国家科学技术学术著作出版基金资助出版

机构运动微分几何学分析与综合

The Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages

王德伦　汪伟　著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

机构运动微分几何学分析与综合

王德伦　汪伟　著

机械工业出版社

本书以微分几何学方法系统地介绍了刚体运动几何学理论体系，以鞍点规划方法阐述了机构离散运动综合的统一方法。为了便于初学者入门和建立概念，全书以平面、球面、空间机构的运动几何学与离散运动综合的顺序进行阐述。

第1、3章的前面简单概述微分几何学基础知识，在第3章以微分几何学方法讨论了机构中几种常见约束曲线与约束曲面的不变量与不变式。

第1、4、6章分别为刚体平面、球面和空间运动微分几何学，以已知刚体运动参考点（线）轨迹曲线（曲面）的活动标架微分描述刚体无限接近连续运动，在瞬心线和瞬轴面的活动标架上考察运动刚体上点线的轨迹曲线曲面，以不变量与不变式讨论其局部几何性质，系统地梳理了刚体平面和球面运动几何学，并发展到空间运动几何学，形成了刚体运动微分几何学理论体系。

第2、5、7章分别为平面、球面和空间连杆机构的离散运动鞍点综合的统一方法。建立离散轨迹曲线曲面整体性质的鞍点规划评价方法，从约束曲线曲面不变量与不变式的视角讨论运动刚体上点线离散轨迹与机构二副杆约束曲线曲面的整体接近程度，形成了从刚体平面、球面到空间离散运动几何学体系框架，结合机构运动综合要求，建立了平面、球面和空间机构离散运动鞍点综合的统一方法。

本书的英文版“The Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages”即将由 Wiley Press 出版。

图书在版编目（CIP）数据

机构运动微分几何学分析与综合/王德伦，汪伟著. —北京：机械工业出版社，2014.10
ISBN 978-7-111-47935-2

Ⅰ.①机… Ⅱ.①王…②汪… Ⅲ.①机构运动分析-研究生-教材 Ⅳ.①TH112

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第209468号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）
策划编辑：余 皞 责任编辑：余 皞 卢若薇
版式设计：赵颖喆 责任校对：张晓蓉
封面设计：张 静 责任印制：刘 岚
北京圣夫亚美印刷有限公司印刷
2015年3月第1版第1次印刷
184mm×260mm ·27.75印张·3插页·669千字
标准书号：ISBN 978-7-111-47935-2
定价：88.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机工官网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机工官博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金书网：www.golden-book.com

前 言

刚体运动几何学与机构综合，其理论体系尚欠完整，为机械设计提供的运动几何理论基础在近半个多世纪中没有大的变化，是经典而又困难的研究领域。本书总结了作者及其指导的研究生在该领域的研究成果，以微分几何学（标架微分运动）考察刚体连续运动轨迹的局部性质，梳理了刚体平面和球面运动几何学，并发展到空间运动几何学，形成了刚体运动微分几何学理论体系。以鞍点规划方法评价刚体离散运动轨迹的整体性质，从不变量与不变式的视角讨论刚体离散运动几何学，建立了平面、球面和空间机构离散运动鞍点综合的统一方法。

刚体运动几何学研究瞬时连续运动轨迹的局部性质和离散运动轨迹的整体性质，常用的方法是几何法与代数法。几何法是经典研究方法，简洁直观，但对于空间几何图形问题颇为复杂，难以实施，而且不便计算机处理。代数法也是常规的研究方法，由于代数法可以借用计算机计算，近年来有长足进步。但代数方程式的建立依赖于所在坐标系，即使简单图形位于坐标系中的方向和位置不同，也会导致表达方程式的极大差异，特别是刚体空间运动几何学，不仅有点的空间轨迹曲线，而且还有直线的空间轨迹曲面，图形甚为复杂，从而增加了刚体运动几何学局部和整体性质研究的难度。

刚体瞬时运动几何学本是刚体瞬时运动学与图形几何学的结合，理应是从运动视角研究图形的几何性质，而刚体瞬时微小运动则可视为标架微分。因此，微分几何学理所当然是刚体运动几何学研究的首选方法，然而现状却并非如此，这也是作者写本书的动因之一。由于微分几何学是用微分方法研究图形性质的数学分支，微分几何学以矢量代数和矢量解析为基本手段，以活动标架为基本方法，把图形的几何形状与所研究的点或线在图形上的运动有机地联系起来，得到图形的不变量和不变式，并以其描述图形的性质。通过把复杂图形的不变量和不变式与简单、规范图形的不变量和不变式相比较，从差异中把握所研究复杂图形的性质。刚体运动的动定瞬轴面（瞬心线）与运动刚体上点（线）轨迹、约束曲线（曲面）的不变量及不变式关系（广义曲率），建立了平面、球面到空间的刚体运动微分几何学理论体系。而关于图形（曲线、曲面）的矢量方程、不变量和不变式、活动标架以及相伴曲线与曲面方法等，形成了本书的微分几何学语言，贯穿全书的始终。

刚体离散运动几何学讨论离散运动轨迹的整体性质，通过离散轨迹与规范约束曲线（曲面）的整体比较，获得运动刚体上的特征点或特征直线。在经典离散运动几何学中，通

过螺旋三角形（转动极）建立刚体离散运动位置与规范几何图形的联系，实现离散轨迹与约束曲线、曲面的比较。由于离散位置过少，而机构运动综合中通常按所要综合的机构建立连架杆约束方程，然后把目标函数与约束方程转化为数学上非线性规划问题求解，不仅约束方程性质和求解方法因综合机构不同而异，而且其误差评价标准难以准确一致，以至于影响解的存在性和迭代收敛性。作者采用约束曲线与约束曲面的不变量与不变式，通过鞍点规划使离散轨迹与约束曲线、曲面整体比较的最大误差最小，建立刚体离散运动相关位置的约束曲线、曲面对应关系，从不变量与不变式的视角讨论刚体离散运动几何学，从而建立了平面、球面和空间机构离散运动鞍点综合的统一方法。由于以最大拟合误差极小为评价标准，得到统一的法向误差评价体系，对各类曲线、曲面评价拟合准确一致，加之采用不变量，使得求解迭代过程中每一步拟合误差评价在目标函数上都能体现每个变量的实际影响。同时，由于曲线、曲面误差评价拟合的非线性性质，使得机构近似综合解的存在性和局部迭代收敛性得到保证，结合遗传算法可以得到较大范围的局部最优解。

本书系统地介绍了刚体运动微分几何学理论体系及机构离散运动鞍点综合的统一方法，为机构运动几何分析与综合方法能够在工程实践中应用提供了理论基础。为了便于初学者入门和建立概念，全书以平面、球面、空间机构的运动微分几何学与鞍点综合的顺序进行阐述，共七章，并编写了附录。第 1、4、6 章为刚体平面、球面和空间运动微分几何学，第 2、5、7 章分别介绍平面、球面和空间连杆机构的离散运动鞍点综合的统一方法。而微分几何学基础知识被安排在第 1、3 章的前面，以便融入本书体系中，也便于阅读。为了使读者适应本书的微分几何学方法，第 1 章的内容与表达方式可以和现有文献进行对比，因而相对容易建立概念和理解刚体运动微分几何学理论体系。第 4 章刚体球面运动微分几何学在表现形式上是连接刚体平面运动到空间运动的桥梁，也可以作为空间运动的特例。但为了使过渡平缓，放在第 4 章介绍，因其数学基础同空间运动，故在第 3 章一并介绍空间曲线、曲面微分几何学。附录简要地介绍了空间 RCCC 和 RRSS 四杆机构的求解统一方法，便于读者计算验证示例。虽然把从平面、球面到空间的刚体运动几何学与机构离散运动鞍点综合统一方法分别交叉讲述，在理论体系上削弱了连贯性，但降低了阅读本书的门槛，便于机构运动几何学与机构运动鞍点综合的联系。

二十余年岁月转瞬即逝，作者从事机构学研究源于作者攻读博士学位期间的两位导师。当年是肖大准教授将作者领入机构学领域，并谓之是一项艰苦而又困难的选择，使作者既准确理解现实课题，又清醒对待未来研究；当年是刘健教授赋予作者研究激情和灵感，作者所提出的学术思想往往来自和刘健教授的讨论过程中；当年是 K. H. Hunt《机构运动几何学》等经典著作对机构学问题与挑战的精彩阐述，使作者被吸引而不能自拔。与此同时，国内许多机构学前辈和国外学者给予作者极大的鼓励和鞭策，如张启先院士、熊有伦院士、李华敏教授、杨基厚教授、白师贤教授、陈永教授、黄真教授、邹慧君教授、杨廷力教授、颜鸿森教授、张策教授、张春林教授、申永胜教授、戴建生（Jian. S. Dai）教授、J. M. McCarthy 教

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

授、丁昆隆（Kwun-Lon Ting）教授、葛巧德（Jeff. Q. Ge）教授等，使作者能保持对机构学研究的热情；国内新一代机构学学者，如黄田教授、高峰教授、邓宗全教授、余跃庆教授、谢进教授、丁希仑教授、杨玉虎教授、林松教授、李树军教授等也给予作者极大的支持，从而使新的学术观点和方法得以发展。

本书来源于作者领导的课题组的研究成果，在作者的博士学位论文工作基础上，还有作者指导的三名博士和七名硕士研究生参加了这项课题的研究工作，其中有博士研究生汪伟、李涛、王淑芬，硕士研究生肖丽华、周井苍、李天箭、郑鹏程、张保印、张建军、柴杰、李景雷等，本书的成果有他们的智慧和辛勤劳动；作者的大学同班同学于树栋教授（Ryerson University，Canada）、研究生同学和共事三十年的董惠敏教授给作者很大帮助，在此致以谢意。

本课题的研究工作曾得到国家自然科学基金两次资助（59305033 和 59675003），本书的出版也获得了国家科学技术著作出版基金的资助及机械工业出版社的大力支持，在此一并表示感谢。

人生有限，知识无限，随着科学技术的发展，机构学研究成果将日益丰富，本书由于作者的研究水平和时间所限，可能一叶障目，有不当之处，还恳请读者指正。

王德伦

于大连理工大学

2014 年 4 月

目 录

前言

第 1 章 平面运动微分几何学 ······ 1

1.1 平面曲线微分几何学 ······ 1

1.1.1 矢量与圆矢量函数 ······ 1

1.1.2 Frenet 标架 ······ 5

1.1.3 相伴方法（Cesaro 方法） ······ 9

1.2 平面运动微分几何学 ······ 12

1.2.1 相伴运动 ······ 12

1.2.2 瞬心线 ······ 16

1.2.3 点轨迹的 Euler-Savary 公式 ······ 23

1.2.4 高阶曲率理论 ······ 28

1.2.5 直线包络的 Euler-Savary 公式 ······ 36

1.3 平面连杆曲线微分几何学 ······ 42

1.3.1 局部几何特征 ······ 42

1.3.2 二重点 ······ 44

1.3.3 四杆机构Ⅰ的二重点 ······ 48

1.3.4 四杆机构Ⅱ的二重点 ······ 53

1.3.5 卵形曲线 ······ 59

1.3.6 对称曲线 ······ 61

1.3.7 分布规律 ······ 63

1.4 讨论 ······ 64

参考文献 ······ 67

第 2 章 平面机构离散运动鞍点综合 ······ 70

2.1 平面离散运动的矩阵表示 ······ 71

2.2 鞍点规划 …… 72
2.3 鞍圆点 …… 75
2.3.1 鞍圆与二副连架杆 R-R …… 76
2.3.2 鞍圆误差 …… 78
2.3.3 四位置鞍圆 …… 80
2.3.4 五位置鞍圆 …… 82
2.3.5 多位置鞍圆 …… 85
2.3.6 圆点与鞍圆点 …… 86
2.4 鞍滑点 …… 92
2.4.1 鞍线与二副连架杆 P-R …… 92
2.4.2 鞍线误差 …… 93
2.4.3 三位置鞍线 …… 95
2.4.4 四位置鞍线 …… 97
2.4.5 多位置鞍线 …… 99
2.4.6 滑点与鞍滑点 …… 100
2.5 平面四杆机构离散运动鞍点综合 …… 103
2.5.1 平面连杆机构的运动综合类型 …… 103
2.5.2 全铰链四杆机构 …… 110
2.5.3 曲柄滑块机构 …… 119
2.6 平面六杆机构的近似间歇运动函数综合 …… 125
2.6.1 间歇运动函数与机构鞍点综合基本形式 …… 125
2.6.2 连杆曲线局部自适应拟合方法 …… 128
2.6.3 间歇运动函数的六杆机构近似综合 …… 130
2.7 讨论 …… 141
参考文献 …… 145

第3章 空间约束曲线与约束曲面微分几何学 …… 151

3.1 空间曲线微分几何学概述 …… 151
3.1.1 矢量表示 …… 151
3.1.2 Frenet 标架 …… 154
3.2 曲面微分几何学概述 …… 156
3.2.1 曲面微分几何学概要 …… 156
3.2.2 直纹面的 Frenet 标架和不变量 …… 162
3.2.3 相伴方法 …… 165
3.3 约束曲线和约束曲面 …… 170

3.4 约束曲线微分几何学 …… 173
3.4.1 球面曲线（S-S） …… 173
3.4.2 圆柱面曲线（C-S） …… 175
3.5 约束曲面微分几何学 …… 179
3.5.1 定斜直纹面（C′-P′-C） …… 179
3.5.2 定轴直纹面（C′-C） …… 181
3.5.3 常参数类直纹面（H-C，R-C） …… 185
3.5.4 定距直纹面（S′-C） …… 188
3.6 曲线的广义曲率 …… 190
3.6.1 曲线和曲面的接触条件 …… 190
3.6.2 球曲率与圆柱曲率 …… 193
3.7 直纹面的广义曲率 …… 199
3.7.1 相切定义与条件 …… 199
3.7.2 直纹面与直纹面的接触条件 …… 200
3.7.3 定斜曲率 …… 202
3.7.4 定轴曲率 …… 203
3.8 讨论 …… 203
参考文献 …… 205

第4章 球面运动微分几何学 …… 207

4.1 球面运动基本方程 …… 207
4.1.1 一般形式 …… 207
4.1.2 相伴表示 …… 209
4.2 球面运动几何学 …… 213
4.2.1 球面瞬心线（瞬轴面） …… 213
4.2.2 欧拉公式 …… 217
4.3 球面机构连杆曲线 …… 227
4.3.1 连杆曲线基本方程 …… 227
4.3.2 二重点 …… 227
4.3.3 球面连杆曲线分布规律 …… 231
4.4 讨论 …… 232
参考文献 …… 234

第5章 球面机构离散运动鞍点综合 …… 236

5.1 刚体球面离散运动的矩阵表示 …… 236

5.2 鞍球面圆点 …… 238
5.2.1 鞍球面圆与二副连架杆 R-R …… 238
5.2.2 鞍球面圆误差 …… 241
5.2.3 四位置鞍球面圆 …… 242
5.2.4 五位置鞍球面圆 …… 244
5.2.5 多位置鞍球面圆 …… 245
5.2.6 鞍球面圆点 …… 246
5.3 球面四杆机构鞍点综合 …… 251
5.3.1 球面连杆机构的运动综合类型 …… 252
5.3.2 球面四杆机构鞍点综合模型 …… 256
5.3.3 多位置近似综合 …… 258
5.3.4 少位置精确综合 …… 261
5.4 讨论 …… 265
参考文献 …… 267

第 6 章　空间运动微分几何学 …… 270

6.1 刚体空间运动表述 …… 270
6.1.1 一般形式 …… 270
6.1.2 相伴形式 …… 272
6.2 空间运动的瞬轴面 …… 277
6.2.1 定瞬轴面 …… 277
6.2.2 动瞬轴面 …… 279
6.3 点的空间运动微分几何学 …… 282
6.3.1 点的运动学 …… 282
6.3.2 Darboux 标架 …… 286
6.3.3 欧拉公式 …… 288
6.3.4 球曲率与圆柱曲率 …… 290
6.4 直线的空间运动微分几何学 …… 293
6.4.1 Frenet 标架 …… 293
6.4.2 腰曲线 …… 297
6.4.3 球面像曲线 …… 299
6.4.4 直纹面与运动副连接 …… 301
6.4.5 定轴曲率与定轴线 …… 305
6.4.6 定常曲率与定常线 …… 317
6.5 空间 RCCC 机构运动微分几何学 …… 322

6.5.1 相伴表示 …… 323
6.5.2 瞬轴面 …… 326
6.5.3 连杆点的瞬时运动 …… 329
6.5.4 连杆上直线的瞬时运动 …… 333
6.6 讨论 …… 341
参考文献 …… 344

第7章 空间机构离散运动鞍点综合 …… 347

7.1 空间离散运动的矩阵表示 …… 348
7.2 鞍球点 …… 351
7.2.1 鞍球面与二副连架杆 S-S …… 351
7.2.2 鞍球面误差 …… 353
7.2.3 五位置鞍球面 …… 355
7.2.4 六位置鞍球面 …… 357
7.2.5 多位置鞍球面 …… 358
7.2.6 鞍球点 …… 358
7.3 鞍圆柱点 …… 362
7.3.1 鞍圆柱面与二副连架杆 C-S（R-S，H-S） …… 363
7.3.2 鞍圆柱面误差 …… 365
7.3.3 六位置鞍圆柱面 …… 367
7.3.4 七位置鞍圆柱面 …… 368
7.3.5 多位置鞍圆柱面 …… 369
7.3.6 鞍圆柱点 …… 370
7.3.7 鞍圆柱点退化（R-S，H-S） …… 371
7.4 鞍定轴线 …… 376
7.4.1 鞍定轴面与二副连架杆 C-C …… 376
7.4.2 鞍球面像圆点 …… 377
7.4.3 鞍腰线圆柱点 …… 379
7.4.4 鞍定轴线 …… 384
7.5 鞍定常直线 …… 384
7.5.1 鞍单叶双曲面与二副连架杆 R-C 类（R-R） …… 385
7.5.2 鞍螺旋面与二副杆 H-C 类（H-R，H-H） …… 386
7.6 空间连杆机构鞍点综合 …… 400
7.6.1 空间机构运动综合类型的转换 …… 400
7.6.2 空间 RCCC 机构鞍点综合 …… 406

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

7.6.3 空间 RRSS 机构鞍点综合 …… 410
7.6.4 空间 RRSC 机构鞍点综合 …… 413
7.7 讨论 …… 416
参考文献 …… 420

附录 …… 423

附录 A 空间 RCCC 四杆机构的位移求解 …… 423
附录 B 空间 RRSS 四杆机构的位移求解 …… 427
参考文献 …… 429

第 1 章

平面运动微分几何学

平面运动几何学研究图形或刚体平面运动位移的几何性质，即运动刚体上点、线在固定坐标系中轨迹的几何性质，而此处的运动是指刚体占据一系列位置，不涉及具体的时间长短。运动刚体占据位置有连续的，也有分离的，前者称为无限接近位置的运动几何学或瞬时运动几何学，后者称为有限分离位置的运动几何学或离散运动几何学，它们是机构运动综合的理论基础，在机构学研究中具有重要地位。本章仅讨论前者，后者在下一章论述。

平面瞬时运动几何学是机构学的经典理论，研究内容丰富，理论体系较为完善，现有研究方法主要为传统的几何法与代数法，前者直观，后者便于计算。但对于刚体运动学与轨迹图形几何学性质及其相互联系的研究，还是现代微分几何学方法见长，不仅采用不变量与不变式刻画几何学性质，消除坐标系影响，从而使表达式简洁明了，同时以活动标架方式将运动学与几何学联系起来，以运动方式研究几何学问题，尤其是三维空间乃至多维空间运动几何学，更彰显微分几何学方法的优势。

本章从简单的平面运动几何学入手，既体现机构运动微分几何学方法的系统性，把有关微分几何学知识与方法一并介绍，又以循序渐进方式介绍，也方便读者阅读。

1.1　平面曲线微分几何学

为阅读本书方便，本节简单介绍平面曲线的基本内容，在微分几何学书中已经证明的定理，在此不再证明，请读者参考有关文献[1]。

1.1.1　矢量与圆矢量函数

通常在表达一条平面曲线 Γ 时，往往习惯用直角坐标参数表示：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

式中，t 为曲线的参数，若置换自变量或者消去参数 t，可写成：

$$y = F(x) \tag{1.2}$$

或者写成隐函数形式：

$$F(x, y) = 0 \tag{1.3}$$

将上述 x，y 置于平面固定坐标系 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 中，则曲线 $\varGamma$ 以参数 t 表示的矢量方程为：

$$\varGamma: \boldsymbol{R} = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} \tag{1.4}$$

将其简化写成：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(t) \tag{1.5}$$

式（1.4）与式（1.5）为平面曲线的矢量表示形式，t 为曲线 $\varGamma$ 的一般参数。显然，式（1.5）中的矢量 $\boldsymbol{R}$ 既有大小又有方向变化，将其矢量单位化并赋以角度函数，在平面坐标系 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 中，与 $\boldsymbol{i}$ 轴夹 φ 角的单位矢量函数 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)}$，称为圆矢量函数，如图 1.1 所示。因此，将平面曲线的参数 t 置换为 φ，用圆矢量函数表示曲线 $\varGamma$ 为：

$$\boldsymbol{R} = r(\varphi)\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} \tag{1.6}$$

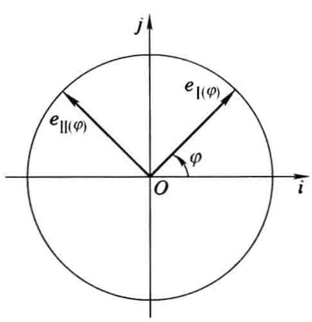

图 1.1　圆矢量函数

显然，此时 $\boldsymbol{R}$ 的大小由标量函数 $r(\varphi)$ 确定，方向由圆矢量函数 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)}$ 确定。

将 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)}$ 绕着单位矢量 $\boldsymbol{k}$ 逆时针转动 90°，便得另一圆矢量函数 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi+\pi/2)}$，其中 $\boldsymbol{k}$ 在本章以及第 2 章中均为垂直书面平面并指向读者的单位矢量。圆矢量函数具有如下的性质：

（1）展开式

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} = \cos\varphi \boldsymbol{i} + \sin\varphi \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} = -\sin\varphi \boldsymbol{i} + \cos\varphi \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{1.7}$$

（2）正交性　约定 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)},\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)},\ \boldsymbol{k}\}$ 构成单位正交右手系，即：

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} \cdot \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} = 0, \boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} \times \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} = \boldsymbol{k} \tag{1.8}$$

（3）合角公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\theta+\varphi)} = \cos(\theta+\varphi)\boldsymbol{i} + \sin(\theta+\varphi)\boldsymbol{j} = \cos\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} + \sin\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} \\ \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\theta+\varphi)} = -\sin(\theta+\varphi)\boldsymbol{i} + \cos(\theta+\varphi)\boldsymbol{j} = -\sin\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} + \cos\theta\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)} \end{cases} \tag{1.9}$$

（4）微分公式

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\mathrm{II}(\varphi)}}{\mathrm{d}\varphi} = -\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} \tag{1.10}$$

由于曲线参数表现形式的复杂程度与所选择的参数及坐标系有关，同一条曲线因参数及坐标系的不同表现形式产生较大差异，例如：

【例 1-1】 圆，如图 1.2 所示。

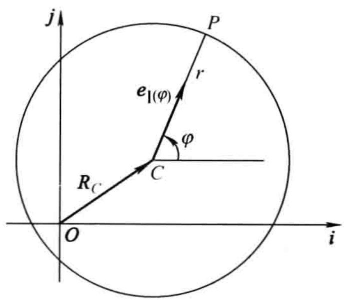

图 1.2　圆

圆在平面直角坐标系 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 中的方程为：

$$\begin{cases} x = x_C + r\cos\varphi \\ y = y_C + r\sin\varphi \end{cases} \quad (0 \leqslant \varphi < 2\pi) \tag{E1-1.1}$$

式中，r 为圆的半径，$(x_C,\ y_C)$ 为圆心 C 在坐标系 $\{\boldsymbol{O};\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 中的坐标。若将坐标原点取在圆心，则 $x_C = y_C = 0$。若采用圆矢量函数表示圆的矢量方程，如下式：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C + r\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} \tag{E1-1.2}$$

【例 1-2】 渐开线，如图 1.3 所示。

若取固定坐标系在渐开线基圆中心，基圆半径为 r_b，则渐开线的表达有：

（1）极坐标表达

$$\begin{cases} r = \dfrac{r_\mathrm{b}}{\cos\alpha} \\ \theta = \tan\alpha - \alpha \end{cases} \tag{E1-2.1}$$

（2）直角坐标表达

$$\begin{cases} x = r_\mathrm{b}\cos\varphi + r_\mathrm{b}\varphi\sin\varphi \\ y = r_\mathrm{b}\sin\varphi - r_\mathrm{b}\varphi\cos\varphi \end{cases} \tag{E1-2.2}$$

采用圆矢量函数，渐开线的矢量方程可表达为（图 1.4）：

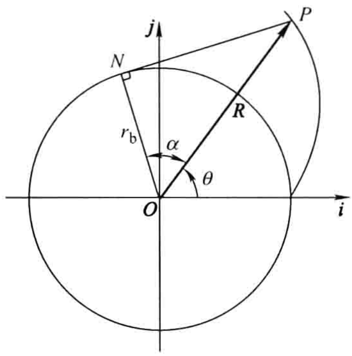

图 1.3　渐开线

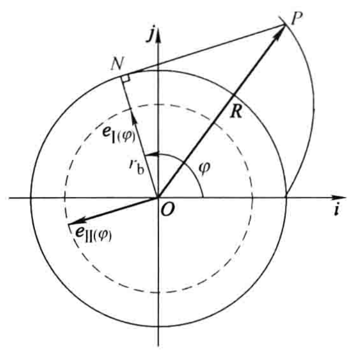

图 1.4　渐开线的圆矢量函数

$$\boldsymbol{R} = r_b \boldsymbol{e}_{I(\varphi)} - r_b \varphi \boldsymbol{e}_{II(\varphi)} \tag{E1-2.3}$$

【例 1-3】 平面全铰链四杆机构连杆曲线。

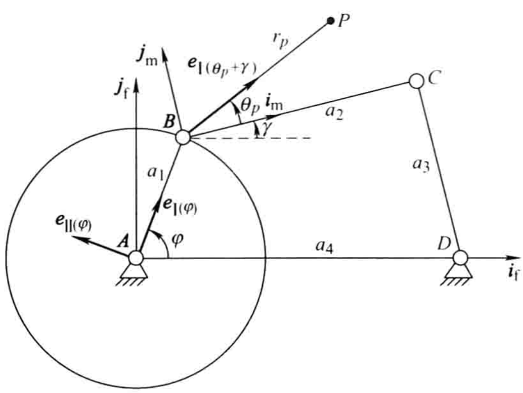

图 1.5　平面全铰链四杆机构

如图 1.5 所示，在平面全铰链四杆机构 $ABCD$ 中，杆长分别为 a_1，a_2，a_3，a_4，AD 杆为机架，连杆 BC 与机架 AD 的夹角为 γ，原动件 AB 与机架 AD 的夹角为 φ。分别建立连杆坐标系 $\{\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{i}_m,\ \boldsymbol{j}_m\}$ 与机架固定坐标系 $\{\boldsymbol{A};\ \boldsymbol{i}_f,\ \boldsymbol{j}_f\}$，对于连杆上极坐标为（$r_P$，$\theta_P$）的任意一点 P，在连杆坐标系 $\{\boldsymbol{B};\ \boldsymbol{i}_m,\ \boldsymbol{j}_m\}$ 中的直角坐标为：

$$\begin{cases} x_m = r_P \cos\theta_P \\ y_m = r_P \sin\theta_P \end{cases} \tag{E1-3.1}$$

可通过坐标变换得到连杆点 P 在固定坐标系中的轨迹曲线的直角坐标方程为：

$$\begin{cases} x = r_P \cos(\theta_P + \gamma) + a_1 \cos\varphi \\ y = r_P \sin(\theta_P + \gamma) + a_1 \sin\varphi \end{cases} \tag{E1-3.2}$$

通过四杆机构位移求解得到函数 $\gamma = \gamma(\varphi)$，若消去式（E1-3.2）中的参数 φ，可获得连杆

曲线的六次代数方程。

显然，连架杆 AB 绕机架上铰链点 A 回转，用机架 AD 上圆矢量函数 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)}$ 表示连架杆上铰链点 B 的位移矢量，连杆 BC 绕连架杆上铰链点 B 回转，用机架上的圆矢量函数 $\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\theta_p+\gamma)}$ 表示连杆点 P 相对连架杆 AB 上 B 点的位移矢量，则该机构的连杆曲线的矢量方程为：

$$\boldsymbol{R}_P = a_1\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\varphi)} + r_P\boldsymbol{e}_{\mathrm{I}(\theta_P+\gamma)} \tag{E1-3.3}$$

注意下标括号内为圆矢量函数的自变量，与描述圆矢量所在坐标系有关。可见，采用圆矢量函数对平面曲线进行矢量表达，不但使得表达式简洁，更重要的是，由于圆矢量函数固有的性质，使得对平面曲线矢量方程的求导等计算更为简便。

选择合适的参数来简化曲线表达形式的复杂性，对研究曲线的性质十分重要。微分几何学已经给出了结论，即曲线的不变量与所选择的坐标系无关，如曲线 Γ 的弧长 s，是曲线的不变量，被称为曲线的自然参数。弧长参数 s 与式（1.4）中参数 t 的关系为：

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{R}| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t, s = \int_{t_a}^{t_b}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right|\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

曲线 Γ 的矢量方程用弧长参数 s 表示为：

$$\Gamma: \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s), s_a \leqslant s \leqslant s_b \tag{1.12}$$

由于 $\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\boldsymbol{R}|$，从而有 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}\right| = 1$。若把曲线 Γ 在某点 s 的邻域 Δs 内进行泰勒展开，则有：

$$\boldsymbol{R}(s+\Delta s) = \boldsymbol{R}(s) + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}(s)}{\mathrm{d}s}\Delta s + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}(s)}{\mathrm{d}s^2}(\Delta s)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{R}(s)}{\mathrm{d}s^n}(\Delta s)^n + \boldsymbol{\varepsilon}_n(s,\Delta s)(\Delta s)^n \tag{1.13}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\boldsymbol{\varepsilon}_n(s, \Delta s) = 0$。

1.1.2　Frenet 标架

由上述平面曲线在固定坐标系中矢量表示可以看出，平面曲线是刚体上点的平面运动（位移）轨迹。显然，刚体运动性质与轨迹曲线的几何性质有必然的联系，为了研究这种联系，在此构造运动坐标系沿平面曲线运动的方式。

平面曲线 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(s)$ 的单位切矢 $\boldsymbol{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}(s)}{\mathrm{d}s}$ 始终指向曲线弧长增加的方向，依据式（1.8）坐标轴正交右手系约定，定义法线矢量 $\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\alpha}$，其中矢量 $\boldsymbol{k}$ 的几何意义同式（1.8），即始终垂直于曲线所在平面，使得 $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{k}\}$ 在曲线上的每点 s 处构成单位正交右手系，从而构建了平面曲线的正交右手坐标系 $\{\boldsymbol{R}; \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$，即 Frenet 标架（也称活动标架），如图 1.6 所示。由于利用了曲线本身的切线与法线，因而与曲线的几何性质建立了密切联系，且其微分运算公式为：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com