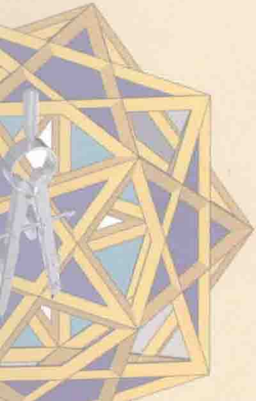
应用高等数学

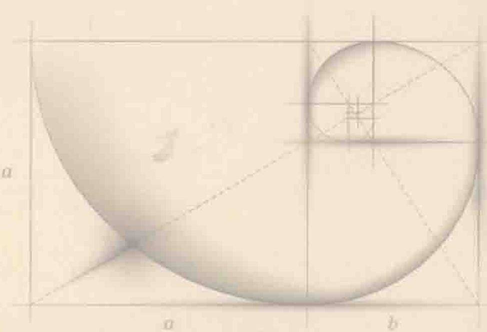
第一册

刘志林 主编

第四版



一元函数微分
导数的应用
一元函数积分
微分方程
数学建模初步
一元函数的极限与连续
数学软件应用等



$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=1.618$$

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

成果二等奖

应用高等数学

（第四版）

第一册

主编　刘志林
主审　翟向阳

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍微积分的原理与应用,内容包括:一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、微分方程、数学建模初步和数学软件应用等。

本书以应用为目的,重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用能力的培养;以学生受益为宗旨,内容阐述清晰,简捷直观,通俗易懂,不仅强调数学学习方法的引导,而且特别注重融入数学的思想和应用;以能力训练为基础,每节配有习题,每章配有自测题,并附有参考答案,便于教师和学生学习。为了便于教学和自学,附录四配有 Mathematica 软件应用,加强学生数学基本知识的掌握和应用能力的提高。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材,也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学. 第1册/刘志林主编. —4版. —上海:上海交通大学出版社,2014

ISBN 978-7-313-11726-7

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第153195号

应用高等数学

(第四版)

第一册

主　　编:刘志林

出版发行:上海交通大学出版社　　地　　址:上海市番禺路951号

邮政编码:200030　　电　　话:021-64071208

出 版 人:韩建民

印　　制:常熟市文化印刷有限公司　　经　　销:全国新华书店

开　　本:880mm×1230mm　1/32　　印　　张:8.5

字　　数:233千字

版　　次:1999年6月第1版　2014年7月第4版　　印　　次:2014年7月第24次印刷

书　　号:ISBN 978-7-313-11726-7/O

定　　价:24.00元

Preface

前　言

高职教育的人才培养目标是培养具有一定理论知识和较强实践能力的高端技能型专门人才。数学作为一门公共基础理论课程，应以应用为目的，以必需、够用为度。本教材结合高职院校应用高等数学的教学特点和当前高职高等数学课程改革，以强化数学应用为导向，以培养学生创新能力为目标，本着"必需够用"的基本原则，淡化严格的数学论证，注重培养学生严谨的思维习惯，提升职业素质。通过教学实践，我们所编内容能更好地适应当前高职高等数学教育教学的改革要求，同时能有效解决学时少与专业需求多样的问题。

本书介绍了一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、微分方程、数学建模初步和数学软件应用等内容。

本册书由刘志林担任主编，端木南珂、潘敏担任副主编，翟向阳担任主审。参加本册书编写的还有章朝庆、廖为鲲、李晓瑾等。

本教材的编写得到了泰州职业技术学院领导的大力支持，在此深表感谢。

本书是在第三版基础上修订而成。限于编者水平，教材中存在不妥之处，敬请广大读者批评和指正。

编　者

2012 年 7 月

Contents

目　录

第一章

一元函数的极限与连续

在研究和解决实际问题时，通常需要首先找出问题中变量之间的关系，即列出函数关系式，然后再进行分析和计算。在建立变量之间的函数关系基础上，利用函数极限解决变量的增量之间变化关系。例如，在医学上利用函数极限可以得到 X 射线的吸收规律。

第一节　函数的概念和性质

函数是微积分研究的主要对象，本节将在复习函数概念和性质的基础上，进一步介绍复合函数、初等函数和几种特殊函数等内容。

一、函数的基本概念

1. 邻域

定义 1　设 x_0, δ 为两个任意实数，其中 $\delta > 0$，把开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0, \delta)$ 或 $U(x_0)$，其中 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径。

$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的空心 δ 邻域(或点 x_0 的去心 δ 邻域)，记作 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$，即 $\mathring{U}(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$。

$(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域。

2. 函数的定义

定义 2　设有一非空数集 D，如果存在对应法则 f，使得对于每

一个 $x \in D$, 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 是定义在 D 上的一个函数,记作 $y = f(x)$。其中 x 为自变量,y 为因变量,习惯上称 y 是 x 的函数,D 称为函数的定义域。

当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时,按对应法则 f 所得的对应值 y_0,称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值,记作 $f(x_0)$,即 $y_0 = f(x_0)$。当自变量取遍 D 中的数,所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的值域,记作 M,即

$$M = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}。$$

例 1-1-1 已知 $f(-x) = x^2 + x - 1$,求 $f(x)$。

解 设 $-x = t$,则 $x = -t$, $f(t) = t^2 + (-t) - 1$, $f(x) = x^2 - x - 1$。

例 1-1-2 求下列函数的定义域。

(1) $y = \dfrac{4}{x^2 - 1}$, (2) $y = \sqrt{6 + x - x^2} + \ln(x + 1)$。

解 (1) $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$,所以定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$。

(2) $\begin{cases} 6 + x - x^2 \geqslant 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ x > -1 \end{cases}$,所以定义域为 $(-1, 3]$。

由函数定义知,定义域与对应法则一旦确定,则函数随之唯一确定。**如果两个函数的定义域、对应法则均相同,那么认为这两个函数是相同的;反之,如果两个函数的定义域、对应法则有一个不同,则认为这两个函数就不同。**

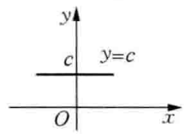
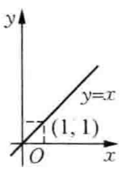
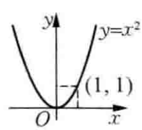
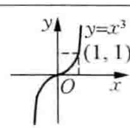
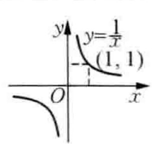
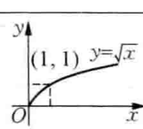
例如,$f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x) = x$,因为 $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$,即这两个函数的对应法则相同,而且定义域均为 $\mathbf{R}$,所以它们是相同的函数。

又如,$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $g(x) = x + 1$,虽然 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1\ (x \neq 1)$,但由于这两个函数的定义域不同,所以这两个函数不同。

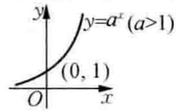
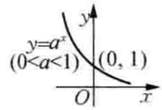
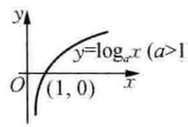
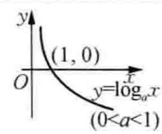
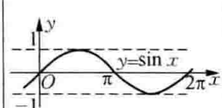
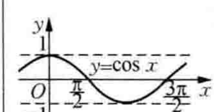
二、基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这六类函数统称为基本初等函数，基本初等函数的图像和性质如表 1-1 所示。

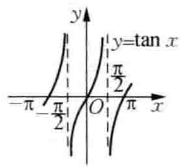
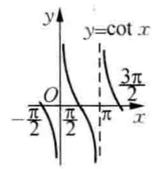
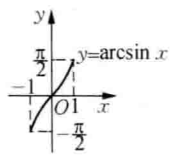
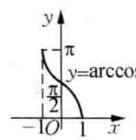
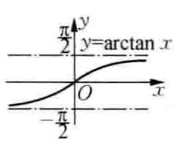
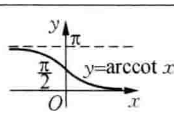
表 1-1

种类	函数	定义域与值域	图　像	特　性
常值函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{y \mid y=c\}$		偶函数 有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

(续表)

种类	函数	定义域与值域	图　像	特　性
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数,周期 2π,有界,在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数,周期 2π,有界,在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少,在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$

（续表）

种类	函数	定义域与值域	图　像	特　性
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加($k\in\mathbf{Z}$)
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$)
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

三、复合函数

1. 函数的复合

定义 3 **如果 $y=f(u)$, $u=g(x)$,并且函数 g 的值域包含在函数 f 的定义域中,则 $y=f(g(x))$ 称为 f 和 g 这两个函数的复合函数,u 称为中间变量。**

例 1-1-3 设 $y=\ln u$, $u=2+\cos x$,因为 $u=2+\cos x$ 的值域$[1, 3]$包含在 $y=\ln u$ 的定义域$(0, +\infty)$中,则 $y=\ln(2+\cos x)$ 可看作 $y=\ln u$, $u=2+\cos x$ 的复合函数。

例 1-1-4 设 $y=f(u)=\arcsin u$, $u=g(x)=x^2+2$,因为 $g(x)$ 的值域$[2, +\infty)$, $f(u)$ 的定义域$[-1, 1]$,则 $f(u)$ 与 $u=g(x)$ 不能构成复合函数。

例 1-1-5 设 $f(x)=3^x$, $g(x)=x-1$,则 $f(g(x))=f(x-1)=3^{x-1}$, $g(f(x))=g(3^x)=3^x-1$。

注意 一般来说,$f(g(x))\neq g(f(x))$。

2. 复合函数的分解

复合函数可分解成若干个简单函数。

例 1-1-6 $y=e^{x^2}$ 可分解为 $y=e^u$, $u=x^2$;

$y=(\arctan\sqrt{x})^2$ 可分解为 $y=u^2$, $u=\arctan v$, $v=\sqrt{x}$;

$y=\ln\tan^2(1+x^2)$ 可分解为 $y=\ln u$, $u=v^2$, $v=\tan w$, $w=1+x^2$。

必须指出,熟练掌握复合函数的分解对后续内容的学习相当重要,有助于以后熟练掌握微积分的方法和技巧。

四、初等函数

定义 4 **由基本初等函数经过有限次四则运算和复合过程构成,并且能用一个数学式子表示的函数称为初等函数。**例如,$y=A\sin(\omega x+\phi)$, $y=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 等都是初等函数;而 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 都不是初等函数。