高等代数选讲

GAODENGDAISHU XUANJIANG

编著　王　丽　李永军

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等代数选讲

编著 王 丽 李永军

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书较全面、系统地总结和归纳了高等代数中的重要知识点以及典型问题的解题方法和技巧。全书共10章：多项式、行列式、线性方程组、矩阵、方阵的特征根与相似对角化、λ-矩阵与若尔当标准形、二次型、向量空间、线性变换、欧氏空间。

本书十分注重解题方法的归纳和总结，每章各节在简要介绍基础知识的基础上，针对该节中涉及的常见问题，系统地总结了常用的解题思想和方法，并结合典型例题（以考研试题为主）揭示每一种方法的应用技巧和应注意的问题。

本书可作为数学专业高等代数选讲课程的教材，也可供数学专业学生考研学习使用，还可作为理科、工科学生学习高等代数与线性代数课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数选讲/王丽，李永军编著. --上海：同济大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5608-5429-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王…②李… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第032111号

高等代数选讲

编 著 王 丽 李永军

责任编辑 姚烨铭 责任校对 张德胜 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622）

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 21.25

字 数 530 000

版 次 2014年4月第1版 2014年4月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5429-8

定 价 42.00元

前言

高等代数是大学数学专业的重要基础课,也是数学专业研究生入学考试的必考课程之一,还是理工科各专业的重要数学工具。在长期的教学实践中,我们深刻体会到,学生学习和掌握教材中的基本知识并不太困难,但要灵活运用基础知识去分析问题和解决问题就感到困难,甚至不知道如何着手,原因在于这门课程的自身特点:概念多、内容比较抽象、解题方法灵活多变。为了提高学生分析和解决高等代数问题的能力,许多高校特别是新升本高校数学类专业都开设了高等代数选讲这门课程,也出版了一些相关书籍。但是由于这些教材和参考书籍的侧重点不同,仍不能满足学生掌握高等代数的解题方法、技巧和考研需要。因此,我们参考了大量高等代数方面的书籍和网络资源,分析了近年来全国大部分高校硕士研究生入学考试高等代数试题,结合近些年来讲授“高等代数选讲”的教学经验和所用教案讲义,认真编著了本书。

本书共 10 章内容:第 1 章多项式;第 2 章行列式;第 3 章线性方程组;第 4 章矩阵;第 5 章方阵的特征根与相似对角化;第 6 章 λ-矩阵与若尔当标准形;第 7 章二次型;第 8 章向量空间;第 9 章线性变换;第 10 章欧氏空间。本书较全面地介绍了高等代数中的重要知识点,并系统地总结和归纳了典型问题的解题方法和技巧,如:重点总结和归纳了整除的证明方法、n 阶行列式的计算方法、线性方程组解的结构、线性方程组的公共解与同解、可逆矩阵的证明及逆矩阵的计算方法、矩阵秩的等式及不等式的证明方法、分块矩阵的应用、最小多项式的计算方法、方阵可对角化的方法、两个矩阵的同时相似对角化问题、λ-矩阵标准形的计算方法、若尔当标准形的应用、化二次型为标准形的方法、正定矩阵的判定方法、两个矩阵的同时合同对角化问题、向量组线性相关性的判定方法、向量组的基与维数的计算方法、线性变换的存在性及其值域与核的计算方法,并给出了每种方法的应用范围和相应的例题。同时,每章还配有习题,可供读者练习和巩固所学知识。

本书在章节安排上注重知识的系统化和解题方法的归纳总结,每章各节在简要介绍基础知识的基础上,针对该节涉及的常见问题系统地总结出常用的解题思想和方法,并结合典型例题(以考研试题为主)展示每一种方法的应用技巧和应当注意的问题,注重体现方法的多样性,以揭示概念的内在联系,从而使学生进一步巩固高等代数理论知识,比较熟练地掌握该课程处理问题的方法与技巧,进而提高学生分析和解决高等代数问题的能力。本书可作为数学专业高等代数选讲课程的教材;也可供数学专业学生考研学习使用,还可作为理科、工科学生学习高等代数与线性代数课程的参考书。

本书由兰州城市学院数学学院王丽、李永军编著,其中王丽编著了第 2—7 章,李永军编著了第 1、8—10 章。在编著和出版过程中得到了一些领导、同事和学生的支持和帮助,也得到了国家自然科学基金(11261027,11302092)和兰州城市学院教学改革项目资金的支持,在此一并表示衷心感谢!

由于编者水平有限,不妥之处在所难免,恳请读者批评指正。

编　者

2014 年 1 月

目录

第1章 多 项 式

1.1 多项式的整除性

一、整除的定义及性质

1. 定义

设 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$. 若存在 $h(x) \in F[x]$,使得 $f(x) = g(x)h(x)$,则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$,记作 $g(x) \mid f(x)$,否则就称 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$,记作 $g(x) \nmid f(x)$.

注 多项式的整除性不因系数域的扩大而改变,即设 F_1、F_2 是两个数域,且 $F_1 \subseteq F_2$, $f(x)$, $g(x) \in F_1[x]$,若在 F_1 中 $g(x) \nmid f(x)$,则在 F_2 中仍有 $g(x) \nmid f(x)$.

2. 性质

(1) 零多项式只能整除零多项式.

(2) 任一多项式都能整除零多项式.

(3) 零次多项式能整除任一多项式.

(4) 若 $f(x) \mid g(x)$,则 $af(x) \mid bg(x)$,其中 a, $b \in F$,且 $ab \neq 0$.

(5) 若 $f(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid f(x)$,则 $f(x) = cg(x)$,其中 $c \in F$ 为非零常数.

(6) 若 $f(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid h(x)$,则 $f(x) \mid h(x)$.

(7) 若 $f(x) \mid g_i(x)(i = 1, \cdots, s)$,则 $f(x) \mid (u_1(x)g_1(x) + \cdots + u_s(x)g_s(x))$,其中 $u_i(x)(i = 1, \cdots, s)$ 是任意多项式.

(8) 若 $f(x) \mid g(x)$, $h(x) \mid g(x)$,且 $(f(x), h(x)) = 1$,则 $f(x)h(x) \mid g(x)$. 一般地,若 $f_i(x) \mid g(x)(i = 1, \cdots, s)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_s(x)(s \geqslant 3)$ 两两互素,则

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x) \mid g(x).$$

(9) 多项式的根与一次因式的关系: $f(c) = 0 \Leftrightarrow x - c \mid f(x)$.

二、整除的证明方法

1. 利用带余除法定理

带余除法定理 设 $f(x)$, $g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$,则存在唯一的 $q(x)$, $r(x) \in F[x]$,使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\partial^\circ r(x) < \partial^\circ g(x)$. 上式中称 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式. 特别地,$g(x) \mid f(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$.

例 1.1.1 当且仅当 k、l、m 适合什么条件时,有 $x^2 + kx + 1 \mid x^4 + lx^2 + m$.

解法 1 由带余除法定理,可得

$$
\begin{aligned}
&x^4+lx^2+m\\
&=(x^2+kx+1)(x^2-kx+(k^2+l-1))+k(2-l-k^2)x+(m+1-l-k^2),
\end{aligned}
$$

因此,$x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m$ 当且仅当

$$
\begin{cases}k(2-l-k^2)=0,\\ m+1-l-k^2=0,\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}k=0,\\ l=m+1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1,\\ l=2-k^2.\end{cases}
$$

解法 2 待定系数法

由 $x^2+kx+1\mid x^4+lx^2+m$,可设

$$
x^4+lx^2+m=(x^2+kx+1)(x^2+px+q),
$$

即

$$
x^4+lx^2+m=x^4+(p+k)x^3+(q+1+kp)x^2+(kq+p)x+q,
$$

比较系数得

$$
\begin{cases}k+p=0,\\ kp+q+1=l,\\ kq+p=0,\\ q=m,\end{cases}
$$

由 $p=-k$, $q=m$,可得 $k(m-1)=0$,即 $k=0$ 或 $m=1$, 从而

$$
\begin{cases}k=0,\\ l=m+1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}m=1,\\ l=2-k^2.\end{cases}
$$

例 1.1.2 设 $f(x)\in F[x]$. 证明:$x\mid f(x)\Leftrightarrow x\mid f^k(x)$, k 是正整数.

证明 ($\Rightarrow$)显然.

($\Leftarrow$)反证法 设 $x\nmid f(x)$,则由带余除法定理可知 $f(x)=xq(x)+r$, $r\neq 0$, 于是

$$
f^k(x)=(xq(x)+r)^k=x[x^{k-1}q^k(x)+\cdots+C_k^{k-1}q(x)r^{k-1}]+r^k,\ r^k\neq 0,
$$

则 $x\nmid f^k(x)$, 这与已知矛盾.

例 1.1.3 设 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_{n-1}(x)\in F[x]$. 证明:若

$$
x^n-a\,\Big|\,\sum_{i=0}^{n-1}f_i(x^n)x^i\ (a\neq 0,\ a\in F),
$$

则 $x-a\mid f_i(x)(i=0,1,\cdots,n-1)$.

证明 由带余除法定理,设 $f_i(x)=(x-a)q_i(x)+r_i(r_i\in F)$, 则

$$
f_i(x^n)=(x^n-a)q_i(x^n)+r_i,
$$

故 $\sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i = \sum_{i=0}^{n-1}(x^n - a)q_i(x^n)x^i + \sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i$，因为 $x^n - a \left| \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i \right.$，所以

$$x^n - a \left| \sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i \right.,$$

则 $\sum_{i=0}^{n-1} r_i x^i = 0$，于是 $r_i = 0(i = 0, 1, \cdots, n-1)$，即 $x - a \mid f_i(x)(i = 0, 1, \cdots, n-1)$.

2. 利用根与一次因式的关系

用带余除法定理或待定系数法不易证明时，可以利用根与一次因式的关系来证明，可采用以下方法：

设 $g(x)$ 无重根，且 $g(x)$ 的根全为 $f(x)$ 的根，则 $g(x) \mid f(x)$.

证明　设 $g(x)$ 的根为 $a_1, a_2, \cdots, a_s$，则 $g(x) = a(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s)$，由于

$$f(a_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots, s,$$

故

$$x - a_i \mid f(x),\ i = 1, 2, \cdots, s,$$

因为 $x-a_1, x-a_2, \cdots, x-a_s$ 两两互素，所以 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s) \mid f(x)$，即

$$g(x) \mid f(x).$$

例 1.1.4　证明：任意的非负整数 n，均有 $x^2 + x + 1 \mid x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$.

证法 1　由 $x^2+x+1 = \dfrac{x^3-1}{x-1}$，即 x^2+x+1 的根为不等于 1 的三次单位根 ε_k，$k = 1, 2$，其中

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{3},\ k = 1, 2,$$

则

$$\varepsilon_k^2 + \varepsilon_k + 1 = 0,\ \varepsilon_k^3 = 1,\ k = 1, 2.$$

将 ε_k 代入 $x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$，有

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^{n+2}+(\varepsilon_k+1)^{2n+1} &= \varepsilon_k^{n+2}+(-\varepsilon_k^2)^{2n+1} = \varepsilon_k^{n+2}-\varepsilon_k^{4n+2}\\ &= \varepsilon_k^{n+2}(1-\varepsilon_k^{3n}) = 0,\ k=1, 2,\end{aligned}$$

因此

$$x-\varepsilon_k \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1},\ k=1, 2.$$

又因为 $(x-\varepsilon_1, x-\varepsilon_2)=1$，所以 $(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2) \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$，即

$$x^2 + x + 1 \mid x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}.$$

注　(1) 本题可理解为在一般数域 F 上 $x^2+x+1 \mid x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$，由于多项式的整除性不随数域的扩大而改变，因此可以在复数域 **C** 中讨论多项式的整除关系.

(2) n 次单位根

① 多项式 x^n-1 的根称为 n 次单位根. 由于 $(x^n-1,\ nx^{n-1})=1$, 故多项式 x^n-1 无重根. 利用复数的开方运算可知, x^n-1 的 n 个 n 次单位根为

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1.$$

② 设 ε 是一个 n 次单位根,且任一 n 次单位根都可以表示成 ε^k 的形式,其中 k 是整数,则称 ε 为一个本原 n 次单位根. 如 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ 是一个本原 n 次单位根,且 n 个 n 次单位根是 $1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \cdots,\ \varepsilon^{n-1}$.

证法 2 对 n 用数学归纳法

当 $n=0$ 时,显然结论成立.

假设当 $n=k$ 时,结论成立,即 $x^2+x+1\mid x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}$. 当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}&=x^{k+3}+(x+1)^2(x+1)^{2k+1}\\&=x^{k+3}+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}\\&=x[x^{k+2}+(x+1)^{2k+1}]+(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1},\end{aligned}$$

所以 $x^2+x+1\mid x^{k+3}+(x+1)^{2k+3}$, 即当 $n=k+1$ 时结论成立,命题得证.

例 1.1.5 设 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1\left|\ \sum\limits_{i=0}^{n-1}x^if_{i+1}(x^{n+1})\right.$. 证明:$x-1\mid f_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

证明 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$,即 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的 n 个根 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n$ 是不等于 1 的 $n+1$ 次单位根,其中

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n+1},\ \varepsilon_k^{n+1}=1(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

由题设可知, $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n$ 是 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}x^if_{i+1}(x^{n+1})$ 的根,于是

$$\begin{cases}f_1(1)+\varepsilon_1f_2(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-1}f_n(1)=0,\\f_1(1)+\varepsilon_2f_2(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-1}f_n(1)=0,\\\qquad\vdots\\f_1(1)+\varepsilon_nf_2(1)+\cdots+\varepsilon_n^{n-1}f_n(1)=0,\end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&\varepsilon_1&\varepsilon_1^2&\cdots&\varepsilon_1^{n-1}\\1&\varepsilon_2&\varepsilon_2^2&\cdots&\varepsilon_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&\varepsilon_n&\varepsilon_n^2&\cdots&\varepsilon_n^{n-1}\end{vmatrix}\neq0,$$

所以 $f_i(1)=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,即 $x-1\mid f_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

例 1.1.6 证明: $x^m-1\mid x^n-1\Leftrightarrow m\mid n$, 其中,$m,\ n$ 是非负整数.

证法 1 $(\Leftarrow)$ 设 $m\mid n$,则存在自然数 q,使得 $n=mq$, 于是

$x^n-1=x^{mq}-1=(x^m)^q-1=(x^m-1)(x^{m(q-1)}+x^{m(q-2)}+\cdots+x^m+1)$,

从而 $x^m-1\mid x^n-1$.

($\Rightarrow$)设 $n=mq+r$,其中 $0\leqslant r<m$, 则

$$x^n-1=x^{mq+r}-1=(x^{mq}-1)x^r+(x^r-1),$$

由充分性的证明,可知 $x^m-1\mid x^{mq}-1$,又 $x^m-1\mid x^n-1$,故 $x^m-1\mid x^r-1$,因此 $r=0$, 即

$$m\mid n.$$

证法 2 ($\Leftarrow$) 设 $\varepsilon_k(k=0,1,\cdots,m-1)$ 是 x^m-1 的所有 m 次单位根,则 $\varepsilon_k^m=1$. 由于 $m\mid n$,故存在自然数 q,使得 $n=mq$, 从而

$$\varepsilon_k^n=(\varepsilon_k^m)^q=1(k=0,1,\cdots,m-1),$$

即 x^m-1 的所有根均为 x^n-1 的根,故 $x^m-1\mid x^n-1$.

($\Rightarrow$) 设 ε 为任一 m 次单位根,由于 $x^m-1\mid x^n-1$,故 ε 也为 x^n-1 的根,有 $\varepsilon^n=1$. 设 $n=mq+r$,其中 $0\leqslant r<m$,则

$$\varepsilon^n=\varepsilon^{mq+r}=\varepsilon^r=1.$$

由于 ε 为任一 m 次单位根,故 $r=0$, 即 $m|n$.

3. 利用因式分解唯一性定理

由因式分解唯一性定理,设

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),\ g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

这里 k_i, $l_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是非负整数, $p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是两两不等的首项系数为 1 的不可约多项式,则 $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow k_i\leqslant l_i(i=1,2,\cdots,s)$.

例 1.1.7 设 $f(x)$, $g(x)\in F[x]$, m 是任意的正整数. 证明: $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow f^m(x)\mid g^m(x)$.

证明 ($\Rightarrow$) 由于 $f(x)\mid g(x)$,故存在 $h(x)\in F[x]$,使得 $g(x)=f(x)h(x)$, 从而

$$g^m(x)=f^m(x)h^m(x),$$

因此 $f^m(x)|g^m(x)$.

($\Leftarrow$) 设 $f(x)$, $g(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),\ g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

其中 k_i, $l_i(i=1,2,\cdots,s)$ 是非负整数, $p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式,则

$$f^m(x)=a^m p_1^{mk_1}(x)p_2^{mk_2}(x)\cdots p_s^{mk_s}(x),\ g^m(x)=b^m p_1^{ml_1}(x)p_2^{ml_2}(x)\cdots p_s^{ml_s}(x).$$

由于 $f^m(x)\mid g^m(x)$,故 $mk_i\leqslant ml_i$,即 $k_i\leqslant l_i(i=1,2,\cdots,s)$,因此 $f(x)\mid g(x)$.

4. 利用乘法公式

利用这种方法证明问题的关键在于熟悉有关的乘法公式,因为公式本身就蕴涵着整除的意义,其中常用的公式有

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1}),$$
$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+\cdots-xa^{n-2}+a^{n-1})(n\text{ 为奇数}).$$

例 1.1.8 证明: $x^9+x^8+\cdots+x+1\mid x^{9\,999}+x^{8\,888}+\cdots+x^{1\,111}+1$.

证明 设 $g(x)=x^9+x^8+\cdots+x+1$, $f(x)=x^{9\,999}+x^{8\,888}+\cdots+x^{1\,111}+1$, 由于

$x^{10}-1=(x-1)g(x)$,故 $g(x)\mid x^{10}-1$. 又因为

$$\begin{aligned}f(x)&=(x^{9\,999}-x^9)+(x^{8\,888}-x^8)+\cdots+(x^{1\,111}-x)+g(x)\\&=x^9(x^{9\,990}-1)+x^8(x^{8\,880}-1)+\cdots+x(x^{1\,110}-1)+g(x),\end{aligned}$$

且由例 1.1.6 有

$$x^{10}-1\mid x^{iii0}-1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9,$$

所以 $g(x)\mid x^{iii0}-1$,从而 $g(x)\mid x^i(x^{iii0}-1)$,即 $g(x)\mid f(x)$.

例 1.1.9 设 $f(x)=(x+1)^{2n}+2x(x+1)^{2n-1}+\cdots+(2x)^n(x+1)^n$. 证明:

$$x^{n+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}.$$

证明 由于

$$\begin{aligned}(x-1)f(x)&=(x-1)[(x+1)^n+2x(x+1)^{n-1}+\cdots+(2x)^n](x+1)^n\\&=-[(x+1)-2x][(x+1)^n+2x(x+1)^{n-1}+\cdots+(2x)^n](x+1)^n\\&=-[(x+1)^{n+1}-(2x)^{n+1}](x+1)^n,\end{aligned}$$

故 $(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}=2^{n+1}x^{n+1}(x+1)^n$,即 $x^{n+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{2n+1}$.

5. 利用不可约多项式的性质

设 $p(x)$是数域 F 上的不可约多项式,则对 $\forall f(x)\in F[x]$,必有$(p(x),\ f(x))=1$ 或$p(x)\mid f(x)$.

例 1.1.10 设 $p(x),\ f(x)\in\mathbf{Q}[x]$, $p(x)$ 在$\mathbf{Q}$上不可约,且 $p(x)$ 与 $f(x)$ 有一个公共复根. 证明:$p(x)\mid f(x)$.

证明 由于 $p(x)$ 不可约,故$(p(x),\ f(x))=1$ 或 $p(x)\mid f(x)$. 设$(p(x),\ f(x))=1$,则存在 $u(x),\ v(x)\in\mathbf{Q}[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)p(x)=1.$$

令 α 是 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的公共复根,则 $u(\alpha)f(\alpha)+v(\alpha)p(\alpha)=1$,矛盾,故 $p(x)\mid f(x)$.

1.2 最大公因式

一、最大公因式的定义及性质

1. 定义

设 $f(x),\ g(x)\in F[x]$. 如果 $d(x)\in F[x]$ 满足

(1) $d(x)\mid f(x),\ d(x)\mid g(x)$;

(2) $f(x),\ g(x)$的任一公因式都是 $d(x)$的因式,

则称 $d(x)$为 $f(x),\ g(x)$的一个最大公因式.

注 ① 若 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,则 $cd(x)$也是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式,其中 $c\in F,\ c\neq 0$.

② 若 $f(x),\ g(x)$不全为零,则 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式总是非零多项式,且它们之间只有常数因子的差别. 这时用$(f(x),\ g(x))$表示 $f(x)$与 $g(x)$首项系数为 1 的最大公因式,则

$(f(x), g(x))$是唯一确定的.

2. 性质

(1) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$,若 $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, 则

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x)).$$

这是用辗转相除法求最大公因式的根据.

(2) 设 $f(x), g(x) \in F[x]$,若 $F[x]$ 中多项式 $d(x)$ 是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式,则存在 $u(x), v(x) \in F[x]$, 使得

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x).$$

注 ① 这里 $u(x), v(x)$ 不唯一. 事实上,若 $u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)$,则对任一 $h(x) \in F[x]$,令 $u_1(x) = u(x) + h(x)g(x)$, $v_1(x) = v(x) - h(x)f(x)$, 则有

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = d(x).$$

② 设 $f(x), g(x), d(x) \in F[x]$,且 $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$,则 $d(x)$ 不一定是 $f(x), g(x)$ 的最大公因式.

③ 设 $f(x), g(x), d(x) \in F[x]$, $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$,且

$$d(x) \mid f(x),\ d(x) \mid g(x),$$

$d(x)$的首项系数为1,则 $d(x) = (f(x), g(x))$.

(3) 设 $f(x), g(x)$ 不全为零,且

$$(f(x), g(x)) = d(x),\ f(x) = d(x)f_1(x),\ g(x) = d(x)g_1(x),$$

则 $(f_1(x), g_1(x)) = 1$.

证明 因为存在 $u(x), v(x)$,使得

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) = d(x)[u(x)f_1(x) + v(x)g_1(x)].$$

又 $d(x) \neq 0$,从而 $u(x)f_1(x) + v(x)g_1(x) = 1$,即$(f_1(x), g_1(x)) = 1$.

(4) $(f(x)h(x), g(x)h(x)) = (f(x), g(x))h(x)$, 其中 $h(x)$的首项系数为1.

(5) 最大公因式不因数域的扩大而改变.

二、最大公因式的计算与证明

1. 利用辗转相除法

设 $f(x), g(x) \in F[x]$, $g(x) \neq 0$,且有 $q_i(x), r_i(x) \in F[x]$, 使得

$$\begin{gathered} f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \\ g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\ \vdots \\ r_{s-1}(x) = r_s(x)q_{s+1}(x) + 0, \end{gathered}$$

则 $r_s(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

注 ① 对于给定具体系数的两个多项式,求其最大公因式一般利用辗转相除法.

② 在用辗转相除法求最大公因式时,为了避免复杂的分数计算,对被除式或除式(包括中

间过程)乘以适当的非零数(公分母)去掉各分母,这样做不会改变最大公因式.

例 1.2.1 设 $f(x)=x^{2n}+2x^{n+1}-23x^n+x^2-22x+90$, $g(x)=x^n+x-6(n>2)$. 求$(f(x), g(x))$.

解 用 $g(x)$ 去除 $f(x)$,可得 $f(x)=g(x)(x^n+x-17)+(x-12)$,由于 $g(12)\neq 0$,故

$$(f(x), g(x))=(g(x), x-12)=1.$$

2. 利用最大公因式的定义

例 1.2.2 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$是次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式,且

$$x^4+x^2+1 \mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3).$$

求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

解 由于 $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,设 x^4+x^2+1 的根分别为 ε_1, ε_2, ω_1, ω_2,其中

$$\varepsilon_1=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \varepsilon_2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\text{且 } \varepsilon_1^3=\varepsilon_2^3=1,$$

$$\omega_1=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \omega_2=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\text{且 } \omega_1^3=\omega_2^3=-1.$$

因为 $x^4+x^2+1 \mid f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$,所以 ε_1, ε_2, ω_1, ω_2 为 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$ 的根,则

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon_1 f_2(1)=0, \\ f_1(1)+\varepsilon_2 f_2(1)=0, \end{cases} \begin{cases} f_1(-1)-\omega_1 f_2(-1)=0, \\ f_1(-1)-\omega_2 f_2(-1)=0, \end{cases}$$

解得

$$f_1(1)=f_2(1)=0,\ f_1(-1)=f_2(-1)=0,$$

于是

$$x-1 \mid f_1(x),\ x+1 \mid f_1(x) \text{ 且 } x-1 \mid f_2(x),\ x+1 \mid f_2(x),$$

又 $(x-1, x+1)=1$,从而$(x-1)(x+1) \mid f_1(x)$, $(x-1)(x+1) \mid f_2(x)$,即

$$x^2-1 \mid (f_1(x), f_2(x)).$$

设 $(f_1(x), f_2(x))=d(x)$,若$\partial^\circ d(x)=3$,由于 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是次数不超过 3 的首项系数为 1 的多项式,故 $f_1(x)=f_2(x)$,这与 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 互异矛盾. 因此 $\partial^\circ d(x)=2$,且

$$(f_1(x), f_2(x))=x^2-1.$$

例 1.2.3 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $F[x]$ 中不全为零的多项式,$(f(x), g(x))=1$. 求

$$\varphi(x)=(x^3-1)f(x)+(x^3-x^2+x-1)g(x)$$

与

$$\phi(x)=(x^2-1)f(x)+(x^2-x)g(x)$$

的最大公因式.

解 由于

$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)]=(x-1)\varphi_1(x),$$
$$\phi(x)=(x-1)[(x+1)f(x)+xg(x)]=(x-1)\phi_1(x),$$

故 $(\varphi(x),\ \phi(x))=(x-1)(\varphi_1(x),\ \phi_1(x))$,以下求$(\varphi_1(x),\ \phi_1(x))$.

设 $(\varphi_1(x),\ \phi_1(x))=d(x)$,则 $d(x)\mid[\varphi_1(x)-x\phi_1(x)]$,即 $d(x)\mid[f(x)+g(x)]$, 又

$$\phi_1(x)=(x+1)f(x)+xg(x)=x(f(x)+g(x))+f(x),\text{且 } d(x)\mid\phi_1(x),$$

则 $d(x)\mid f(x)$,再由 $d(x)\mid[f(x)+g(x)]$, 可知 $d(x)\mid g(x)$,这表明 $d(x)$ 是 $f(x)$, $g(x)$ 的公因式,然而$(f(x),\ g(x))=1$,故 $d(x)=1$, 因此

$$(\varphi(x),\ \phi(x))=x-1.$$

例 1.2.4 设 m, n 为正整数. 证明:$(x^m-1,\ x^n-1)=x^d-1\Leftrightarrow(m,\ n)=d$.

证明 ($\Rightarrow$) 由于$(x^m-1,\ x^n-1)=x^d-1$,故 $x^d-1\mid x^m-1$, $x^d-1\mid x^n-1$, 于是

$$d\mid m,\ d\mid n.$$

设 $t\mid m$, $t\mid n$,则 $x^t-1\mid x^m-1$, $x^t-1\mid x^n-1$,从而 $x^t-1\mid x^d-1$,故 $t\mid d$. 因此$(m,\ n)=d$.

($\Leftarrow$)设 $(m,\ n)=d$,则 $x^d-1\mid x^m-1$, $x^d-1\mid x^n-1$. 下证 x^d-1 是 x^m-1 与 x^n-1 的最大公因式. 设 $h(x)$ 是 x^m-1 与 x^n-1 的任一公因式,且首项系数为 1,于是

$$h(x)\mid x^m-1,\ h(x)\mid x^n-1.$$

由于 x^m-1 无重根,故 $h(x)$也无重根,可设

$$h(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s),$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j)$,且任一 a_i 都是x^m-1 与 x^n-1 的公共根,故

$$a_i^m=1,\text{且 } a_i^n=1.$$

由于 $(m,\ n)=d$, 故存在 u, $v\in\mathbf{Z}$, 使得 $um+vn=d$. 于是

$$a_i^d=a_i^{um+vn}=a_i^{um}a_i^{vn}=1,$$

这表明 $h(x)$ 的任一复根 a_i 都是x^d-1 的根,故 $x-a_i\mid x^d-1$. 因为 $x-a_1$, $x-a_2$, …, $x-a_s$ 两两互素,所以

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_s)\mid x^d-1,$$

即 $h(x)\mid x^d-1$,因此$(x^m-1,\ x^n-1)=x^d-1$.

3. 利用因式分解唯一性定理

由因式分解唯一性定理,设

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),\ g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

这里 k_i, $l_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 是非负整数,$p_i(x)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 是两两不等的首项系数为 1 的不可约多项式,则$(f(x),\ g(x))=p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x)$,其中 $m_i=\min\{k_i,\ l_i\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$.

例 1.2.5 设 $f(x)$, $g(x)$不全为零. 证明:对于任意的正整数 n,有

$$(f(x),\ g(x))^n=(f^n(x),\ g^n(x)).$$

证法 1 设 $f(x)$, $g(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x),\ g(x)=bp_1^{l_1}(x)p_2^{l_2}(x)\cdots p_s^{l_s}(x),$$

其中 k_i, l_i 是非负整数,$p_i(x)(i=1,2,\cdots,s)$ 是互不相同的首项系数为 1 的不可约多项式. 令 $m_i=\min\{k_i,l_i\}(i=1,2,\cdots,s)$,则

$$(f(x),g(x))=p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x),$$
$$f^n(x)=a^np_1^{nk_1}(x)p_2^{nk_2}(x)\cdots p_s^{nk_s}(x),\ g^n(x)=b^np_1^{nl_1}(x)p_2^{nl_2}(x)\cdots p_s^{nl_s}(x),$$

那么 $nm_i=\min\{nk_i,nl_i\}(i=1,2,\cdots,s)$,因此

$$\begin{aligned}(f^n(x),g^n(x))&=p_1^{nm_1}(x)p_2^{nm_2}(x)\cdots p_s^{nm_s}(x)\\&=(p_1^{m_1}(x)p_2^{m_2}(x)\cdots p_s^{m_s}(x))^n\\&=(f(x),g(x))^n.\end{aligned}$$

证法 2 利用最大公因式的定义令 $d(x)=(f(x),g(x))$,下证 $d^n(x)=(f^n(x),g^n(x))$.

一方面,由于 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$,故

$$f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x),\text{且}(f_1(x),g_1(x))=1,$$

于是 $f^n(x)=d^n(x)f_1^n(x)$, $g^n(x)=d^n(x)g_1^n(x)$,即 $d^n(x)\mid f^n(x)$, $d^n(x)\mid g^n(x)$.

另一方面,因为 $(f_1(x),g_1(x))=1$,所以 $(f_1^n(x),g_1^n(x))=1$,故存在 $u(x)$, $v(x)$,使得

$$u(x)f_1^n(x)+v(x)g_1^n(x)=1,$$

等式两边同乘以 $d^n(x)$,有

$$u(x)f^n(x)+v(x)g^n(x)=d^n(x),$$

对 $\forall h(x)$, $h(x)\mid f^n(x)$, $h(x)\mid g^n(x)$,可知 $h(x)\mid d^n(x)$,故 $d^n(x)=(f^n(x),g^n(x))$.

4. 利用等式两边互相整除

例 1.2.6 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$, $g_1(x)=cf(x)+dg(x)$,且 $ad-bc\neq 0$. 证明:

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

证法 1 令 $d(x)=(f(x),g(x))$, $d_1(x)=(f_1(x),g_1(x))$,下证 $d(x)=d_1(x)$.

一方面,由于 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$,且

$$f_1(x)=af(x)+bg(x),\ g_1(x)=cf(x)+dg(x),$$

故 $d(x)\mid f_1(x)$, $d(x)\mid g_1(x)$,从而 $d(x)\mid d_1(x)$.

另一方面,因为 $ad-bc\neq 0$,所以

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}(df_1(x)-bg_1(x)),\ g(x)=\frac{1}{ad-bc}(-cf_1(x)+ag_1(x)),$$

于是 $d_1(x)\mid f(x)$, $d_1(x)\mid g(x)$,从而 $d_1(x)\mid d(x)$.

综上可知,$d(x)$与 $d_1(x)$可以互相整除,且首项系数都是 1,因此 $d(x)=d_1(x)$,即

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

证法 2 利用最大公因式的定义

令 $d(x)=(f(x),\ g(x))$,下证 $d(x)=(f_1(x),\ g_1(x))$.

由于 $d(x)\mid f(x)$, $d(x)\mid g(x)$,故 $d(x)\mid f_1(x)$, $d(x)\mid g_1(x)$. 设 $h(x)$ 是 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 的任一公因式. 因为

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}(df_1(x)-bg_1(x)),\ g(x)=\frac{1}{ad-bc}(-cf_1(x)+ag_1(x)),$$

所以 $h(x)\mid f(x)$, $h(x)\mid g(x)$,从而 $h(x)\mid d(x)$,故 $d(x)$是 $f_1(x)$, $g_1(x)$的最大公因式. 又 $d(x)$的首项系数为1,因此

$$(f(x),\ g(x))=(f_1(x),\ g_1(x)).$$

注 ① 当 $a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=\pm1$ 时,有$(f(x),\ g(x))=(f(x),\ f(x)\pm g(x))$. ② 当 $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=-1$ 时,有$(f(x),\ g(x))=(f(x)+g(x),\ f(x)-g(x))$.

1.3 多项式的互素

一、互素多项式的定义及性质

1. 定义

设 $f(x),\ g(x)\in F[x]$,若 $f(x),\ g(x)$ 的最大公因式为非零常数,或$(f(x),\ g(x))=1$,则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

2. 性质

(1) 设 $f(x),\ g(x)\in F[x]$,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x),\ v(x)\in F[x]$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

(2) 设 $f(x)\mid h(x)$, $g(x)\mid h(x)$,且$(f(x),\ g(x))=1$,则 $f(x)g(x)\mid h(x)$.

(3) 设 $(f(x),\ g(x))=1$, $(f(x),\ h(x))=1$,则$(f(x),\ g(x)h(x))=1$.

(4) 设 $f(x)\mid g(x)h(x)$,且$(f(x),\ g(x))=1$,则 $f(x)\mid h(x)$.

(5) 多项式的互素性不随系数域的扩大而改变.

二、互素多项式的证明

1. 利用互素的充要条件

$$(f(x),\ g(x))=1\Leftrightarrow u(x)f(x)+v(x)g(x)=1(u(x),\ v(x)\in F[x]).$$

例 1.3.1 证明:$(f(x),\ g(x))=1$ 的充要条件是$(f(x)+g(x),\ f(x)g(x))=1$.

证明 ($\Rightarrow$) 由于$(f(x),\ g(x))=1$,故存在 $u(x)$, $v(x)$,使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$,从而

$$u(x)(f(x)+g(x))+(v(x)-u(x))g(x)=1,$$
$$v(x)(f(x)+g(x))+(u(x)-v(x))f(x)=1,$$

因此