“十二五”普通高等教育规划教材

微积分

Calculus

主　编　郭金生
副主编　王汝军　唐玉玲

国防工业出版社
National Defense Industry Press

“十二五”普通高等教育规划教材

微积分

主　编　郭金生
副主编　王汝军　唐玉玲

国防工業出版社
·北京·

内 容 简 介

本书共分为10章，主要内容有：函数，极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，多元函数积分学，级数，微分方程，差分方程简介等．各章配有习题．

本书阐述细致，范例较多，便于自学，适用于全日制普通高等理工院校及经济、工商管理院校的本科生．

图书在版编目(CIP)数据

微积分/郭金生主编．—北京：国防工业出版社，2015．1
ISBN 978-7-118-09808-2

Ⅰ．①微…　Ⅱ．①郭…　Ⅲ．①微积分－教材
Ⅳ．①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第284247号

※

国防工業出版社 出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 16½　**字数** 421千字
2015年1月第1版第1次印刷　**印数** 1—3000册　**定价** 36.00元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

“微积分”是经济、工商管理等专业的一门基础专业课程，它对学生的抽象思维能力、逻辑思维能力的培养，以及后继课程的学习起着重要的作用，也是经济、工商管理等专业研究生入学考试的必考课程之一. 为了进一步提高“微积分”课程的教学质量，我们根据近几年开设“微积分”课程的教学经验，编写了本教材.

本书的内容包括：函数，极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分，多元函数积分学，级数，微分方程，差分方程简介，共 10 章. 全书基本上覆盖了现行理工科院校高等数学课本的全部教学内容. 因此，本教材适用于全日制普通高等理工院校及经济、工商管理院校的本科生，书中带 * 号的是选学内容.

本教材编委会成员由河西学院数学与统计学院郭金生、王汝军、唐玉玲组成. 第 1 章 ~ 第 3 章、第 10 章由郭金生编写，第 6 章、第 8 章 ~ 第 9 章由王汝军编写，第 4 章、第 5 章、第 7 章由唐玉玲编写，郭金生对各章内容作了统一修订.

本教材在编写过程中得到了河西学院教务处、数学与统计学院、经济管理学院领导及同事的大力支持和帮助，对我们教材的出版给予了大力的支持，在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，加之编者水平有限，不当之处在所难免，敬请读者批评指正.

编者
2014 年 10 月

目录

第1章　实数与函数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映,是微积分研究的主要对象.本章主要对初等函数的概念和性质作一些简单的介绍.

1.1　实　数

微积分研究的对象是定义在实数轴上的函数,因此,本章先简要地叙述函数的有关知识.

1.1.1　实数与数

有理数与无理数统称为实数.有理数可以用分数形式$\frac{p}{q}$(p,q 为整数,$q\neq0$)表示,也可以用有限十进位小数或无限十进循环小数来表示;而无理数用无限十进不循环小数表示.数轴是一条有原点、正方向和单位长度的直线.

1.1.2　绝对值与不等式

定义 1.1.1　设实数 a 的绝对值定义为

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值$|a|$就是点 a 到原点的距离.而$|a-b|$表示点 a 与点 b 之间的距离.

实数的绝对值有下列一些基本性质:

(1) $|a|=|-a|\geqslant0$,当且仅当 $a=0$ 时有$|a|=0$.

(2) $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(3) $|a|<h\Leftrightarrow -h<a<h$;$|a|\leqslant h\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h\,(h>0)$.

(4) 对于任何 a、$b\in\mathbf{R}$,有如下的三角形不等式:

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(5) $|ab|=|a||b|$.

(6) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}(b\neq0)$.

下面只证明性质(4),其余性质留下来自行证明.

由性质(2),有

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\ -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

两式相加,得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

根据性质(3),上式等价于

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|. \tag{1-1-1}$$

将式(1-1-1)中的 b 换成 $-b$,式(1-1-1)右边不变,得 $|a-b| \leqslant |a|+|b|$,这就证明了性质(4)不等式的右半部分. 又由 $|a|=|a-b+b|$,由式(1-1-1)得

$$|a| \leqslant |a-b|+|b|,$$

从而得

$$|a|-|b| \leqslant |a-b|. \tag{1-1-2}$$

将式(1-1-2)中的 b 换成 $-b$,得 $|a|-|b| \leqslant |a+b|$. 性质(4)得证.

1.1.3 区间与邻域

在本书里,研究问题所涉及到的数,绝大部分都是在实数范围内进行的. 如果没有声明,本书中所提到的数都是实数,所提到的数集都是实数集. 常用的数集都有特定的记号,例如,$\mathbf{R}$ 表示实数集;$\mathbf{N}$ 表示自然数集;$\mathbf{Z}$ 表示整数集;$\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

设 a、$b \in \mathbf{R}$,且 $a<b$. 数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b);数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,记为 $[a,b]$;数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间,分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$. 以上这几类区间统称为有限区间. 而 $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$, $(-\infty,a]=\{x \mid x \leqslant a\}$, $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$, $(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}$, $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 都称为无限区间. 这里符号"∞"读作"无穷大","$+\infty$"读作"正无穷大","$-\infty$"读作"负无穷大",有限区间和无限区间统称为区间.

定义 1.1.2 设 $a \in \mathbf{R}, \delta>0$. 集合 $\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$. 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,简记为 $U(a)$. 其中 a 为邻域中心,δ 为邻域半径,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为 $U^{o}(a;\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$,简记为 $U^{o}(a)$.

注意: $U^{o}(a,\delta)$ 与 $U(a,\delta)$ 的差别在于: $U^{o}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 不包含点 a.

此外,还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_{+}(a,\delta)=[a,a+\delta)$,对应的有点 a 的 δ 右空心 δ 邻域 $U_{+}^{o}(a)=(a,a+\delta)$;点 a 的 δ 左邻域 $U_{-}(a,\delta)=(a-\delta,a]$,也对应的有点 a 的 δ 左空心 δ 邻域 $U_{-}^{o}(a)=(a-\delta,a)$.

1.2 函数概念

关于函数的概念,在中学数学学习中,我们已经有了初步的了解,下面对这些内容作进一步的学习.

1.2.1 函数的定义

定义 1.2.1 给定一个非空实数集 D,若有对应法则 f,使对 D 内每一个数 x,通过 f 都有唯一的一个实数 y 与它相对应,记为

$$f(x) = y,$$

则称 f 是定义在集合 D 上的一元函数,简称为函数.

实数集 D 称为函数 f 的定义域,x 所对应的数 y,称为 f 在点 x 的函数值.

把 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in b\}(\subset \mathbf{R})$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

一般的,我们称此函数关系中的 x 为自变量,y 为因变量.

注意:定义域 D 和对应法则 f 为确定函数的两个主要因素. 所以,常用 $y = f(x), x \in D$ 表示一个函数. 由此,如果两个函数有相同的定义域和对应法则,则这两个函数是相同的. 但两个相同的函数,其对应法则的表达形式可能不同,如 $\phi(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ 和 $\psi(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$. 两个相同的函数,其变量的表示符号可能不同,如 $f(x) = \tan x, x \in \mathbf{R}$ 和 $g(u) = \tan u, u \in \mathbf{R}$.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法一般有三种,即图像法、解析法(或称公式法)和列表法. 这里不再赘述.

在实际问题中,经常遇到有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达,这类函数通常称为分段函数.

下面介绍几个特殊的函数.

例 1.2.1 绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.2.2 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值函数和符号函数都为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上分段函数(图 1-1,图 1-2).

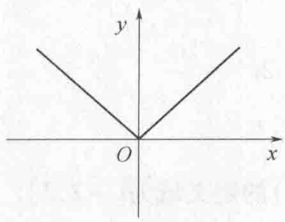

图 1-1

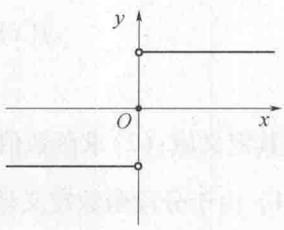

图 1-2

注意: 分段函数在其整个定义域上是一个函数,而不是几个函数.

例 1.2.3 取整函数

把不超过 x 的最大整数部分称为 x 的取整函数,记为 $y = [x]$. 则 $[-3.14] = -4$, $[-3] = -3$, $\left[\frac{5}{7}\right] = 0$, $[\sqrt{2}] = 1$, $[3.14] = 3$, $[3] = 3$.

从取整函数的定义可知 $x \leqslant [x] < x + 1$, x 为任意的实数. $y = [x]$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,值域为全体整数 $\mathbf{Z}$(图 1-3).

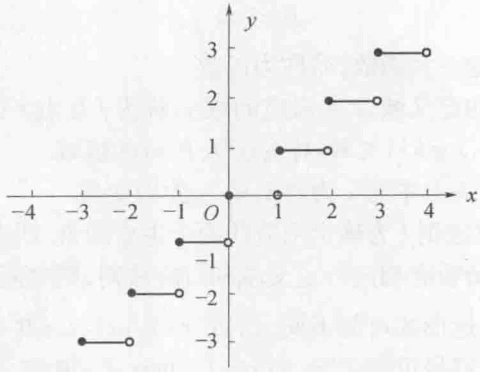

图 1-3

1.2.3 函数定义域

当给定某个函数时,事先要给定它的定义域,但对于有解析式表示的函数,其定义域是指使得该函数表达式有意义的自变量取值的全体,这种定义域称为函数的定义域.

下面是几个求定义域的例子.

例 1.2.4 求函数 $f(x)=\ln(x-2)+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义,有

$$\ln(x-2)>0, x^2-4>0.$$

由 $\ln(x-2)>0$,得 $x>2$,即 $x\in(2,+\infty)$.

由 $x^2-4>0$,得 $x>2$ 或 $x<-2$,即 $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

于是,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2,+\infty)$.

例 1.2.5 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}2x, & -2\leqslant x<0,\\ 1, & 0,\\ x^2+1, & 0<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(1)求其定义域;(2)求函数值 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

解 (1) 由于分段函数定义域是各段的并集,所以 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$.

(2) 由于 $-\dfrac{3}{2}\in[-2,0)$,则 $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-3$;$0\in\{0\}$,则 $f(0)=0$;$\dfrac{3}{2}\in[0,2)$,则 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+1=\dfrac{13}{4}$.

注意:如果某函数是从实际问题中得到的,其自变量有实际的含义,此时定义域要根据实际问题确定. 如立方体的体积 $v=x^3$ 中,x 表示立方体的边长,必须是正数,所以此函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 但如果不考虑实际意义,上述函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

1.2.4 函数的四则运算

给定两个函数 $f(x)$, $x\in D_1$ 和 $g(x)$, $x\in D_2$,记 $D=D_1\cap D_2$,并设 $D\neq\Phi$. 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$

在 D 上的和、差、积运算如下：

$$f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)g(x).$$

若在 D 中除去使 $g(x)=0$ 的 x 值，即令

$$D^{*}=D\cap\{x\mid g(x)\neq 0, x\in D_2\}\neq\Phi,$$

可在 D^{*} 上定义 f 与 g 的商的运算如下：

$$\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D^{*}.$$

注意：若 $D=D_1\cap D_2=\Phi$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 例如，设

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, x\in D_1=\{x\mid |x|\leqslant 1\},$$
$$g(x)=\sqrt{x^2-4}, x\in D_2=\{x\mid |x|\geqslant 2\}.$$

由于 $D_1\cap D_2=\Phi$，所以表达式

$$f(x)+g(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-4}$$

是没有意义的.

1.2.5 复合函数

设有两函数

$$y=f(u), u\in D,\ u=g(x), x\in E. \tag{1-2-1}$$

如果 $E^{*}=\{x\mid g(x)\in D\}\cap E\neq\Phi$，则对每一个 $x\in E^{*}$，可通过函数 $g(x)$ 对应 D 内唯一的一个值 u，而 u 又通过函数 $f(u)$ 对应唯一的一个值 y. 这就确定了一个定义在 E^{*} 上的函数，它以 x 为自变量，y 为因变量，记为

$$y=f(g(x)), x\in E^{*},$$

称为由函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 复合而成的复合函数. 并称 $f(u)$ 为外函数，$g(x)$ 为内函数，式(1-2-1)中的 u 为中间变量.

注意：由复合函数的定义可知，不是任意两个函数都会复合成复合函数. 如函数

$$y=f(u)=\sqrt{u-3}, u\in[3,+\infty)=D,$$
$$u=g(x)=\cos x, x\in\mathbf{R}, u\in[-1,1].$$

由于 $D\cap[-1,1]=\Phi$，所以这两个函数不能构成复合函数. 一般来说，复合函数的定义域是 $g(x)$ 的定义域的子集.

例 1.2.6 已知函数 $f(x)=1+x$，求 $f(x+1)$ 和 $f[f(x+1)]+1$.

解 $f(x+1)=1+(1+x)=2+x$，

$$f[f(x+1)]+1=1+f(x+1)+1=4+x.$$

例 1.2.7 设函数 $f(1+\sqrt{x})=x-1$，求 $f(x)$.

解 令 $u=u(x)=1+\sqrt{x}$，则 $x=(u-1)^2$，于是

$$f(u)=(u-1)^2-1,$$

即

$$f(x)=(x-1)^2-1=x^2-2x.$$

1.2.6 反函数

函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时不但要研究 y 随 x 而变化的状况,而且也要研究 x 随 y 而变化的状况. 所以,引入反函数的概念.

$$y=f(x),x\in D. \tag{1-2-2}$$

如果对于值域中的每一个 y,D 中有且只有一个 x,使得

$$f(x)=y,$$

按此对应法则得到一个定义在 $f(x)$ 值域上的函数,称这个函数为 $f(x)$ 的反函数,记为

$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D). \tag{1-2-3}$$

注意:单调函数一定有反函数. 从图形上看,原函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.2.8 求下列函数 $f(x)$ 的反函数:

(1) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$; (2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3) $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解 (1) 令 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,则

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

解得

$$e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}.$$

由于 $e^x>0$,则 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$,求得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

于是 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),x\in\mathbf{R}.$$

(2) 由(1)可知 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 为 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数,则 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的反函数为 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(3) 当 $x<0$ 时,由方程 $y=x-2$ 解得 $x=2+y$,当 $x\geqslant 0$ 时,由方程 $y=x^2$ 解得 $x=\sqrt{y}$. 于是 $f(x)=\begin{cases}x-2, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$ 的反函数为

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x<-2,\\ \sqrt{x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

1.3 函数的几种性态

1.3.1 单调性

定义 1.3.1 设函数 $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数,若对任意 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,

总有

(1) 若$f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称$f(x)$为集合 D 上的增函数,当$f(x_1)<f(x_2)$时,称$f(x)$为集合 D 上的严格增函数.

(2) 若$f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称$f(x)$为集合 D 上的减函数,当$f(x_1)>f(x_2)$时,称$f(x)$为集合 D 上的严格减函数.

一般地,把增函数和减函数统称为单调函数,严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

1.3.2 奇偶性

定义 1.3.2 设集合 D 为对称于原点的数集,$f(x)$为定义在集合 D 上的函数.若对每一个 $x\in D$,有

$$f(-x)=-f(x)\,(f(-x)=f(x)),$$

则称$f(x)$为集合 D 上的奇(偶)函数.

注意:从函数图形上看,奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像则关于 y 轴对称.

例 1.3.1 判断函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$的奇偶性.

解

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})\\&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)\\&=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x),\end{aligned}$$

因此,由函数的奇偶性定义可知,函数$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$为奇函数.

1.3.3 周期性

定义 1.3.3 设$f(x)$为定义在集合 D 上的函数.若存在实数 $T\neq 0$,使得对任意 $x\in D$,有$f(x+T)=f(x)$成立,则称$f(x)$为周期函数,T 称为$f(x)$的一个周期.显然,若 T 为$f(x)$的周期,则 nT(n 为正整数)也是$f(x)$的周期.若在周期函数$f(x)$的所有周期中有一个最小的正周期,则称此最小正周期为$f(x)$的基本周期,或简称周期.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 的周期都为 2π.$\tan x$,$\cot x$ 的周期都为 π.常函数$f(x)=c$ 是以任何正数为周期的周期函数,但不存在基本周期.

1.3.4 有界性

定义 1.3.4 设$f(x)$为定义在集合 D 上的函数.若存在正数 M,使得对每一个 $x\in D$,有

$$|f(x)|\leqslant M, \tag{1-2-4}$$

则称$f(x)$为集合 D 上的有界函数.并称 M 为$f(x)$在集合 D 上的界;否则称$f(x)$在集合 D 上的无界.

定义 1.3.5 设$f(x)$为定义在集合 D 上的函数.若存在数 A(或 B),使得对每一个 $x\in D$ 有

$$f(x)\leqslant A\,(f(x)\geqslant B),$$

则称$f(x)$为集合 D 上的有上(下)界函数,并称 $A(B)$称为$f(x)$在集合 D 上的一个上(下)界.