万学教育

UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

2016

人大考研

考研数学

概率论与数理统计基础教材

万学海文考试研究中心／编

张震峰／主编

赵达夫／主审

- 浓缩本科教材，从最基础角度详解考试要点
- 精析典型实例，助力“三基”知识理解与运用
- 集中提炼要点精华，贴心提示常见误区、失分点
- 精编同步习题及详解，现学现用、及时巩固提高

中国人民大学出版社

考研数学

概率论与数理统计基础教材

万学海文考试研究中心　编
张震峰　主编
赵达夫　主审

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学概率论与数理统计基础教材 / 张震峰主编. —北京:中国人民大学出版社,2014.12
ISBN 978-7-300-20328-7

Ⅰ.①考… Ⅱ.①张… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-自学参考资料 ②数理统计-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 276344 号

考研数学概率论与数理统计基础教材
张震峰 主编
Kaoyan Shuxue Gailülun Yu Shuli Tongji Jichu Jiaocai

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242 (总编室)		010－62511770 (质管部)
	010－82501766 (邮购部)		010－62514148 (门市部)
	010－62515195 (发行公司)		010－62515275 (盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国 1 考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京七色印务有限公司		
规　格	185mm×260mm 16 开本	**版　次**	2015 年 1 月第 1 版
印　张	13.75	**印　次**	2015 年 1 月第 1 次印刷
字　数	352 000	**定　价**	26.00 元

万学海文图书编委会

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的数学学科，是理工类和经管类各专业一门重要的基础理论课程，也是全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中的考查学科之一。概率论从数量上研究随机现象的统计规律性，属于理论基础学科。数理统计从应用角度研究处理随机性数据，建立有效的统计方法，进行统计推断。通过本课程的学习，学生需掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，并具备应用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。

对于具有选拔性的研究生入学考试，教科书因受到课时和篇幅等因素的局限，不可能针对这一考试的需求对所有的考点都做出详尽阐释，也不可能提供多样的解题方法和对各章知识点、易错点的系统归纳总结。本书的主旨就是帮助读者把握概率论与数理统计这门课程的知识体系的内涵及精华，并且根据研究生入学考试的范围和要求有针对性地突出重点，使读者在复习时掌握重点，在考试中应对自如，获得优异成绩。

本书为编者基于多年本科教学实践和丰富的考研辅导经验，严格依据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求精心编写。为了方便读者在复习时与考试要求保持一致，本书按考试大纲的编排顺序逐章编写。全书分为两部分：概率论和数理统计。概率论部分包括随机事件和概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理，共五章；数理统计部分包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验，共三章。每章包括本章概要、考查要点详解、重要公式结论与方法技巧、常见误区警示、本章同步练习、习题答案解析六大栏目。

本书在编写中力求深入浅出、突出重点，注重概率论与数理统计的基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到详尽深入、概念准确、逻辑清晰、通俗易懂，同时在选材、理论推导、内容讲述等诸多方面全面满足考生的需要。本书包含较多的例题，不仅在解题方法方面体现出标准、简捷、巧妙的特点，并且在例题后增加了解题思路、分析和评注，帮助考生及时总结解题经验，避免常犯错误。此外，在各章的最后提供同步练习，以便考生能通过全面系统的解题训练切实巩固提高。

本书的总体特色：本科教科书与考研大纲考试要求的完美结合。

本书最大的特点在于：在内容编写方面像本科教材一样基础、详尽、透彻，并且在备考的适用性和针对性上更胜一筹，全面满足考生基础阶段复习的需求。

本书的编写体系和特点如下：

1. 本章概要

提纲挈领总括各章的主要内容，根据历年考试中命题特点提示复习要点并给出合理建议；形象呈现知识结构图，方便读者把握考点的内在联系；再现考试大纲对各章考查的范围和要求，给读者提供明确方向及重点。

2. 考查要点详解

从最基础的角度切入，像本科教材一样详尽透彻讲述各章节涉及的基本概念、定理、法则等考点，既细致深入，又突出要点，注重知识点之间的衔接关联；针对各考查要点编排适量具有代表性的基础性例题，不仅提供规范、详细的分析解答，而且注重思路、方法的启示和归纳，使读者不仅学会知识，更能够灵活运用。

3. 重要公式结论与方法技巧

集中归纳各章需要牢记的、常用的、对解题特别关键的公式与结论，知识精华一应俱全，便于读者查找、记忆；提炼各章典型题目的解题方法技巧，有效帮助读者提高解题熟练度，为强化、冲刺复习奠定坚实基础。

4. 常见误区警示

为避免读者在基础复习阶段形成对知识内容的错误理解、对解题方法的错误思维定势、对细节的忽略错漏，造成后期复习的困扰甚至是考试中的不利失分，此栏目针对读者最常见的理解误区和复习盲点进行详细、透彻讲解，并结合典型实例辅助演示说明。

5. 本章同步练习及习题答案解析

各章提供适量习题及配套答案解析，供读者在复习各章之后通过独立解题熟悉“三基”（基本概念、基本方法、基本运算）在解题中的应用，并对照答案解析明晰错误原因和复习薄弱环节，及时查漏补缺。

由于本书是基础复习教材，要求读者重点掌握“三基”，对于综合性较强的题型，编者将在后续的《考研数学强化复习全书》（数学一至三）中继续进行详细讲解，希望读者在使用本书夯实基础之后再进行强化提高，最终在考试中取得优异成绩！

特别提示 本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”“②”“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了少量真题，对真题，在题号后以“年份卷种”的形式表示，如选自 2001 年数学四的真题表示为“2001[4]”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

由于编者水平有限，同时编写时间也较为仓促，不足与不当之处在所难免，恳请读者和专家批评指正。

编者

目 录

Contents

Contents

1

第一章 随机事件和概率

本章概要

复习导语

本章是概率论的基础部分，对整个概率论的理解和深化起着重要作用．本章内容虽然不是考试重点，但是，本书在后面的章节里一定会用到随机事件和概率．从历年命题来看，题型主要是选择题和填空题，主要考查对基本概念、基本性质和基本计算方法的理解和掌握．

知识结构图

- 基本概念
  - 随机试验 E
  - 样本点 ω
  - 样本空间 Ω
- 随机事件
  - 关系
    - 包含
    - 互斥
    - 对立
    - 独立
  - 运算
    - 交
    - 并
    - 差
- 事件的概率
  - 概率模型
    - 古典概型
    - 几何概型
    - 伯努利概型
  - 概率公式
    - 条件概率公式
    - 乘法公式
    - 加法公式
    - 减法公式
    - 求逆公式
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式

复习目标

1. 了解样本空间(基本事件空间)的概念，理解随机事件的概念，掌握事件的关系及运算．

2. 理解概率、条件概率的概念，掌握概率的基本性质，会计算古典型概率和几何型概率，掌握概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式以及贝叶斯(Bayes)公式等．

3. 理解事件的独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算；理解独立重复试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

考查要点详解

第一节　预备知识

一、两个基本原理

1. 乘法原理

完成某事要 k 个步骤，每一步分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 种方法，则完成此事共有 $n_1 n_2 \cdot \cdots \cdot n_k$ 种方法.

2. 加法原理

完成某事有 k 类途径，每一类分别有 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 种方法，则完成此事共有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 种方法.

二、排列组合

1. 排列

定义 1.1.1　r 个不同元素按一定顺序排成一列，称其为这 r 个元素的一个排列，排列的全部个数记为 $r! = r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

2. 组合

定义 1.1.2　从 n 个不同元素中任取 r 个元素（$0 < r \leqslant n$），称其为一个组合，组合的全部个数记为 $C_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$.

【例 1.1.1】 袋中有 4 个白球，6 个黑球，从中取 2 个球，问：

(1)共有多少种取法？

(2)取出的 2 个球全是黑球，有多少种取法？

【解】 (1)$C_{10}^2 = \dfrac{10!}{8!\ 2!} = 45$.

(2)$C_6^2 = \dfrac{6!}{4!\ 2!} = 15$.

【例 1.1.2】 袋中有 4 个白球，6 个黑球，全部取出排成一行，问：

(1)共有多少种排法？

(2)4 个白球连在一起，有多少种排法？

【解】 (1)$10!$.

(2)4 个白球排成一行，把它们看成一个整体，然后再和 6 个黑球一起排成一行，根据乘法原理得 $4!\ 7!$.

第二节　随机事件

一、随机试验和样本空间

当我们观察自然界和人类社会中各种事物的变化规律时，会发现两种不同类型的现象. 一种我们称之为决定性现象，它在一定的条件下必然会出现某个结果. 例如在没有外力作用下，

做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动；太阳必然从东方升起. 除了决定性现象以外，在自然现象和社会现象中还存在着与它有着本质区别的另一类现象. 例如，今天无法准确地确定明天的最高或最低气温；同一条生产线上用同样的工艺生产出来的灯泡寿命长短也呈现出偶然性. 概率论中最经典的例子要数向上掷一枚硬币，结果可能是正面也可能是反面，事先无法断定. 这些例子的一个共同特点是：在基本条件不变的情况下，一系列的试验或观察会得到各种不同的结果，换言之，就某一次的试验或观察而言，它可能会出现这种结果，可能会出现那种结果，事先无法确定，呈现出一种偶然性，这种现象称为随机现象. 概率论研究的就是这种随机现象所包含的数量规律.

那么随机现象是否普遍呢？回答是肯定的. 世界上的万事万物都是相互依赖、相互影响的，某一次的观察或试验，其结果如何，往往受到许多偶然因素的影响，表现形式往往是偶然的或"随机的"，因而随机现象是普遍存在的，从而概率论的研究不但具有理论上的意义，而且具有广泛地应用价值.

1. 随机试验

定义 1.2.1　对随机现象的某一特征的试验或观察，称为随机试验，简称试验. 具体来说，称一个试验为随机试验，必须满足下述条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

例如，T_1：向上掷一枚硬币，观察正反面出现的情况；

T_2：检查生产流水线上的产品是否合格；

T_3：检查某商店某柜台的营业额.

2. 样本点和样本空间

定义 1.2.2　我们把随机试验的每一个可能结果称为样本点，用 ω 表示，样本点的全体组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示.

例如，为评价某学校小学生的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围. 在这一随机试验中，任一可能的结果即样本点是一个有序数组 $(x,\ y,\ z)$，其中 x, y, z 分别表示被测量小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为 $\Omega=\{(x,\ y,\ z)\mid 0<x\leqslant a,\ 0<y\leqslant b,\ 0<z\leqslant c\}$，这里的 a, b, c 分别表示该校学生身高、体重和胸围的最大值.

【例 1.2.1】写出下列试验的样本空间：

(1)掷一枚骰子，观察朝上一面的点数；

(2)观察某电话交换台在 $[0,\ t]$ 内接到的电话呼叫数；

(3)测量某一零件的长度，考察其测量结果与真正长度的误差.

【解】(1) $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$.

(2) $\Omega=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$.

(3) $\Omega=[-M, M]$，其中 M 为最大正误差. 如果无法确定这一最大值，将 Ω 取作 $(-\infty,\ +\infty)$ 也无妨.

评注

样本空间所包含的样本点可以为有限个，可以为无限可列个，也可以为无限不可列个.

从以上这些例子不难发现，随着所讨论的随机试验的不同，相应的样本空间可能很简单，也可能很复杂. 在今后的讨论中，我们一般都假定样本空间是预先给定的，这种必要的抽象，使我们能更好地抓住随机现象的本质，得到的结果也能被广泛地应用.

二、随机事件

1. 随机事件

定义 1.2.3　随机事件是由若干个样本点组成的集合，或者说是样本空间的某个子集，通常用 A,B,C 表示，简称事件. 在每次试验中，称某个随机事件 A 发生，当且仅当该事件 A 所包含的某个样本点出现.

特别地，样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 都是 Ω 的子集，它们分别称为必然事件（每次试验中一定发生的事件）和不可能事件（每次试验中一定不发生的事件）.

例如，在【例 1.2.1】(1)中，样本空间 $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，如果以 A 表示"得到的为奇数"，则显然 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$，B 表示"得到的点数不大于 4"，则 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. 这里的 A,B 均为随机事件，它们都是由 Ω 中的若干个样本点所构成. 当然，"出现的点数为 1"、"出现的点数为 5"也都是随机事件，它们只包含单个样本点.

2. 事件之间的关系与运算

给定一个样本空间，显然可以定义不止一个随机事件，分析这些事件之间的相互关系，不仅有助于认识事物的本质，而且可以通过对简单事件规律的研究去推算复杂事件的规律. 因此，下面我们介绍事件之间的相互关系和运算. 在下面的叙述中，如果没有特别声明，均认为样本空间 Ω 已经给定，而 $A,\ B,\ A_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 等均表示 Ω 中的一些事件.

(1)包含：若事件 A 的每一个样本点都属于事件 B，则称 A 包含于 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，这时事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生.

例如，【例 1.2.1】(2)中，若以 A 表示事件"$[0,\ t]$内接到的电话呼叫数不少于 1 500 次"，而 B 表示事件"$[0,\ t]$内接到的电话呼叫数不少于 1 200 次"，那么 $A=\{1\ 500,\ 1\ 501,\ \cdots\}$，$B=\{1\ 200,\ 1\ 201,\ \cdots\}$，容易看出 A 的每一个样本点都属于 B，即 $A\subset B$，此时 A 的发生必然导致 B 的发生. 显然，对任一事件 A，总有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

(2)相等：对于事件 A 与 B，如果 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$. 此时 A 与 B 表示同一个事件，它们所包含的样本点完全相同.

(3)交(积)：由同时属于事件 A 与事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与事件 B 的交或积，记为 $A\cap B$ 或 AB，即 $AB=\{\omega_i\mid\omega_i\in A$ 且 $\omega_i\in B\}$，事件 AB 表示事件 A 与事件 B 同时发生.

两个事件的交运算可以推广到 n 个事件以至于可列个事件的情况. 事件 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的交事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，它由同时属于 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 的样本点组成，表示 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 同时发生. 在可列个事件的情况，我们定义 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i \xlongequal{\triangle} \lim\limits_{n\to\infty}\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(4)互不相容(互斥)：若在任何一次试验中，事件 A 与 B 都不可能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互不相容，也称 A 与 B 为互斥事件.

若 n 个事件 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ 两两互不相容，则称这 n 个事件互不相容. 更进一步，若可列个事件 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\cdots$ 两两互不相容，则称 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\cdots$ 互不相容.

(5)并(和)：由至少属于事件 A 与 B 中的一个的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{\omega_i\mid\omega_i\in A$ 或 $\omega_i\in B\}$，事件 $A\cup B$ 表示事件 A 与 B 中至少有一个

发生.

如果事件 A 与 B 互不相容,则称它们的并为和,记为 $A+B$.

两个事件的并运算可以推广到 n 个事件以至于可列个事件的情况.事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并事件记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,它由至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的一个的样本点组成,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生.同样,如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容,则称它们的并为和,记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$.对于可列个事件的场合,我们定义 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(6) 对立(互逆):$AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$,称事件 A,B 为互逆事件或对立事件,记为 $B=\overline{A}$,$\overline{A}$ 表示事件 A 不发生.

(7)差:由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成的集合称为事件 A 与 B 的差,记为 $A-B$,即 $A-B=\{\omega_i \mid \omega_i \in A$ 且 $\omega_i \notin B\}$,事件 $A-B$ 表示事件 A 发生而事件 B 不发生,显然 $A-B=A\overline{B}$.

在进行事件的运算时,我们作如下顺序的约定:首先进行逆的运算,再进行交的运算,最后才进行并或差的运算.

由于事件是通过集合来定义的,所以上面介绍的事件之间的关系与运算,和相应的集合之间的关系与运算非常相似.这样,我们一方面可以借助集合论的知识和方法来辅助理解事件之间的关系与运算,譬如可以用直观的维恩(Venn)图 1-1 来描述上面介绍的这些关系与运算;但另一方面,也应学会用概率论的观点来解释这些关系与运算.

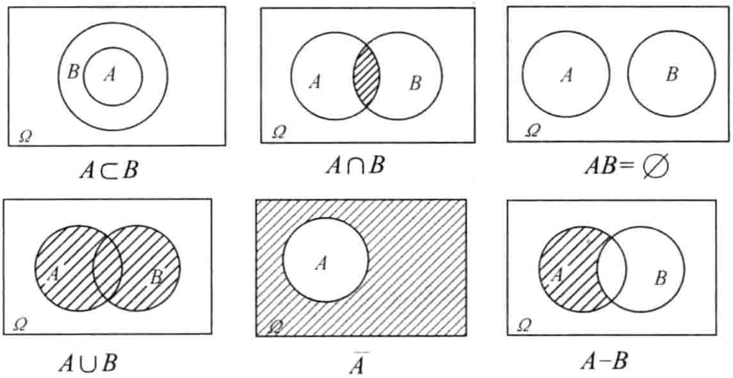

图 1-1　事件之间的关系与运算

3. 事件运算的法则

(1)交换律:$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

(2)结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3)分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4)对偶律(德摩根定理):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述运算法则可以推广到多个事件甚至可列个事件,譬如对于德摩根定理,我们有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i};\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

【例 1.2.2】设 A, B, C 为三个事件,利用它们表示下列事件:

(1) A 发生而 B，C 都不发生；

(2) 三个事件都不发生；

(3) 三个事件中至少发生一个.

【解】(1) A 发生而 B，C 都不发生：$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

(2) 三个事件都不发生：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$.

(3) 三个事件中至少发生一个：$A\cup B\cup C$ 或 $ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$.

【例 1.2.3】从一批产品中每次取一件，如此取三次，用 A_1,A_2,A_3 分别表示事件“第一次取到的产品是正品”、“第二次取到的产品是正品”、“第三次取到的产品是正品”. 试用 A_1,A_2,A_3 表示下列事件：

(1)三次都取到正品；

(2)至少有一件次品；

(3)只有一件次品；

(4)取到的次品不多于一件.

【解】(1)三次都取到正品，即第一次、第二次、第三次都取到正品，所以表示为 $A_1A_2A_3$.

(2)至少有一件次品，其对立面是三次都取到正品，所以表示为 $\overline{A_1A_2A_3}$.

(3)只有一件次品，即一件次品，另外两件是正品，所以表示为 $\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$.

(4)取到次品不多于一件，即三次都取到正品或者只有一件次品，所以表示为 $A_1A_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3$.

【例 1.2.4】对于任意两个事件 A 与 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是(　　).

(A)$A\subset B$　　(B)$\bar{A}\supset\bar{B}$　　(C)$A-B=\varnothing$　　(D)$\bar{A}B=\varnothing$

【答案】 (D)

【分析】 考查对包含、互逆概念的理解以及事件的运算.

【解】 $A\cup B=B\supset A\subset B\Leftrightarrow\bar{A}\supset\bar{B}\Leftrightarrow A-B=\varnothing$，故(A)，(B)，(C)都与 $A\cup B=B$ 等价，所以选(D).

评 注

由维恩(Venn)图来解释事件的关系和运算可能更简单直观.

【例 1.2.5】化简：(1)$(A-B)\cup B$；(2)$(A-B)\cup A$；(3)$(A-B)\cap B$；(4)$(A\cup B)(A\cup\bar{B})$；(5)$B(A\cup\bar{B})$.

【解】(1)$(A-B)\cup B=A\bar{B}\cup B=(A\cup B)(\bar{B}\cup B)=(A\cup B)\Omega=A\cup B$.

(2)由于 $A-B\subset A$，所以$(A-B)\cup A=A$.

(3)$(A-B)\cap B=A\bar{B}B=A\varnothing=\varnothing$.

(4)$(A\cup B)(A\cup\bar{B})=AA\cup A\bar{B}\cup BA\cup B\bar{B}=A\cup[A(\bar{B}\cup B)]\cup\varnothing=A\cup A\Omega=A$.

(5)$B(A\cup\bar{B})=BA\cup B\bar{B}=AB\cup\varnothing=AB$.

第三节　随机事件的概率

一、事件的概率

1. 定义

定义 1.3.1　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对 E 的任意一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，称 $P(A)$ 为事件 A 的概率，若集合函数 $P(*)$ 满足下列条件：

(1)非负性：对 E 的任意一个事件 A，$P(A)\geqslant 0$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1$；

(3)可列可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots$ 互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

2. 性质

(1)非负性：对任意一个事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2)规范性：$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$；

(3)有限可加性：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

3. 基本概率公式

(1)求逆公式：对任一事件 A，有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2)加法公式：对任意两个事件 A,B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

对任意三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

对任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{\substack{i<j \\ i,j=1,2,\cdots,n}} P(A_iA_j)+\sum_{\substack{i<j<k \\ i,j,k=1,2,\cdots,n}} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(3)减法公式：对任意两个事件 A,B，有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，若 $B\subset A$，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

【例 1.3.1】 设随机事件 A,B 满足 $P(A)=0.5, P(\overline{A}B)=0.3$，若 $A\subset B$，则 $P(B)=$________.

【答案】 0.8.

【解】 由 $A\subset B$，$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=0.3$，所以 $P(B)=0.8$.

【例 1.3.2】 设随机事件 A,B 及其和事件的概率分别为 0.4，0.3，0.6，则 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________.

【答案】 0.3.

【解】 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-P(AB)=0.6$ 得 $P(AB)=0.1$，故 $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.1=0.3$.

【例 1.3.3】 设随机事件 A 与 B 互不相容，$P(A)=0.5, P(B)=0.3$，求 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

【解】 随机事件 A 与 B 互不相容，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，故

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=0.2.$$

二、古典概型与几何概型

1. 古典概率模型

定义 1.3.2　随机试验具有以下两个特征：

(1)试验的全部可能结果只有有限个,或者说只有有限个样本点,譬如 n 个,即

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\};$$

(2)每个样本点 $\omega_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$出现的可能性即发生的概率相同,即

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$

具有这两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{包含的样本点数}}{\text{样本点总数}}=\frac{A\text{的有利场合数}}{\text{样本点总数}},$$

其中有利场合是指某些样本点 $\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \cdots,\ \omega_{i_m}$ 的出现必然导致 A 的发生,或者说它们的出现对 A 的发生有利,因此通常称这些样本点 $\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \cdots,\ \omega_{i_m}$ 为 A 的"有利场合".

例如抛一枚均匀的骰子,它只有 6 种不同结果,而且 6 种不同结果出现的可能性相同. 如果求出现奇数点的概率,就可以用古典概型. 此时,事件 A 表示"出现奇数点",则 A 包含的样本点有 3 个,$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

【例 1.3.4】 足球比赛共有 24 支球队参加,将它们分成两组(每组 12 队),求最强的两支球队分在不同组的概率.

【解】 将 24 支球队分成两组(每组 12 队)的所有可能结果作为样本空间,所有可能的分法为组合数 C_{24}^{12}. 以 A 记最强的两支球队分在不同组的事件,A 的有利场合数可以这样计算:先从 22 支弱队中选取 11 支球队,再从 2 支强队中选取 1 支,共有 $C_{22}^{11}\cdot C_2^1$ 种分法,所以 $P(A)=\frac{C_{22}^{11}C_2^1}{C_{24}^{12}}=\frac{12}{23}$.

【例 1.3.5】 袋中有 a 个白球和 b 个黑球,每次从袋中任取 1 球,取出的球不再放回去,求第 k 次取到白球的概率.

【解】 方法一:排列法

以 A_k 表示"第 k 次取到白球"这一事件,为了求 A_k 发生的概率,我们设想每个球都是有区别的,譬如白球分别标有编号 $1,\ 2,\ \cdots,\ a$,黑球的编号为 $a+1,\ a+2,\ \cdots,\ a+b$. 将它们全部取出排成一行,每一种可能的排列作为样本点,所有可能的排列结果为样本空间,样本点总数为$(a+b)!$. 而 A_k 的有利场合数可以这样来计算:第 k 个位置只放白球,而其他 $a+b-1$ 个位置可以任意放置,因此 A_k 的有利场合数为 $a(a+b-1)!$,于是有

$$P(A_k)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b},\qquad k=1,2,\cdots,a+b.$$

方法二:组合法

如果认为同颜色的球之间是无区别的,仍将全部球取出后排成一行. 此时,若将 a 个白球的位置固定,则全部球的排列就完全确定,每一种这样的排列作为一个样本点,样本点总数为 C_{a+b}^{a}. 而 A_k 的有利场合数为 C_{a+b-1}^{a-1},这是由于第 k 个位置必须放白球,只有一种放法,而剩下的 $a+b-1$ 个位置上有 $a-1$ 个位置放置白球,共有 C_{a+b-1}^{a-1}种放法. 因此

$$P(A_k)=\frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}}=\frac{a}{a+b},\qquad k=1,2,\cdots,a+b.$$