本书适用于本科·大专·专升本·自考及考研复习

最新
高等数学复习指导
（同济四版）

北京大学数学科学学院 罗爱兵 主编
清华大学数学系副主任 韩云瑞 主审

重点难点指导
解题方法点睛
专项技巧一览
精选例题详解

海洋出版社

新世纪高等学校教材配套辅导丛书

最新高等数学复习指导

(同济四版)

(适用于本科、大专、专升本、自考及考研复习)

北京大学数学科学学院　罗爱兵　**主编**

清华大学数学系副主任　韩云瑞　**主审**

赵修坤　　吴娟香　　罗爱兵　**编著**

2000 年·北京

图书在版编目(CIP)数据

最新高等数学复习指导/罗爱兵主编．-北京:海洋出版社,2000

ISBN 7-5027-5070-3

Ⅰ．最…　Ⅱ．罗…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-教学参考资料　Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 69812 号

海洋出版社　**出版发行**

(100081　北京市海淀区大慧寺路 8 号)

三河市欣欣印刷有限责任公司印刷　新华书店经销

2000 年 9 月第 1 版　2000 年 9 月北京第 1 次印刷

开本:850×1168　1/32　印张:35

字数:1200 千字　印数:0001～3000 册

全套(共 3 册)定价:40.00 元

前　　言

在新世纪的曙光初现之际，为配合高等学校各科的教学与学生的复习、备考，我们**清华大学、北京大学**部分教学经验丰富的老师经过精心策划和编写，联合推出了这套《新世纪高等学校教材配套辅导丛书》。本书就是根据教育部颁发的高等学校数学教学大纲以及同济大学数学教研室组编的《高等数学》(第四版)教材编写的《最新高等数学复习指导》(同济四版)，由**清华大学数学系教授、系副主任　韩云瑞**主审，**北京大学数学科学学院　罗爱兵**主编。

高等数学是各类理工科院校最重要的一门理论基础课，它不仅是学习后续课程及在各个学科领域中进行理论研究和实践工作的必要基础，而且对学生其它能力的培养起着重要作用。如何更好地指导学生学习这门课程，加深学生对所学内容的理解和掌握，提高其综合运用知识解决实际问题的能力，以及帮助学生有效地备考，成为我们共同关注的问题。本书的目的也就在于此：为广大教师提供一本好的参考书，为广大学生提供一位好的辅导老师。

一、本书为高等学校**大学本科、大专、专升本**等各类在校学生高等数学课程的同步辅导用书，亦可作为在参加**自学考试、考研**前的复习用书。

二、本书每章中列出了教学大纲的**基本要求**，并且把内容列成表格形式，使读者一目了然，能对每一部分的要点进行系统掌握。

三、每章不仅涵括**基本内容、学习要点、解题方法、例题解析**，更为重要的是我们为读者指出了学习的**重点与难点**，对常考知识点进行了分析，能帮助学生举一反三地掌握这门课程。

四、本书精心选择例题，按类编排，并对各种**解题思路、方法和技巧**进行了详细的分析、总结和归纳，用**专题指导**的形式重点讲解。同时，**本书重要特点之一**在于，我们逐一指出了学生**最易犯的**

错误，使读者能在学习过程中少走弯路。

五、作为此课程的**同步辅导**，本书为读者精选了大量有针对性的**自测练习题**，并按大纲规定的教学计划与进度编排了**期中、期末**两种**阶段测试题**。所有习题难度由低到高，解析由浅入深，注意照顾到不同水平层次的学生。

六、作为此课程的**备考指要**，本书各章后相应该章内容编选了近年来的**考研真题**并加以解析，还精心组编了若干套**全真考研模拟试题以及最新的 2000 年考研真题及解析**，使读者对硕士研究生入学考试数学试题的形式、难度有一定了解，也便于立志考研的读者有针对性地进行复习和备考。

本书编写阵容强大，编写组织工作认真细致。参加编著的人员还有：华北工学院数学系教师赵修坤(四、九、十章)、吴娟香(六、七、八章)。

由于水平有限，且编写和出版时间仓促，所以尽管我们精益求精，书中难免仍存在不妥或需商榷之处，恳请读者指教并提出宝贵意见。

编　者

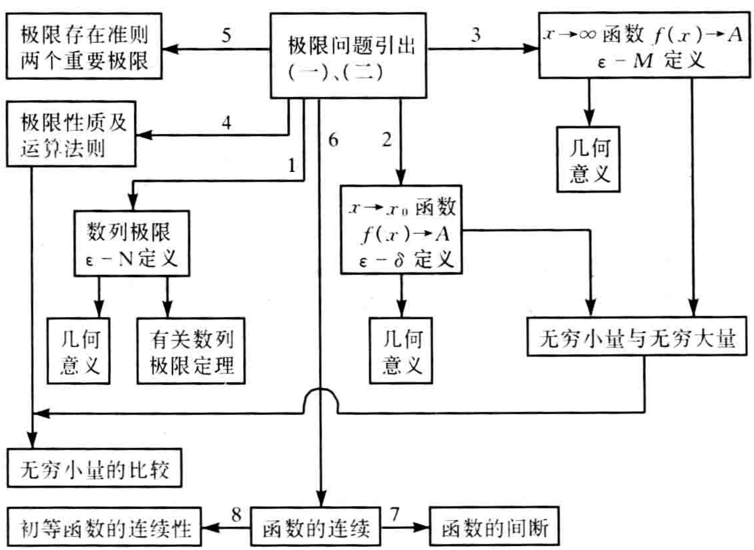
2000 年 8 月

目 录

第 1 章　函数与极限

函数、极限和连续是高等数学的几个最基本的概念,求极限的运算也是高等数学的基本运算之一．为进一步加深对这些概念的理解,首先复习一下函数的定义、性质和几个常用的初等函数．然后通过典型例题的分析与讨论,介绍求极限、讨论函数连续性的一般方法和一些常用技巧,以及如何利用函数的连续性的性质证明一些命题,为以后各章的学习打下坚实的基础．

本章内容总框图



1.1　函数

【目的与要求】

(1) 理解函数的概念,掌握函数的两个基本要求,会求函数的定义域;

(2) 了解函数的单调性、有界性、周期性和奇偶性,并会讨论函数的这些性质;

(3) 了解反函数和复合函数的概念,能熟练分析复合函数的复合过程;

(4) 熟悉基本初等函数的性质和图形;

(5) 了解分段函数的概念,并能画出简单分段函数的图形;

(6) 会分析简单实际问题(如几何问题、物理问题)中的变量关系,建立函数关系.

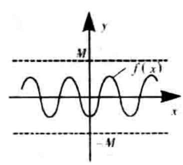
【基本内容】

表 1.1.1　函数及相关的概念

名称	定　　义	要点	补充说明
函数	设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的数集,如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$,D 称为定义域,x 称为自变量,y 称为因变量,数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为值域	对应法则 定义域	高等数学中讨论的函数是单值函数,遇到多值函数一般把其分为若干个单值函数
函数的图形	平面上点集 $C = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形		并非所有的函数都有图形. 例如:狄利克莱函数 $D(x) = \begin{cases} 1, (x \text{ 为有理数}) \\ 0, (x \text{ 为无理数}) \end{cases}$ 没有图形

复合函数	设函数 $y=f(x)$ 的定义域包含 $u=\varphi(x)$ 的值域，则在函数 $\varphi(x)$ 的定义域 D 上可以确定一个函数 $y=f[\varphi(x)]$，称为 φ 与 f 的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$ 或 $y=f\circ\varphi$	对应法则 定义域 值域	结合律成立 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ 但交换律不成立，即 $f\circ g\neq g\circ f$
一一对应	设 $f(x)$ 在 D 上定义，$\forall x_1, x_2\in D$，若由 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，或由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是一一对应的		不同的 x 对应不同的 y
反函数	设 $y=f(x)$ 在 D 上是一一对应的，值域为 W，$\forall y\in W$，用满足 $f(x)=y$ 的唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，由这样的关系所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 就称为原来函数 $y=f(x)$ 的反函数		$y=f(x)$ 为直接函数，$x=f^{-1}(y)$ 为反函数
初等函数	由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数	两个有限次	

表 1.1.2　函数的几种特性

性质	定　　义	图例或说明
有界性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\exists M>0$，$\forall x\in D$，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$，(或 $\exists m, M$，使得 $m\leqslant f(x)\leqslant M$ 成立)，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是有界函数	 函数 $f(x)$ 的图形位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间
无界性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义，若 $\forall M>0$，$\exists x_1\in D$，使得 $\lvert f(x_1)\rvert>M$，则称 $f(x)$ 在 D 上无界	例如：$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界，因为 $\forall M>0$，取 $x_1=\dfrac{1}{3M}$，则 $f(x_1)=3M>M$

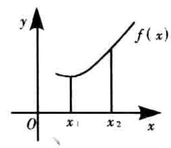
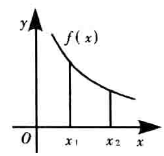
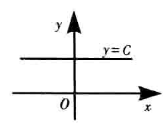
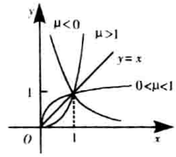
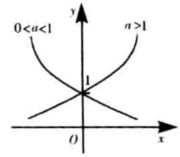
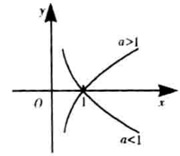
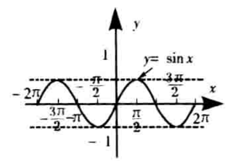
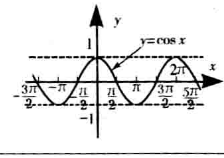
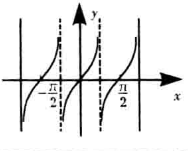
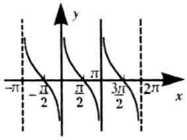
奇偶性	奇函数	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, $x, -x \in D$, 且 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数	图形关于原点对称
	偶函数	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, $x, -x \in D$, 且 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数	图形关于 y 轴对称
单调性	单调增加	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, $\forall x_1, x_2 \in D$, 由 $x_1 < x_2$, $\Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$	
	单调减少	函数 $f(x)$ 在 D 上定义, $\forall x_1, x_2 \in D$, 由 $x_1 < x_2$, $\Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$	
	若不等号严格成立,则称严格单调增加(减少)		
周期性	函数 $f(x)$ 在 D 上定义,若 $\exists T>0$, $\forall x \in D$, 有 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期为 T 的周期函数. 若在无穷多个周期中,有最小的正数 T, 则称 T 为周期函数 $f(x)$ 的最小周期,简称周期.		

表 1.1.3　基本初等函数

名称	定义及性质	图　　形
常数函数	$y=C(-\infty<C<+\infty)$ 平行于 x 轴,过 (O, C) 点的直线	

幂函数	$y = x^u$（u 为常数） $u > 0$ 时，函数 x^u 在 $(0, +\infty)$ 上严格上升 $u < 0$ 时，函数 x^u 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降 $y = x^u$ 与 $y = x^{\frac{1}{u}}$ 互为反函数	
指数函数	$y = a^x (a > 0, a \neq 1), x \in (-\infty, +\infty)$ $a > 1$ 时，函数 a^x 是严格单调增加的 $0 < a < 1$ 时，函数 a^x 是严格单调减少的	
对数函数	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1, 0 < x < +\infty)$ $a > 1$ 时，$y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调增加 $a < 1$ 时，$y = \log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 严格单调下降 若 $a = e$，记 $y = \log_e x$ 即 $y = \ln x$	
三角函数	正弦函数： $y = \sin x, -\infty < x < +\infty$	
	余弦函数： $y = \cos x, -\infty < x < +\infty$	
	正切函数： $y = \tan x$ $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	
	余切函数 $y = \cot x \ (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$	

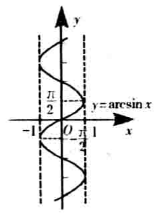
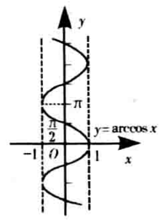
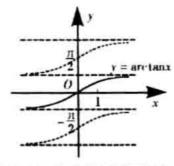
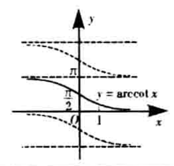
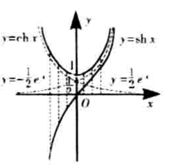
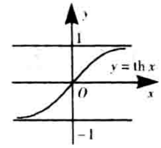
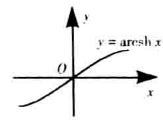
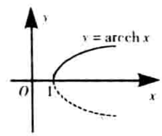
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$ $\left(-1 \leqslant x \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$	
	反余弦函数 $y = \arccos x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi)$	
	反正切函数 $y = \arctan x$, $\left(-\infty < x < +\infty, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$	
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, $(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi)$	

表 1.1.4　双曲函数

双曲正弦	$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	
双曲余弦	$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$	

双曲正切	$y = \text{th}x = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x}$	
双曲余切	$y = \text{cth}x = \dfrac{\text{ch}x}{\text{sh}x}$	
反双曲正弦	$y = \text{arcsh}x$	
反双曲余弦	$y = \text{arcch}x$	
反双曲正切	$y = \text{arcth}x$	

【学习要点】

(1) 函数概念的本质特征，是确定函数的两个要素：定义域和对应法则．

(2) 两个函数，当其定义域相同，对应法则一样时，那么这两个函数是相等的或相同的．

(3) 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，并不是所有函数都具有这些特性．

(4) 函数的复合是有条件的，并不是任何几个函数都可以复合成一个复合函数，复合函数的顺序是不能交换的，交换顺序则表示不同的函数．

(5) 初等函数可分为代数函数与超越函数两类．

分段函数往往不是初等函数．

【解题方法】

(1) 函数的定义域：使函数有意义的一切实数．分段函数定义域是各段定义域的并集．

(2) 考察函数的特性一般利用其定义．

(3) 复合函数：会进行函数的复合，同时也要能把比较复杂的复合函数分

解为几个相关联的简单函数的复合．

【例题解析及技巧】

[例1]　在下列各组函数中，找出两个函数等价的一组：

(1) $y = x^0$ 与 $y = 1$

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x}$ 与 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^3}}$

(4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 与 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

分析　两个函数当且仅当定义域和对应关系均相同时才表示同一函数，否则，它们表示两个不同的函数．

解　(1) $y = x^0$ 的定义域为 $x \neq 0$；$y = 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故该组的两个函数不等价．

(2) $y = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $x \geqslant 0$；$y = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故该组的两个函数也不等价．

(3) 所给两个函数的定义域均为 $x \neq 0$，且对应关系也相同，故该组的两个函数等价．

(4) $y = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2}}$ 的定义域为：

$$\begin{cases} x-3 \geqslant 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \quad \text{即 } x \geqslant 3$$

而 $y = \sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$ 的定义域为：

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-2} \geqslant 0 \\ x-2 \neq 2 \end{cases} \quad \text{即 } x \geqslant 3 \text{ 或 } x < 2$$

故两函数不等价．

注意　函数的表示法只与定义域和对应关系有关，而与用什么字母表示无关，这个性质很重要．

[例2]　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$ 求：

(1) $f(\sin x)$；(2) $f(x+a) + f(x-a)$ $(a > 0)$ 的定义域．

分析　求复合函数的定义域，要注意内层函数的值域必须包含在外层函