$A \cup B$ 或 $A + B$	二事件 A、B 至少发生一个	二集合 A、B 的并集
$A \cap B$ 或 AB	二事件 A、B 同时发生	二集合 A、B 的交集
$A - B$	事件 A 发生而 B 不发生	集合 A、B 的差集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 对 Ω 的补集
$AB = \varnothing$	二事件 A、B 互不相容	二集合 A、B 不相交

§1.3 概率及其性质

对一个事件 A,用一个恰当的数 $P(A)$ 表示该事件发生的可能性大小,这个数 $P(A)$ 就是事件 A 的概率,因此概率度量了随机事件发生的可能性大小.既然概率度量了事件发生的可能性大小,可以想到,在 N 次重复试验中,若概率 $P(A)$ 较大,则事件 A 发生的频率也较大,反之也一样,而且概率与频率有许多相似的性质.为此,先考察频率的有关性质.

一、频率

定义 1.1 设在相同的条件下,重复进行了 n 次试验,若随机事件 A 在这 n 次试验中发生了 n_A 次,则比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**,其中 n_A 称为事件 A 发生的**频数**.

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 描述了事件 A 发生的频繁程度.显然,$f_n(A)$ 越大,事件 A 发生越频繁,即 A 发生的可能性越大,反过来也一样.因此,频率 $f_n(A)$ 反映了事件 A 发生的可能性大小.一般而言,随着试验次数的变化,频率会有所波动,但实验表明,当试验次数 n 充分大时,随着 n 的增大,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总是在某一常数附近波动,且波动幅度越来越小,这种性质称之为**频率的稳定性**.

例如,投掷一枚硬币,既可能出现正面,也可能出现反面,预先作出确定的判断是不可能的,但是假如硬币质地均匀,直观上出现正面与出现反面的机会应该相等,即在大量试验中出现正面的频率应接近于50%.为了验证这一事实,历史上不少人分别做过这样的试验:“大量重复投掷一枚质地均匀的硬币,观察它出现正面或反面的次数”,表 1.2 所示为他们试验结果的部分记录.

表 1.2

实验者	掷硬币次数 / 次	出现正面次数 / 次	频率
德摩根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9