



“十二五”普通高等教育规划教材

微积分

Calculus

主 编 郭金生
副主编 王汝军 唐玉玲



国防工业出版社

National Defense Industry Press



“十二五”普通高等教育规划教材

微 积 分

主 编 郭金生

副主编 王汝军 唐玉玲

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书共分为 10 章,主要内容有:函数,极限与连续,导数与微分,微分中值定理及导数的应用,不定积分,定积分,多元函数积分学,级数,微分方程,差分方程简介等.各章配有习题.

本书阐述细致,范例较多,便于自学,适用于全日制普通高等理工院校及经济、工商管理院校的本科生.

图书在版编目(CIP)数据

微积分/郭金生主编. —北京:国防工业出版社,2015. 1
ISBN 978-7-118-09808-2

I. ①微... II. ①郭... III. ①微积分—教材
IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284247 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 16½ 字数 421 千字

2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 36.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

“微积分”是经济、工商管理等专业的一门基础专业课程,它对学生的抽象思维能力、逻辑思维能力的培养,以及后继课程的学习起着重要的作用,也是经济、工商管理等专业研究生入学考试的必考课程之一. 为了进一步提高“微积分”课程的教学质量,我们根据近几年开设“微积分”课程的教学经验,编写了本教材.

本书的内容包括:函数,极限与连续,导数与微分,微分中值定理及导数的应用,不定积分,定积分,多元函数积分学,级数,微分方程,差分方程简介,共 10 章. 全书基本上覆盖了现行理工院校高等数学课本的全部教学内容. 因此,本教材适用于全日制普通高等理工院校及经济、工商管理院校的本科生,书中带 * 号的是选学内容.

本教材编委会成员由河西学院数学与统计学院郭金生、王汝军、唐玉玲组成. 第 1 章 ~ 第 3 章、第 10 章由郭金生编写,第 6 章、第 8 章 ~ 第 9 章由王汝军编写,第 4 章、第 5 章、第 7 章由唐玉玲编写,郭金生对各章内容作了统一修订.

本教材在编写过程中得到了河西学院教务处、数学与统计学院、经济管理学院领导及同事的大力支持和帮助,对我们教材的出版给予了大力的支持,在此一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促,加之编者水平有限,不当之处在所难免,敬请读者批评指正.

编者
2014 年 10 月

目 录

第1章 实数与函数	1
1.1 实数	1
1.1.1 实数与数	1
1.1.2 绝对值与不等式	1
1.1.3 区间与邻域	2
1.2 函数概念	2
1.2.1 函数的定义	2
1.2.2 函数的表示法	3
1.2.3 函数定义域	4
1.2.4 函数的四则运算	4
1.2.5 复合函数	5
1.2.6 反函数	6
1.3 函数的几种性态	6
1.3.1 单调性	6
1.3.2 奇偶性	7
1.3.3 周期性	7
1.3.4 有界性	7
1.4 初等函数	8
1.4.1 基本初等函数	8
1.4.2 初等函数	11
1.5 简单的经济函数	11
1.5.1 总成本函数、总收入函数和总利润函数	11
1.5.2 需求函数与供给函数	12
习题1	13
第2章 极限与连续	16
2.1 数列的极限	16
2.2 函数的极限	19
2.2.1 自变量趋向有限值 x_0 时函数的极限	19
2.2.2 自变量趋向无穷大时函数的极限	21

2.3	极限的性质与四则运算法则	22
2.4	无穷小量与无穷大量	25
2.4.1	无穷小量的定义与性质	25
2.4.2	无穷小量的比较	26
2.4.3	无穷大量	28
2.5	极限存在准则与两个重要极限	28
2.5.1	极限存在准则	29
2.5.2	两个重要极限	30
2.6	函数的连续性	34
2.6.1	函数的连续性的概念	34
2.6.2	间断点及其分类	36
2.6.3	连续函数的性质	37
2.6.4	闭区间上连续函数的性质	39
	习题2	40
第3章	导数与微分	44
3.1	导数的概念	44
3.1.1	导数的概念	44
3.1.2	导数的几何意义	48
3.1.3	函数的可导性与连续性的关系	48
3.2	函数的求导法则	49
3.2.1	四则运算法则	49
3.2.2	反函数的导数	50
3.2.3	复合函数的导数	51
3.2.4	导数公式	52
3.2.5	对数求导法	53
3.2.6	隐函数的导数	54
3.2.7	含参变量函数求导	55
3.2.8	高阶导数	55
3.3	微分	57
3.4	导数在经济学中应用	59
3.4.1	边际与边际分析	59
3.4.2	弹性与弹性分析	61
	习题3	63
第4章	微分中值定理及导数的应用	68
4.1	微分中值定理	68
4.2	洛必达法则	72

4.3	函数单调性与极值的判别法	75
4.4	函数凸性与拐点	80
4.4.1	曲线的凸性、拐点	80
4.4.2	曲线的渐近线	82
4.5	函数作图	83
	习题4	85
第5章	不定积分	88
5.1	原函数与不定积分的概念	88
5.1.1	原函数	88
5.1.2	基本积分表	90
5.1.3	不定积分的性质	91
5.2	换元积分法	93
5.2.1	第一换元法(凑微分法)	93
5.2.2	第二换元法	96
5.3	分部积分法	99
5.4	有理函数的积分	102
5.4.1	有理函数的不定积分	102
5.4.2	三角函数有理式的不定积分	105
	习题5	107
第6章	定积分	109
6.1	定积分的概念	109
6.1.1	曲边梯形的面积	109
6.1.2	定积分的定义	110
6.2	定积分的性质	112
6.3	微积分基本定理	116
6.3.1	变限积分	116
6.3.2	原函数的存在性	116
6.4	定积分的换元积分法与分部积分法	119
6.4.1	换元积分法与分部积分法	119
6.4.2	定积分的分部积分法	122
6.5	反常积分	123
6.5.1	无穷限的反常积分	123
6.5.2	无界函数的反常积分	124
6.6	定积分的应用	126
6.6.1	平面图形的面积	126
6.6.2	由平行截面面积求体积	128

6.6.3	定积分在经济学中的应用	131
6.4	利用定积分求经济函数的最大值和最小值	132
	习题6	133
第7章	多元函数微积分	136
7.1	空间解析几何基础知识	136
7.1.1	空间直角坐标系	136
7.1.2	空间任意两点间的距离	137
7.1.3	空间曲面与方程	138
7.1.4	空间曲线	139
7.1.5	常见的曲面	140
7.1.6	空间曲线在坐标面上的投影	143
7.1.7	平面区域的概念	145
7.2	多元函数的概念	146
7.2.1	二元函数的定义与几何意义	146
7.2.2	二元函数的极限与连续	148
7.3	偏导数与全微分	149
7.3.1	二元函数的偏导数	149
7.3.2	全微分	154
7.4	多元复合函数与隐函数微分法	156
7.4.1	复合函数的微分法	156
7.4.2	隐函数的微分法	157
7.5	多元函数的极值与最值	158
7.5.1	二元函数的极值	158
7.5.2	条件极值和拉格朗日乘数法	161
7.6	二重积分	165
7.6.1	二重积分的概念和性质	165
7.6.2	二重积分的定义	166
7.6.3	二重积分的几何意义	167
7.6.4	二重积分的性质	167
7.6.5	重积分的计算	168
7.6.6	二重积分的应用	174
	习题7	175
第8章	无穷级数	179
8.1	常数项级数的概念与性质	179
8.1.1	常数项级数的概念	179
8.1.2	常数项级数的基本性质	182

8.2	正项级数敛散性的判别	184
8.3	任意项级数敛散性的判别	189
8.3.1	交错级数	189
8.3.2	任意项级数	190
8.4	幂级数	191
8.4.1	函数项级数	191
8.4.2	幂级数及其收敛性	192
8.4.3	幂级数的基本性质	195
* 8.5	函数的幂级数展开	197
8.5.1	泰勒级数	197
8.5.2	泰勒公式	198
8.5.3	函数的幂级数展开	199
8.5.4	函数的幂级数展开式的应用	203
习题 8		206
第 9 章	微分方程简介	209
9.1	微分方程的概念	209
9.1.1	引例	209
9.1.2	微分方程的基本概念	210
9.2	最简单的微分方程	212
9.2.1	可分离变量的微分方程	212
9.2.2	齐次方程	215
9.3	一阶线性微分方程	216
9.3.1	齐次线性方程的通解	216
9.3.2	非齐次线性方程的通解	217
9.3.3	贝努利方程	220
9.3.4	利用变量变换法求微分方程的解	221
9.4	可降阶的高阶微分方程	222
9.4.1	$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	222
9.4.2	$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	224
9.4.3	$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程	224
9.5	二阶常系数线性微分方程	225
9.5.1	二阶线性微分方程解的结构	225
9.5.2	二阶常系数齐次线性微分方程及其解法	227
9.5.3	二阶常系数非齐次线性微分方程及其解法	230
9.6	微分方程在经济学中的应用	233
9.6.1	供需均衡的价格调整模型	233
9.6.2	索洛新古典经济增长模型	234

9.6.3 新产品的推广模型	235
习题9	238
第10章 差分方程简介	240
10.1 差分方程的基本概念	240
10.1.1 差分的概念	240
10.1.2 差分方程的基本概念	241
10.1.3 线性差分方程解的基本定理	242
10.2 一阶常系数线性差分方程	243
10.2.1 齐次线性差分方程的通解	243
10.2.2 非齐次线性差分方程的特解和通解	243
10.3 二阶常系数线性差分方程	246
10.3.1 齐次线性差分方程的通解	246
10.3.2 非齐次线性差分方程的特解和通解	247
10.4 差分方程在经济学中的简单应用	248
10.4.1 筹措教育经费模型	248
10.4.2 价格与库存模型	249
10.4.3 动态经济系统的蛛网模型	250
习题10	252
参考文献	254

第1章 实数与函数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映,是微积分研究的主要对象.本章主要对初等函数的概念和性质作一些简单的介绍.

1.1 实数

微积分研究的对象是定义在实数轴上的函数,因此,本章先简要地叙述函数的有关知识.

1.1.1 实数与数

有理数与无理数统称为实数.有理数可以用分数形式 $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数, $q \neq 0$)表示,也可以用有限十进位小数或无限十进循环小数来表示;而无理数用无限十进不循环小数表示.数轴是一条有原点、正方向和单位长度的直线.

1.1.2 绝对值与不等式

定义 1.1.1 设实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

从数轴上看,数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.而 $|a - b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

实数的绝对值有下列一些基本性质:

(1) $|a| = |-a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时有 $|a| = 0$.

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$.

(3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h$; $|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h$ ($h > 0$).

(4) 对于任何 $a, b \in \mathbf{R}$,有如下的三角形不等式:

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

(5) $|ab| = |a| |b|$.

(6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$).

下面只证明性质(4),其余性质留下来自行证明.

由性质(2),有

$$-|a| \leq a \leq |a|, \quad -|b| \leq b \leq |b|.$$

两式相加,得

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

根据性质(3),上式等价于

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \quad (1-1-1)$$

将式(1-1-1)中的 b 换成 $-b$,式(1-1-1)右边不变,得 $|a-b| \leq |a| + |b|$,这就证明了性质(4)不等式的右半部分. 又由 $|a| = |a-b+b|$,由式(1-1-1)得

$$|a| \leq |a-b| + |b|,$$

从而得

$$|a| - |b| \leq |a-b|. \quad (1-1-2)$$

将式(1-1-2)中的 b 换成 $-b$,得 $|a| - |b| \leq |a+b|$. 性质(4)得证.

1.1.3 区间与邻域

在本书里,研究问题所涉及到的数,绝大部分都是在实数范围内进行的. 如果没有声明,本书中所提到的数都是实数,所提到的数集都是实数集. 常用的数集都有特定的记号,例如, $\mathbf{R}$ 表示实数集; $\mathbf{N}$ 表示自然数集; $\mathbf{Z}$ 表示整数集; $\mathbf{Q}$ 表示有理数集.

设 $a, b \in \mathbf{R}$,且 $a < b$. 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) ;数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间,记为 $[a, b]$;数集 $\{x | a \leq x < b\}$ 和 $\{x | a < x \leq b\}$ 都称为半开半闭区间,分别记为 $[a, b)$ 和 $(a, b]$. 以上这几类区间统称为有限区间. 而 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$, $(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$, $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$, $(-\infty, a) = \{x | x < a\}$, $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$ 都称为无限区间. 这里符号“ ∞ ”读作“无穷大”,“ $+\infty$ ”读作“正无穷大”,“ $-\infty$ ”读作“负无穷大”,有限区间和无限区间统称为区间.

定义 1.1.2 设 $a \in \mathbf{R}, \delta > 0$. 集合 $\{x | |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta)$. 称为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$,简记为 $U(a)$. 其中 a 为邻域中心, δ 为邻域半径,即

$$U(a, \delta) = \{x | |x-a| < \delta\} = (a-\delta, a+\delta).$$

点 a 的空心 δ 邻域定义为 $U^o(a; \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}$,简记为 $U^o(a)$.

注意: $U^o(a, \delta)$ 与 $U(a, \delta)$ 的差别在于: $U^o(a, \delta) = \{x | 0 < |x-a| < \delta\}$ 不包含点 a .

此外,还常用到以下几种邻域:

点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a, \delta) = [a, a+\delta)$,对应的有点 a 的 δ 右空心 δ 邻域 $U_+^o(a) = (a, a+\delta)$;点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a, \delta) = (a-\delta, a]$,也对应的有点 a 的 δ 左空心 δ 邻域 $U_-^o(a) = (a-\delta, a)$.

1.2 函数概念

关于函数的概念,在中学数学学习中,我们已经有了初步的了解,下面对这些内容作进一步的学习.

1.2.1 函数的定义

定义 1.2.1 给定一个非空实数集 D ,若有对应法则 f ,使对 D 内每一个数 x ,通过 f 都有唯一的一个实数 y 与它相对应,记为

$$f(x) = y,$$

则称 f 是定义在集合 D 上的一元函数, 简称为函数.

实数集 D 称为函数 f 的定义域, x 所对应的数 y , 称为 f 在点 x 的函数值.

把 $f(D) = \{y | y = f(x), x \in D\} (\subset \mathbf{R})$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

一般的, 我们称此函数关系中的 x 为自变量, y 为因变量.

注意: 定义域 D 和对应法则 f 为确定函数的两个主要因素. 所以, 常用 $y = f(x), x \in D$ 表示一个函数. 由此, 如果两个函数有相同的定义域和对应法则, 则这两个函数是相同的. 但两个相同的函数, 其对应法则的表达形式可能不同, 如 $\phi(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ 和 $\psi(x) = \sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$. 两个相同的函数, 其变量的表示符号可能不同, 如 $f(x) = \tan x, x \in \mathbf{R}$ 和 $g(u) = \tan u, u \in \mathbf{R}$.

1.2.2 函数的表示法

函数的表示法一般有三种, 即图像法、解析法 (或称公式法) 和列表法. 这里不再赘述.

在实际问题中, 经常遇到有些函数在其定义域的不同部分用不同的公式表达, 这类函数通常称为分段函数.

下面介绍几个特殊的函数.

例 1.2.1 绝对值函数

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.2.2 符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

绝对值函数和符号函数都为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上分段函数 (图 1-1, 图 1-2).

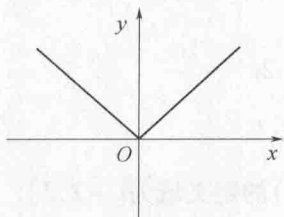


图 1-1

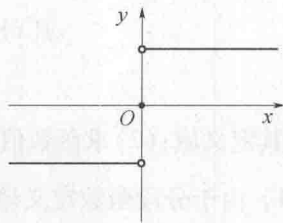


图 1-2

注意: 分段函数在其整个定义域上是一个函数, 而不是几个函数.

例 1.2.3 取整函数

把不超过 x 的最大整数部分称为 x 的取整函数, 记为 $y = [x]$. 则 $[-3.14] = -4, [-3] = -3, [\frac{5}{7}] = 0, [\sqrt{2}] = 1, [3.14] = 3, [3] = 3$.

从取整函数的定义可知 $x \leq [x] < x+1, x$ 为任意的实数. $y = [x]$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为全体整数 $\mathbf{Z}$ (图 1-3).

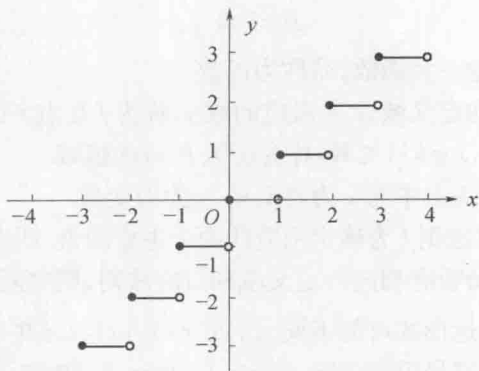


图 1-3

1.2.3 函数定义域

当给定某个函数时,事先要给定它的定义域,但对于有解析式表示的函数,其定义域是指使得该函数表达式有意义的自变量取值的全体,这种定义域称为函数的定义域.

下面是几个求定义域的例子.

例 1.2.4 求函数 $f(x) = \ln(x-2) + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义,有

$$\ln(x-2) > 0, x^2 - 4 > 0.$$

由 $\ln(x-2) > 0$, 得 $x > 2$, 即 $x \in (2, +\infty)$.

由 $x^2 - 4 > 0$, 得 $x > 2$ 或 $x < -2$, 即 $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

于是, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(2, +\infty)$.

例 1.2.5 已知分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

(1) 求其定义域; (2) 求函数值 $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

解 (1) 由于分段函数定义域是各段的并集, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $[-2, 2]$.

(2) 由于 $-\frac{3}{2} \in [-2, 0)$, 则 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -3$; $0 \in \{0\}$, 则 $f(0) = 0$; $\frac{3}{2} \in [0, 2]$, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{13}{4}$.

注意: 如果某函数是从实际问题中得到的, 其自变量有实际的含义, 此时定义域要根据实际问题确定. 如立方体的体积 $v = x^3$ 中, x 表示立方体的边长, 必须是正数, 所以此函数的定义域为 $(0, +\infty)$. 但如果不考虑实际意义, 上述函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

1.2.4 函数的四则运算

给定两个函数 $f(x)$, $x \in D_1$ 和 $g(x)$, $x \in D_2$, 记 $D = D_1 \cap D_2$, 并设 $D \neq \emptyset$. 定义 $f(x)$ 与 $g(x)$

在 D 上的和、差、积运算如下:

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x).$$

若在 D 中除去使 $g(x) = 0$ 的 x 值, 即令

$$D^* = D \cap \{x \mid g(x) \neq 0, x \in D_2\} \neq \Phi,$$

可在 D^* 上定义 f 与 g 的商的运算如下:

$$\frac{f(x)}{g(x)}, x \in D^*.$$

注意: 若 $D = D_1 \cap D_2 = \Phi$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不能进行四则运算. 例如, 设

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in D_1 = \{x \mid |x| \leq 1\},$$

$$g(x) = \sqrt{x^2-4}, x \in D_2 = \{x \mid |x| \geq 2\}.$$

由于 $D_1 \cap D_2 = \Phi$, 所以表达式

$$f(x) + g(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$$

是没有意义的.

1.2.5 复合函数

设有两函数

$$y = f(u), u \in D, u = g(x), x \in E. \quad (1-2-1)$$

如果 $E^* = \{x \mid g(x) \in D\} \cap E \neq \Phi$, 则对每一个 $x \in E^*$, 可通过函数 $g(x)$ 对应 D 内唯一的一个值 u , 而 u 又通过函数 $f(u)$ 对应唯一的一个值 y . 这就确定了一个定义在 E^* 上的函数, 它以 x 为自变量, y 为因变量, 记为

$$y = f(g(x)), x \in E^*,$$

称为由函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 复合而成的复合函数. 并称 $f(u)$ 为外函数, $g(x)$ 为内函数, 式(1-2-1)中的 u 为中间变量.

注意: 由复合函数的定义可知, 不是任意两个函数都会复合成复合函数. 如函数

$$y = f(u) = \sqrt{u-3}, u \in [3, +\infty) = D,$$

$$u = g(x) = \cos x, x \in \mathbf{R}, u \in [-1, 1].$$

由于 $D \cap [-1, 1] = \Phi$, 所以这两个函数不能构成复合函数. 一般来说, 复合函数的定义域是 $g(x)$ 的定义域的子集.

例 1.2.6 已知函数 $f(x) = 1+x$, 求 $f(x+1)$ 和 $f[f(x+1)] + 1$.

解 $f(x+1) = 1 + (1+x) = 2+x$,

$$f[f(x+1)] + 1 = 1 + f(x+1) + 1 = 4+x.$$

例 1.2.7 设函数 $f(1+\sqrt{x}) = x-1$, 求 $f(x)$.

解 令 $u = u(x) = 1 + \sqrt{x}$, 则 $x = (u-1)^2$, 于是

$$f(u) = (u-1)^2 - 1,$$

即

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x.$$

1.2.6 反函数

函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时不但要研究 y 随 x 而变化的状况, 而且也要研究 x 随 y 而变化的状况. 所以, 引入反函数的概念.

$$y = f(x), x \in D. \quad (1-2-2)$$

如果对于值域中的每一个 y , D 中有且只有一个 x , 使得

$$f(x) = y,$$

按此对应法则得到一个定义在 $f(x)$ 值域上的函数, 称这个函数为 $f(x)$ 的反函数, 记为

$$x = f^{-1}(y), y \in f(D). \quad (1-2-3)$$

注意: 单调函数一定有反函数. 从图形上看, 原函数与其反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1.2.8 求下列函数 $f(x)$ 的反函数:

$$(1) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad (2) f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

解 (1) 令 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 则

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0,$$

解得

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

由于 $e^x > 0$, 则 $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, 求得 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

于是 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbf{R}.$$

(2) 由 (1) 可知 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的反函数, 则 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的反函数为 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(3) 当 $x < 0$ 时, 由方程 $y = x - 2$ 解得 $x = 2 + y$, 当 $x \geq 0$ 时, 由方程 $y = x^2$ 解得 $x = \sqrt{y}$. 于是 $f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 的反函数为

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -2, \\ \sqrt{x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

1.3 函数的几种性态

1.3.1 单调性

定义 1.3.1 设函数 $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数, 若对任意 $x_1, x_2 \in D$, 当 $x_1 < x_2$ 时,

总有

(1) 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为集合 D 上的增函数, 当 $f(x_1) < f(x_2)$ 时, 称 $f(x)$ 为集合 D 上的严格增函数.

(2) 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 为集合 D 上的减函数, 当 $f(x_1) > f(x_2)$ 时, 称 $f(x)$ 为集合 D 上的严格减函数.

一般地, 把增函数和减函数统称为单调函数, 严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数.

1.3.2 奇偶性

定义 1.3.2 设集合 D 为对称于原点的数集, $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数. 若对每一个 $x \in D$, 有

$$f(-x) = -f(x) \text{ (} f(-x) = f(x) \text{)},$$

则称 $f(x)$ 为集合 D 上的奇(偶)函数.

注意: 从函数图形上看, 奇函数的图像关于原点对称, 偶函数的图像则关于 y 轴对称.

例 1.3.1 判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性.

解 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1})$

$$= \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x),$$

因此, 由函数的奇偶性定义可知, 函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

1.3.3 周期性

定义 1.3.3 设 $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数. 若存在实数 $T \neq 0$, 使得对任意 $x \in D$, 有 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的一个周期. 显然, 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 nT (n 为正整数) 也是 $f(x)$ 的周期. 若在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中有一个最小的正周期, 则称此最小正周期为 $f(x)$ 的基本周期, 或简称周期.

例如, $\sin x, \cos x$ 的周期都为 2π , $\tan x, \cot x$ 的周期都为 π . 常函数 $f(x) = c$ 是以任何正数为周期的周期函数, 但不存在基本周期.

1.3.4 有界性

定义 1.3.4 设 $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数. 若存在正数 M , 使得对每一个 $x \in D$, 有

$$|f(x)| \leq M, \quad (1-2-4)$$

则称 $f(x)$ 为集合 D 上的有界函数. 并称 M 为 $f(x)$ 在集合 D 上的界; 否则称 $f(x)$ 在集合 D 上的无界.

定义 1.3.5 设 $f(x)$ 为定义在集合 D 上的函数. 若存在数 A (或 B), 使得对每一个 $x \in D$ 有

$$f(x) \leq A \text{ (} f(x) \geq B \text{)},$$

则称 $f(x)$ 为集合 D 上的有上(下)界函数, 并称 A (B) 称为 $f(x)$ 在集合 D 上的一个上(下)界.