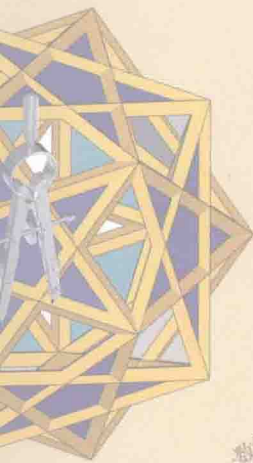


应用高等数学

第一册

刘志林 主编

第四版



一元函数微分

导数的应用

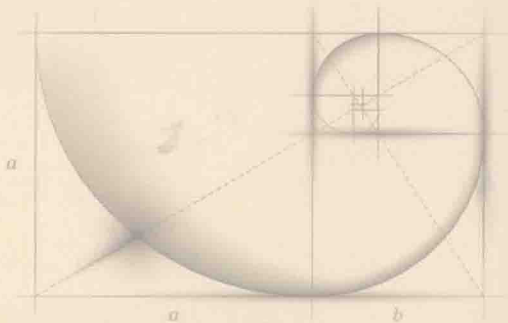
一元函数积分

微分方程

数学建模初步

元函数的极限与连续

数学软件应用等



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.618$$



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

成果二等奖

应用高等数学

(第四版)

第一册



主编 刘志林

主审 翟向阳

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书介绍微积分的原理与应用,内容包括:一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、微分方程、数学建模初步和数学软件应用等。

本书以应用为目的,重视学生数学概念的建立、数学基本方法的掌握和数学应用能力的培养;以学生受益为宗旨,内容阐述清晰,简捷直观,通俗易懂,不仅强调数学学习方法的引导,而且特别注重融入数学的思想和应用;以能力训练为基础,每节配有习题,每章配有自测题,并附有参考答案,便于教师和学生学习。为了便于教学和自学,附录四配有 Mathematica 软件应用,加强学生数学基本知识的掌握和应用能力的提高。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立学院各专业的教材,也可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学. 第1册/刘志林主编. —4版. —上海:上海交通大学出版社,2014

ISBN 978-7-313-11726-7

I. ①应… II. ①刘… III. ①高等数学—高等教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 153195 号

应用高等数学

(第四版)

第一册

主 编: 刘志林

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出 版 人: 韩建民

印 制: 常熟市文化印刷有限公司

开 本: 880mm×1230mm 1/32

字 数: 233 千字

版 次: 1999 年 6 月第 1 版 2014 年 7 月第 4 版 印 次: 2014 年 7 月第 24 次印刷

书 号: ISBN 978-7-313-11726-7/O

定 价: 24.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 8.5

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 0512-52219025



前 言

高职教育的人才培养目标是培养具有一定理论知识和较强实践能力的高端技能型专门人才。数学作为一门公共基础理论课程,应以应用为目的,以必需、够用为度。本教材结合高职院校应用高等数学的教学特点和当前高职高等数学课程改革,以强化数学应用为导向,以培养学生创新能力为目标,本着“必需够用”的基本原则,淡化严格的数学论证,注重培养学生严谨的思维习惯,提升职业素质。通过教学实践,我们所编内容能更好地适应当前高职高等数学教育改革的改革要求,同时能有效解决学时少与专业需求多样的问题。

本书介绍了一元函数的极限与连续、一元函数微分、导数的应用、一元函数积分、微分方程、数学建模初步和数学软件应用等内容。

本册书由刘志林担任主编,端木南珂、潘敏担任副主编,翟向阳担任主审。参加本册书编写的还有章朝庆、廖为鲲、李晓瑾等。

本教材的编写得到了泰州职业技术学院领导的大力支持,在此深表感谢。

本书是在第三版基础上修订而成。限于编者水平,教材中存在着不妥之处,敬请广大读者批评和指正。

编 者

2012 年 7 月



目 录

第一章	一元函数的极限与连续	1
第一节	函数的概念和性质	1
	一、函数的基本概念	1
	二、基本初等函数	3
	三、复合函数	6
	四、初等函数	6
	五、几种特殊的函数	7
	六、函数的性质	8
	习题 1-1	10
第二节	函数的极限	11
	一、当 $x \rightarrow +\infty$ 、 $x \rightarrow -\infty$ 、 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的 极限	11
	二、当 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限	14
	三、函数极限运算法则	16
	习题 1-2	21
第三节	两个重要的极限	22
	一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	22
	二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	24
	习题 1-3	26

第四节	无穷小与无穷大	26
一、无穷小的概念及其性质		26
二、无穷小的比较		27
三、无穷小与函数极限的关系		30
四、无穷小与无穷大的关系		30
习题 1-4		31
第五节	函数的连续性	31
一、函数在一点连续的概念		32
二、左连续、右连续		34
三、函数的间断点		35
四、初等函数的连续性		37
五、闭区间上连续函数的性质		39
习题 1-5		41
第六节	应用举例	42
习题 1-6		43
自测题 1		44
第二章	一元函数微分	47
第一节	导数概念	47
一、两个引例		47
二、导数的定义		49
三、导数的几何意义		51
四、左导数与右导数		52
五、可导与连续的关系		52
习题 2-1		53
第二节	导数的计算	54
一、基本初等函数的导数公式		54
二、函数的和、差、积、商求导法则		55

	三、复合函数的导数法则	57
	四、隐函数的导数与对数求导法	58
	五、高阶导数	60
	习题 2-2	61
第三节	函数的微分	62
	一、微分定义	62
	二、微分的几何意义	64
	三、微分的计算	65
	四、一元函数微分在近似计算中的应用	68
	习题 2-3	69
第四节	应用举例	70
	一、在经济方面的应用	70
	二、在物理上的应用	73
	三、在几何上的应用	75
	习题 2-4	76
	自测题 2	76
第三章	导数的应用	79
第一节	中值定理	79
	一、拉格朗日中值定理	79
	二、罗尔定理	80
	三、柯西中值定理	80
	习题 3-1	82
第二节	函数的单调性与曲线的凹凸性	83
	一、函数的单调性	83
	二、函数的极值	86
	三、曲线的凹凸性与拐点	90
	习题 3-2	93

第三节	函数图形的描绘	94
一、	曲线的渐近线	94
二、	函数图形的描绘	95
习题 3-3		97
第四节	函数的最大值和最小值	98
一、	闭区间上连续函数的最大值和最小值	98
二、	实际问题中的最大值和最小值	98
习题 3-4		100
第五节	洛必达法则	100
一、	$\frac{0}{0}$ 型未定式	101
二、	$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	102
习题 3-5		104
第六节	应用举例	104
习题 3-6		108
自测题 3		108
第四章	一元函数积分	112
第一节	不定积分的概念与性质	112
一、	原函数的概念	112
二、	不定积分的概念	113
三、	不定积分的几何意义	114
四、	不定积分的基本性质	114
五、	不定积分的基本积分公式	115
习题 4-1		117
第二节	不定积分的计算方法	117
一、	第一类换元积分法(凑微分法)	118
二、	第二类换元积分法	122

三、分部积分法	125
习题 4-2	128
第三节 定积分的概念与性质	129
一、定积分的定义	129
二、定积分的几何意义	133
三、定积分的性质	134
习题 4-3	135
第四节 牛顿-莱布尼兹公式	136
一、积分上限函数及其导数	136
二、牛顿-莱布尼兹公式	138
习题 4-4	139
第五节 定积分的计算方法	140
一、定积分的换元积分法	140
二、定积分的分部积分法	142
习题 4-5	143
第六节 广义积分	144
一、无穷区间的广义积分	144
二、无界函数的广义积分	146
习题 4-6	148
第七节 定积分在几何上的应用	148
一、定积分的微元分析法	148
二、平面图形面积	150
三、旋转体的体积	155
习题 4-7	158
第八节 应用举例	158
一、定积分在物理学上的应用	158
二、定积分在经济工作中的应用	160
习题 4-8	161
自测题 4	162

第五章	微分方程	165
第一节	微分方程的基本概念	165
	一、微分方程举例	165
	二、常微分方程的基本概念	166
	习题 5-1	168
第二节	一阶微分方程	169
	一、可分离变量的微分方程	169
	二、齐次微分方程	171
	三、一阶线性微分方程	173
	习题 5-2	176
第三节	可降阶的一些高阶微分方程	177
	一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	178
	二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	178
	三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	179
	习题 5-3	181
第四节	二阶线性微分方程	181
	一、二阶线性微分方程解的结构	182
	二、二阶线性常系数齐次微分方程	185
	三、二阶线性常系数非齐次微分方程	189
	习题 5-4	192
第五节	应用举例	192
	一、人口问题	192
	二、环境污染问题	193
	三、刑事侦查中死亡时间的鉴定	195
	四、元素原子数的衰变问题	195
	五、经济问题中边际函数与总函数	196
	六、肿瘤生长问题	198
	七、运动规律	198

习题 5-5	199
自测题 5-1	200
自测题 5-2	202
附录	204
附录一 初等数学常用公式	204
附录二 积分表	209
附录三 数学建模初步	221
附录四 Mathematica 软件应用	234
参考答案	248

第一章

一元函数的极限与连续

在研究和解决实际问题时,通常需要首先找出问题中变量之间的关系,即列出函数关系式,然后再进行分析和计算。在建立变量之间的函数关系基础上,利用函数极限解决变量的增量之间变化关系。例如,在医学上利用函数极限可以得到 X 射线的吸收规律。

第一节 函数的概念和性质

函数是微积分研究的主要对象,本节将在复习函数概念和性质的基础上,进一步介绍复合函数、初等函数和几种特殊函数等内容。

一、函数的基本概念

1. 邻域

定义 1 设 x_0 , δ 为两个任意实数,其中 $\delta > 0$,把开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域,记作 $U(x_0, \delta)$ 或 $U(x_0)$,其中 x_0 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径。

$(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ 称为点 x_0 的空心 δ 邻域(或点 x_0 的去心 δ 邻域),记作 $\dot{U}(x_0, \delta)$ 或 $\dot{U}(x_0)$,即 $\dot{U}(x_0) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$ 。

$(x_0 - \delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0 + \delta)$ 分别称为点 x_0 的左邻域和右邻域。

2. 函数的定义

定义 2 设有一非空数集 D ,如果存在对应法则 f ,使得对于每

一个 $x \in D$, 都有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 是定义在 D 上的一个函数, 记作 $y = f(x)$ 。其中 x 为自变量, y 为因变量, 习惯上称 y 是 x 的函数, D 称为函数的定义域。

当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时, 按对应法则 f 所得的对应值 y_0 , 称为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 时的函数值, 记作 $f(x_0)$, 即 $y_0 = f(x_0)$ 。当自变量取遍 D 中的数, 所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的值域, 记作 M , 即

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

例 1-1-1 已知 $f(-x) = x^2 + x - 1$, 求 $f(x)$ 。

解 设 $-x = t$, 则 $x = -t$, $f(t) = t^2 + (-t) - 1$, $f(x) = x^2 - x - 1$ 。

例 1-1-2 求下列函数的定义域。

$$(1) y = \frac{4}{x^2 - 1}, \quad (2) y = \sqrt{6 + x - x^2} + \ln(x + 1).$$

解 (1) $x^2 - 1 \neq 0$, $x \neq \pm 1$, 所以定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

$$(2) \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 3 \\ x > -1 \end{cases}, \text{ 所以定义域为 } (-1, 3].$$

由函数定义知, 定义域与对应法则一旦确定, 则函数随之唯一确定。如果两个函数的定义域、对应法则均相同, 那么认为这两个函数是相同的; 反之, 如果两个函数的定义域、对应法则有一个不同, 则认为这两个函数就不同。

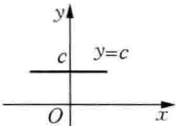
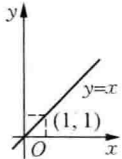
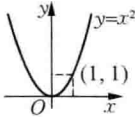
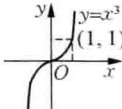
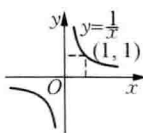
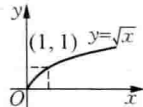
例如, $f(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x) = x$, 因为 $f(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$, 即这两个函数的对应法则相同, 而且定义域均为 $\mathbf{R}$, 所以它们是相同的函数。

又如, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 与 $g(x) = x + 1$, 虽然 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ ($x \neq 1$), 但由于这两个函数的定义域不同, 所以这两个函数不同。

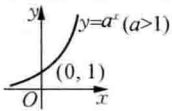
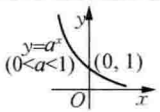
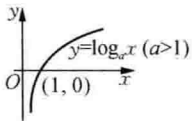
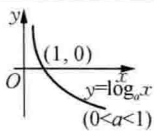
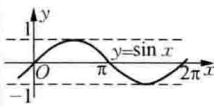
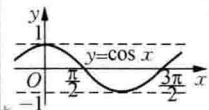
二、基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数,这六类函数统称为基本初等函数,基本初等函数的图像和性质如表 1-1 所示。

表 1-1

种类	函数	定义域与值域	图 像	特 性
常值函数	$y = c$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \{y \mid y = c\}$		偶函数 有界
幂函数	$y = x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^2$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		偶函数 在 $(-\infty, 0)$ 内 单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内 单调增加
	$y = x^3$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数 单调增加
	$y = x^{-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$		奇函数 在 $(-\infty, 0)$ 内 单调减少 在 $(0, +\infty)$ 内 单调减少
	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$x \in [0, +\infty)$ $y \in [0, +\infty)$		单调增加

(续表)

种类	函数	定义域与值域	图 像	特 性
指数函数	$y = a^x$ ($a > 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调增加
	$y = a^x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		单调减少
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调增加
	$y = \log_a x$ ($0 < a < 1$)	$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		单调减少
三角函数	$y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		奇函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加, 在 $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 内单调减少 ($k \in \mathbb{Z}$)
	$y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$		偶函数, 周期 2π , 有界, 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ 内单调减少, 在 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + 2\pi)$ 内单调增加 ($k \in \mathbb{Z}$)

(续表)

种类	函数	定义域与值域	图 像	特 性
三角函数	$y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ 内单调增加 ($k \in \mathbf{Z}$)
	$y = \cot x$	$x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数, 周期 π , 在 $(k\pi, k\pi + \pi)$ 内单调减少 ($k \in \mathbf{Z}$)
反三角函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少, 有界
	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$		奇函数, 单调增加, 有界
	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, \pi)$		单调减少, 有界

三、复合函数

1. 函数的复合

定义 3 如果 $y = f(u)$, $u = g(x)$, 并且函数 g 的值域包含在函数 f 的定义域中, 则 $y = f(g(x))$ 称为 f 和 g 这两个函数的复合函数, u 称为中间变量。

例 1-1-3 设 $y = \ln u$, $u = 2 + \cos x$, 因为 $u = 2 + \cos x$ 的值域 $[1, 3]$ 包含在 $y = \ln u$ 的定义域 $(0, +\infty)$ 中, 则 $y = \ln(2 + \cos x)$ 可看作 $y = \ln u$, $u = 2 + \cos x$ 的复合函数。

例 1-1-4 设 $y = f(u) = \arcsin u$, $u = g(x) = x^2 + 2$, 因为 $g(x)$ 的值域 $[2, +\infty)$, $f(u)$ 的定义域 $[-1, 1]$, 则 $f(u)$ 与 $u = g(x)$ 不能构成复合函数。

例 1-1-5 设 $f(x) = 3^x$, $g(x) = x - 1$, 则 $f(g(x)) = f(x - 1) = 3^{x-1}$, $g(f(x)) = g(3^x) = 3^x - 1$ 。

注意 一般来说, $f(g(x)) \neq g(f(x))$ 。

2. 复合函数的分解

复合函数可分解成若干个简单函数。

例 1-1-6 $y = e^{x^2}$ 可分解为 $y = e^u$, $u = x^2$;

$y = (\arctan \sqrt{x})^2$ 可分解为 $y = u^2$, $u = \arctan v$, $v = \sqrt{x}$;

$y = \ln \tan^2(1 + x^2)$ 可分解为 $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \tan w$, $w = 1 + x^2$ 。

必须指出, 熟练掌握复合函数的分解对后续内容的学习相当重要, 有助于以后熟练掌握微积分的方法和技巧。

四、初等函数

定义 4 由基本初等函数经过有限次四则运算和复合过程构成, 并且能用一个数学式子表示的函数称为初等函数。例如, $y = A \sin(\omega x + \phi)$, $y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ 等都是初等函数; 而 $y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 都不是初等函数。