

电力类专业适用

初等数学

山东省电力工业局《数学》编写组

水利电力出版社

电力类专业适用

初 等 数 学

山东省电力工业局《数学》编写组

水利电力出版社

电 力 类 专 业 适 用

初 等 数 学

山东省电力工业局《数学》编写组

*

水利电力出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

水利电力出版社印刷厂印刷

*

1978年10月北京第一版

1978年10月北京第一次印刷

印数 00001—65500 册 每册 1.25 元

书号 15143·3391

内 容 提 要

本书系数学基础知识书籍，内容包括代数、平面几何、三角、矢量与复数。书中较系统地介绍了有关的基本概念、公式与定理。此外，还结合电力类各专业对数学的要求，编写了有关内容、例题与习题。

本书可作为电力类七·二一大学复习初等数学的参考书，也可作为电力系统职工业余教育的教学参考书，同时可供具有初中文化程度的自学者阅读。

前 言

为贯彻执行毛主席的无产阶级教育路线，落实英明领袖华主席关于“极大地提高整个中华民族的科学文化水平”的指示，适应电力系统办好七·二一大学和开展职工教育的需要，我们编写了这本《初等数学》，并继续编写《高等数学》。

《初等数学》共分六章。第一章系代数式与方程的基本知识，此外，还结合电力类专业对数学的要求，介绍了行列式与多元一次方程组的有关内容。第二章系平面几何，重点叙述三角形、相似形与圆的有关公式及定理。从第三章开始，介绍指数与对数、简单函数及其图象、三角函数、矢量与复数等内容，其中矢量与复数是配合《电工学》的需要编写的。此外还编写了附录。附录一是配合本书各章节的习题，附录二是习题答案。

本书是根据水利电力部提出的任务，由山东省电力工业局委托山东省电力学校负责组织编写的。参加编写工作的有山东省电力学校陈奇南同志、北京电力学校张齐金同志，并邀请山东工学院费定晖同志参加了本书的编写工作。哈尔滨电业局七·二一大学的同志也参加了部分初稿的编写工作。在编写与审定过程中，曾得到有关单位的大力帮助和热情支持，对此表示感谢。

由于我们的水平不高，实践经验较少，书中定有许多缺点和问题，欢迎读者提出宝贵的意见。

编 者

一九七八年四月

目 录

前 言

第一章 代数式与方程	1
第一节 代数式	1
1-1-1 实数及其运算	1
1-1-2 代数式的概念	7
1-1-3 整式及其运算	10
1-1-4 乘法公式与因式分解	13
1-1-5 分式及其运算	22
1-1-6 根式及其运算	28
第二节 方程	35
1-2-1 方程的概念	35
1-2-2 一元一次方程	37
1-2-3 一次方程组	42
1-2-4 用行列式解一次方程组	44
1-2-5 部分分式	62
1-2-6 一元二次方程	66
1-2-7 分式方程	74
1-2-8 根式方程	76
第二章 三角形、相似形与圆	78
第一节 基础知识	78
2-1-1 基本概念	78
2-1-2 相交与平行	82
2-1-3 证题举例	87
第二节 三角形	89
2-2-1 三角形的分类及其特殊线段	90
2-2-2 三角形的内角和	92

2-2-3	全等三角形	94
2-2-4	平行四边形与梯形	106
第三节	相似形	111
2-3-1	比例线段	112
2-3-2	相似形	115
第四节	圆	125
2-4-1	圆心角与圆周角	125
2-4-2	直径与弦	129
2-4-3	圆与直线、圆与圆的相切	132
第三章	指数与对数	142
第一节	指数	142
3-1-1	有理数指数	142
3-1-2	有理数指数幂的运算	148
3-1-3	无理数指数	151
第二节	对数	152
3-2-1	对数的概念	153
3-2-2	对数的运算法则	156
3-2-3	常用对数	159
3-2-4	应用对数进行计算	163
3-2-5	自然对数	168
3-2-6	指数方程与对数方程	171
第四章	简单函数及其图象	175
第一节	函数及其图象	175
4-1-1	函数的概念	175
4-1-2	函数的表示法	183
4-1-3	函数的图象	187
4-1-4	函数的增减性与奇偶性	193
第二节	正比例与反比例	196
4-2-1	正比例	196
4-2-2	反比例	201

第三节	一次函数	205
4-3-1	一次函数的概念	205
4-3-2	一次函数的图象与性质	207
4-3-3	线性经验公式	211
第四节	二次函数	214
4-4-1	二次函数的概念	214
4-4-2	函数 $y = ax^2$ 的图象与性质	215
4-4-3	函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与性质	220
第五节	幂函数、指数函数与对数函数	229
4-5-1	幂函数	229
4-5-2	指数函数	233
4-5-3	对数函数	239
第五章	三角函数	247
第一节	锐角三角函数	247
5-1-1	锐角三角函数的概念	247
5-1-2	30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值	251
5-1-3	锐角三角函数值的计算	254
5-1-4	同一锐角的三角函数间的关系	255
5-1-5	直角三角形的解法及其应用	258
第二节	任意角的三角函数	265
5-2-1	任意角的概念、弧度制	265
5-2-2	任意角三角函数的概念	275
5-2-3	任意角三角函数的简化公式	281
5-2-4	三角函数的基本恒等式	290
5-2-5	用线段表示三角函数	293
第三节	三角函数的图象与性质	295
5-3-1	正弦函数的图象与性质	296
5-3-2	正弦型曲线	299
5-3-3	余弦函数的图象与性质	308

5-3-4	正切、余切函数的图象与性质	309
5-3-5	利用单位圆作三角函数的图象	311
第四节	解任意三角形	312
5-4-1	正弦定理及其应用	312
5-4-2	余弦定理及其应用	315
5-4-3	三角函数对数表应用举例	320
第五节	复角的三角函数	323
5-5-1	和(差)角的三角函数	324
5-5-2	倍角与半角的三角函数	329
5-5-3	正弦、余弦的和差化积与积化和差	332
第六节	反三角函数	336
5-6-1	反正弦函数	336
5-6-2	反余弦函数	340
5-6-3	反正切函数与反余切函数	343
第七节	三角方程	346
5-7-1	最简单的三角方程	346
5-7-2	其它三角方程解法举例	353
第六章	矢量与复数	359
第一节	矢量	359
6-1-1	矢量的概念	359
6-1-2	矢量的基本运算	361
6-1-3	矢量的坐标表示法	366
第二节	复数	373
6-2-1	复数的概念	373
6-2-2	复数的几种形式	377
6-2-3	复数的运算	382
6-2-4	复数在电学中的应用	392
附录一	习题	399
附录二	习题答案	473
附录三	几何图形的面积公式与体积公式	507

第一章 代数式与方程

初等代数是以现实世界的数量关系为研究对象的。许多物理现象的规律，要从数量关系方面来说明，许多工程技术上的计算问题，要用到代数的知识。因此，代数是一种解决实际问题的数学工具。

代数式的恒等变形与方程的同解变形，是初等代数中的两个基本问题。本章将以这两个问题为线索，复习代数式与方程的有关知识，同时介绍行列式与多元一次方程组。

第一节 代 数 式

1-1-1 实 数 及 其 运 算

首先，我们将实数加以概括，并归纳成表，帮助记忆。

有理数指的是整数(包括正整数、负整数、零)和分数。

任何一个有理数都可以写成有限小数或无限循环小数的形式。因此，有限小数和无限循环小数都是有理数。整数、分数与有限小数和无限循环小数之间可以互化。例如：

$$5 = 5.0; \quad -\frac{1}{4} = -0.25; \quad \frac{2}{5} = 0.4;$$

$$\frac{1}{3} = 0.33\cdots = 0.\dot{3}; \quad \frac{1}{6} = 0.166\cdots = 0.1\dot{6};$$

$$0.\dot{7} = \frac{7}{9}^* ; 0.\dot{2}4 = \frac{24-2}{90} = \frac{11}{45}^{**}$$

但是，仅靠有理数是不能满足实际要求的。例如，已知正方形的面积等于 2，试求其边长。设 x 为所求的边长，那末， $x^2 = 2$ 。在有理数的范围内，找不到所需的 x 值。事实上， $x = \sqrt{2}$ 是一个无限不循环的小数，即

$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots.$$

它在小数点以后的位数是不可穷尽的，并且数字排列上也不是循环的。又如， $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{7}$ ， $\cdots$ ，都是无限不循环小数。象这种新的数，在开方中大量出现。在圆周长与其直径相比时，得到的圆周率 π 也是一个无限不循环小数，即

$$\pi = 3.14159265\cdots.$$

再如，在工程技术和自然科学中常用到的数 e 也是一个无限不循环小数，即

$$e = 2.71828\cdots.$$

已经证明，任何一个无限不循环小数都不能化成分数，更不能化成整数，也就是说超出了有理数的范围，数学上把无限不循环小数叫做无理数。

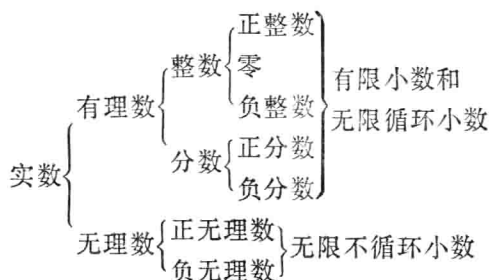
* 纯循环小数可以化成一个分数。这个分数的分子就是一个循环节的 数字所组成的数；分母的各位数字都是 9，9 的个数与一个循环节的

$$\text{位数相同。例如，} 0.\dot{1}\dot{6} = \frac{16}{99}, 0.\dot{1}2\dot{3} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}.$$

** 混循环小数可以化成一个分数。这个分数的分子，就是小数第二个循环节前面的数字组成的数，与不循环部分的数字所组成的数的差；分母头几位数字是 9，末几位数字是 0，9 的个数与一个循环节的位数相同，0 的个数与不循环部分的位数相同。

$$\text{例如，} 0.1\dot{2}3 = \frac{123-12}{900} = \frac{37}{300}, 0.0\dot{2}\dot{3} = \frac{23-0}{990} = \frac{23}{990}.$$

实数是有理数和无理数的总称。由于任何有理数都可用有限小数和无限循环小数来表示，而任何无理数都可用无限不循环小数来表示，因此，有限小数和无限小数都是实数。可归纳成下表：



在实用中，无限小数只取它的近似值。那末，取近似值的标准是怎样规定的？通常我们说“精确到某一位”，就是表示准确值和近似值相差不超过这一位的半个单位。例如，56厘米是精确到1厘米的近似值，表示准确值在55.5厘米与56.5厘米之间。如果一个近似值是由四舍五入到某一数位而得到的，那末，这个近似值就精确到这一数位，也就是说，它和准确值之差不超过这一位的半个单位。例如，由四舍五入得到的 π 的近似值3、3.1、3.14、3.142、3.1416、 $\cdots$ ，分别是精确到1、0.1、0.01、0.001、0.0001、 $\cdots$ ，的近似值。又如，无理数 e ，它精确到0.001的近似值是2.718。对于一个实数的平方（立方）或平方根（立方根），如果要求它的近似值，可直接查《四位数学用表》。例如，查表可得

$$\begin{aligned}
 2.468^2 &= 6.091; & 0.1507^2 &= 0.02272; \\
 2.177^3 &= 10.32; & 21.27^3 &= 9623; \\
 \sqrt{43.21} &= 6.574; & \sqrt{0.527} &= 0.7259; \\
 \sqrt[3]{7.34} &= 1.943; & \sqrt[3]{734000} &= 90.21.
 \end{aligned}$$

实数有下列基本运算法则。

1. 基本运算规律

交换律 $a + b = b + a$; $ab = ba$.

结合律 $a + (b + c) = (a + b) + c$; $a(bc) = (ab)c$.

分配律 $a(b + c) = ab + ac$.

2. 符号法则

两正数之和仍是正数;

两负数之和仍是负数;

在加减中, 减负变加, 加负变减;

在乘除中, 同号得正, 异号得负.

3. 比例关系

如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 那末 $ad = bc$; 反之, 如果 $ad = bc$, 那

末 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 也可记为 $a : b = c : d$, 式中, b 、 c 叫做

内项, a 、 d 叫做外项. 于是 $ad = bc$, 即内项积等于外项积.

4. 幂的运算

n 个相同因子 a 的积叫做 a 的 n 次幂, 记为 a^n , a 叫做幂的底数, n 叫做幂的指数. 即

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ 个}} = a^n.$$

规定 $a^1 = a$, 但指数通常略去不写.

在上述定义中, 指数 n 必须是正整数, 所以, 这样的幂也叫做正整数指数幂. 根据定义可得

$$\begin{aligned} 4^2 &= 16; & 4^3 &= 64; \\ (-4)^2 &= 16; & (-4)^3 &= -64; \end{aligned}$$

$$(-1)^{2n} = 1; \quad (-1)^{2n-1} = -1.$$

幂的运算法则:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

式中 m 和 n 都是正整数.

第一个法则需有“同底数”这个条件, 否则不成立.

几个相同因子相乘的运算叫做乘方.

【例 1】计算:

$$(1) \quad (-1) - \left(-5\frac{1}{2}\right) \div \frac{11}{4} + (-8) \times \left[(-3) + \frac{7}{2}\right];$$

$$(2) \quad \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \right\}.$$

解

$$\begin{aligned} (1) \quad & (-1) - \left(-5\frac{1}{2}\right) \div \frac{11}{4} + (-8) \times \left[(-3) + \frac{7}{2}\right] \\ &= (-1) - \left(-\frac{11}{2}\right) \times \frac{4}{11} + (-8) \times \frac{1}{2} \\ &= (-1) - (-2) + (-4) \\ &= -3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4} - \left\{ \frac{1}{4} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

【例 2】 试证明

(1) 如图 1-1 所示的电阻串联电路, 总电阻 R 与串联电阻 R_1 、 R_2 的关系是

$$R = R_1 + R_2;$$

(2) 如图 1-2 所示的电阻并联电路, 总电阻 R 与并

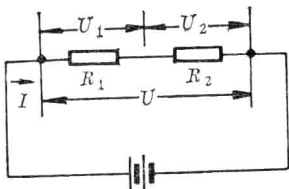


图 1-1

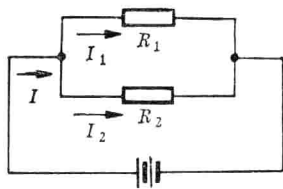


图 1-2

联电阻 R_1 、 R_2 的关系是

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

证 设 I 为电路中的总电流, I_1 、 I_2 分别为通过 R_1 、 R_2 的分电流, U 为总电阻 R 上的压降, U_1 、 U_2 分别为 R_1 、 R_2 上的压降.

(1) 串联时, $I = I_1 = I_2$, $U = U_1 + U_2$. 于是, 根据欧姆定律有

$$\begin{aligned} R &= \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2}{I} \\ &= \frac{U_1}{I_1} + \frac{U_2}{I_2} \quad (\text{分配律}) \\ &= R_1 + R_2. \end{aligned}$$

(2) 并联时, $I = I_1 + I_2$, $U_1 = U_2 = U$. 于是, 根据欧姆定律有

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2}{U}$$

$$= \frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} \quad (\text{分配律})$$

$$= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

由于 $\frac{1}{R} > \frac{1}{R_1}$ 或 $\frac{1}{R} > \frac{1}{R_2}$, 所以 $R < R_1$ 或 $R < R_2$.

上式说明, 并联后的总电阻(等效电阻) R 比并联的电阻 R_1 、 R_2 中的任一个都要小.

【例 3】 根据图 1-3 中的已知尺寸, 求未知尺寸. 尺寸的单位是毫米.

解 在直角三角形 ABC 中, 已知斜边及一直角边分别为

$$c = 50, \quad b = 40 - 21 = 19.$$

由勾股定理, 得

$$a^2 = c^2 - b^2 = 50^2 - 19^2 = 2139,$$

两端开平方, 得

$$a = \sqrt{2139} \stackrel{\text{查表}}{=} 46.25 \approx 46 \text{ (毫米)}.$$

于是, 未知尺寸为 $a + 21 \approx 67$ 毫米.

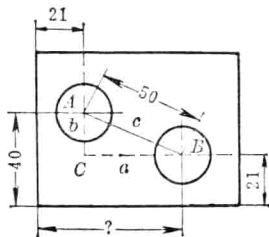


图 1-3

1-1-2 代数式的概念

用运算符号把数和表示数的字母连接起来的式子, 叫做代数式. 例如:

$$-\frac{1}{3}x; \quad 5x^2 + 1; \quad \frac{1}{x}; \quad \sqrt[3]{x^2} + 2;$$

$$a; \quad x; \quad -6^*.$$

* 单独一个字母或数字, 也叫做代数式.

用数字代替代数式里的字母，计算所得的结果，叫做该代数式的值。例如，代数式 $6x^2 - x + 3$ ，当 $x=1$ 时的值为 $6-1+3=8$ 。

【例 4】 接在电路中的某一电阻 R 上的电压为 10 伏，通过的电流为 2 毫安，问此电阻为几千欧？若将该电阻通以 15 毫安的电流，则其上的电压应为几伏？

解 欧姆定律为 $R = \frac{U}{I}$ 。现在已知

$$U = 10 \text{ (伏)}, I = 2 \text{ (毫安)} = 0.002 \text{ (安)}.$$

将这些数值代入上式，即得电阻 R 的值

$$R = \frac{U}{I} = \frac{10}{0.002} = 5000 \text{ (欧)} = 5 \text{ (千欧)}.$$

当电阻通过 15 毫安的电流时，电阻上的电压变成

$$U = RI = 5000 \times 0.015 = 75 \text{ (伏)}.$$

于是，所求的电阻为 5 千欧；电压为 75 伏。

【例 5】 某厂有一沉淀池，如图 1-4 所示，上部是圆柱形，下部是圆锥形。圆柱的直径与高分别是 9.6 米与 9.8 米，圆锥的高是 4.4 米，求这个沉淀池的容积。

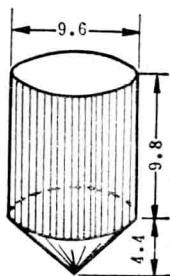


图 1-4

解 圆柱与圆锥的体积公

式分别为

$$V_1 = \pi r_1^2 H_1 \text{ 和 } V_2 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 H_2,$$

式中 V_1 和 V_2 表示圆柱和圆锥的体积（立方米）； r_1 和 r_2 表示圆柱和圆锥的底半径（米）； H_1 和 H_2 表示圆柱和圆锥的