现代数学基础

49

实分析与泛函分析（续论）

（下册）

匡继昌

高等教育出版社

现代数学基础

49

实分析与泛函分析（续论）

（下册）

匡继昌

SHIFENXI YU FANHAN FENXI

高等教育出版社·北京

内容提要

本书取名为《实分析与泛函分析（续论）》，有两个目的：一是作为与作者的《实分析与泛函分析》（面向21世纪课程教材，高等教育出版社，2002年）相配套的教学参考书。按该教材原有的章节次序，每节分为三部分：（一）"内容提要"。包括本书引用该教材中的定义、定理等，它实际上是对相关概念和定理的系统归纳和小结；（二）"教材分析与理解"。对教材中的重点、难点以及基本概念的理解和来龙去脉作了细致的分析，补充了教材中省略的证明细节；（三）"习题分析"。对教材中所有的习题均给出了详细的分析与解答，某些章节还适当补充了若干习题和进一步的结果和问题。二是对于原教材受教学时数的限制而不能深究的重要的基本理论和基本的思想方法技巧及其应用，作了深入的分析和推广。因此，本书既源于教材，又高于教材而自成体系，即本书以独特的方式系统地总结了该门课程的基本理论、基本的思想方法和技巧，是作者多年使用该教材的教学实践和研究的结晶，其中一部分内容已陆续在专业期刊上发表而受到广泛好评，因而本书实际上是以作者的教材为基础写成的一部学术专著。本书的读者对象与教材相同，即可作为大学理工科各专业，特别是数学或信息专业本科生和研究生的教学用书，也可供担任该课程教学的教师和广大科技人员参考，本书对于广大自学者更是难得的良师益友。

图书在版编目（CIP）数据

实分析与泛函分析：续论．下册／匡继昌编著．— 北京：高等教育出版社，2015.1

ISBN 978-7-04-041285-7

Ⅰ．①实… Ⅱ．①匡… Ⅲ．①实分析②泛函分析 Ⅳ．① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 237805 号

策划编辑 赵天夫　　责任编辑 李　鹏　　封面设计 赵　阳　　版式设计 王　莹
责任校对 刁丽丽　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm × 1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	22.25	版　　次	2015年1月第1版
字　　数	420千字	印　　次	2015年1月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　41285-00

前言

作者的《实分析与泛函分析》作为面向 21 世纪课程教材于 2002 年由高等教育出版社出版后, 受到广泛好评。本书已列入国家精品课程资源网。多年来读者在网上都是给予五星级评价, 称赞这是“罕见的一本好书”、“难得的好教材”。花家地网站在经典教材和学习心得栏目中, 指出该书是继夏道行的教材后最好的实分析教材, 比 Royden 的要好 (注: 指美国著名数学家 H. L. Royden 的著名教材 “Real Analysis”, 见参考文献 [37])。作者使用该教材的教学视频一直在许多网站出售。

由于该门课程是公认的大学数学专业最难教难学的课程, 而教好学好这门课程对于提高大学数学教育的质量和水平却至关重要。要想教好和学好这门课程, 除了要有好的教材外, 还需要与之相配套的教学参考书。因此, 作者在 1996 年《实分析引论》出版后就写了一本与之配套的实分析教学参考书。在此基础上进一步修改补充才于 2004 年写出这本《实分析与泛函分析 (续论)》初稿。在征求了专家的意见后, 又经过 9 年的反复修改和打印校稿。因此, 从 1996 年算起, 到 2013 年打印稿校完, 用了 17 年才完成这本《实分析与泛函分析 (续论)》。

俗话说, “十年磨一剑”。作者为什么要花这么大的代价, 用 17 年来磨出这一 “剑”? 除了读者的鼓励和支持外, 主要基于两方面的考虑:

第一, 我们在教材建设中, 如何处理日益庞大的教学内容和教学课时限制之间的矛盾, 是长期以来一直都没有解决好的难题。于是作者就专门写了这本《实分析与泛函分析 (续论)》。它有两个目的。一是作为与该教材相配套的教学参考书。按该教材原有的章节次序, 对教材中的重点难点以及基本概念的理解和来龙去脉作了细致的分析, 对省略的证明和所有的习题均给出了详细的分析与解答。其二是对于原教材受教学时数的限制而不能深究的重要的基本理论和基本的方法技巧及其应用, 作了深入的分析和推广。因此, 本书不是通常意义上的教学参考书, 它源于教材, 又高于教材而自成体系, 即本书以独特的方式系统地总结了该门课程的基本理论、基本的思想方法和技巧, 是作者多年使用该教材的

教学实践和研究的结晶, 其中一部分内容已写成论文陆续在专业期刊上发表而受到广泛好评, 因而本书实际上是以作者的教材为基础写成的一部学术专著。

华罗庚教授曾指出, 学习数学需要 “有一个由薄到厚, 再由厚到薄的过程” (见《数学通报》1979 年第 1 期)。按作者的理解, 两头的 “薄” 是指教材, 中间的 “厚” 是指教学参考书和相关的数学资料等。这是因为, (一) “教材” 要受教学课时的严格限制, 不仅对所选的教学内容有严格限制, 在内容的叙述上也要力求简明扼要。篇幅过大, 反而使初学者抓不住要领。(二) “教材” 对基本理论的叙述要遵循前后逻辑次序。(三) “教材” 所配习题的数量和难度都要适中, 不能过多过难。(四) 受教学课时的限制, “教材” 对基本理论重点放在讲清 “是什么”, 无法充分讲清 “为什么” 和基本理论的应用。然而, 学生要真正理解消化教材, 还要了解这些知识的前后联系和来龙去脉, 了解基本的证明思路和细节, 不仅要知其然, 而且要知其所以然。有些问题还要适当打破教材的前后逻辑次序才能作透彻的分析, 等等, 这些任务, 就落在教师的课堂教学和与教材相配套的教学参考书上。这就是为什么同一本教材由不同的教师使用会产生不同的教学效果。学生通过听课和做作业, 还要看大量的参考书和文献, 然后再经过由 “厚” 到 “薄” 的思考过程, 才能做到 “由此及彼、由表及里、去粗取精、去伪存真”。在 “薄 - 厚 - 薄” 的过程中要经过学生自己独立思考慢慢消化, 才能算是真懂。至于要深入理解, 则需要一个漫长的过程。由此可见, “教材” 与 “教参” 各起着不可相互替代而又缺一不可的作用。然而, 我国重视与中小学数学教材相配套教参的建设, 却长期忽视与大学数学教材相配套教参的建设。

第二是基于作者的教学经历和当前大学数学教育的现状。根据作者半个多世纪的教学经验, “实函与泛函” 之所以难教难学, 最大的拦路虎就是该门课程本身的抽象概念多, 从而带来的逻辑推理多, 此外, 还与思维习惯没有实现两个转化有关。这两个转化包括: 一是基本的概念从直观的描述向严格的数学符号语言转化, 二是逻辑推理从微积分中的 ε-δ 语言向集合语言转化。因此, 像 “实函与泛函” 这门历来难教难学的课程, 没有教师的讲解, 光看 “教材” 是很难自学成功的。作者读大学时, 由于没有学过这门课程, 参加工作后, 曾多次自学都没有成功。自学时总觉得似懂非懂。直到 1983 年, 作者去北京进修了一年, 听了这门课, 才打下一个好的基础。北京进修回校后, 作者就在这个基础上一直专门教这门课 (包括本科生和研究生的学位课程) 到退休, 从使用不同现成教材到自编讲义, 在教学实践中对讲义多年修改后, 于 1996 年出版《实分析引论》, 之后再继续边教边改, 到 2002 年取名《实分析与泛函分析》由高等教育出版社出版, 已经历了长达十多年的不断修订过程, 使得本书至今仍保持独一无二的特色, 其中 “实分析” 部分包括了传统的 “实变函数论” 和 “测度论” 两门课程; 大学扩招以来, 许多学校都取消了 “泛函分析” 课程, 还大幅度压缩了 “实变函数” 课

程的教学时数, 加上教与学都没有严格的要求, 使得学生很难真正理解该课程的基本内容。而作者使用该教材的教学视频之所以长期热销, 读者看重的也是作者对教材的分析与理解。正如读者评价: “非常好的书, 配合视频学习, 效果加倍。” 而本书则是作者使用该教材的教学视频的进一步的深化和发展, 期望能对大学理工科各专业, 特别是数学与信息专业的师生, 尤其是初学者和自学者有所帮助。

为了读者阅读方便和节省篇幅, 本书所指的教材, 若没有特别说明, 均指作者的上述《实分析与泛函分析》, 所使用的数学符号、章节名称、引用的公式和参考文献的编号均与教材相同。所补充的定义、定理、数学公式和新文献编号都与教材相应章节相衔接。本书中 $\log x$ 表示以 e 为底的对数, 与 $\ln x$ 通用。教材第 9 章的绪论是为了照顾不同学校不同课时的需要, 本书从内容的完整性出发将本章的大部分内容能并入前面各章的尽量分别并入了前面相应的各个章节内。每节分为三部分: **(一) “内容提要”**。包括本书引用教材中的定义定理等, 它实际上是相关知识的系统归纳和小结, 使读者不查阅原教材也能方便使用本书; **(二) “教材分析与理解”**。它反映了作者在教学过程中对教材重点难点的理解和分析, 知识的前后联系和来龙去脉的分析, 相关知识的重要应用, 教材中略去的证明细节等, 还增加了在现行教材中不易找到又十分重要的内容, 如 Cantor 集, 在现行教材中往往仅作为一般的例子一带而过, 在作者的教材中则对 Cantor 集的构造、性质和初步应用作了详细的介绍和分析, 在本书中则进一步分析了该集合的本质和若干重要的推广, 它是 “分形” 和构造各种重要反例的基础, 本书就总结了 28 个这种反例, 其中有许多在微积分教学中是无法讲清的问题。**(三) “习题分析”**。对教材的所有习题都给出了详细的分析和解答。有的章节还适当补充了若干习题或进一步的结果和问题。现在学生往往过多地依赖于各种题解。但不少学生反映其中有许多题解还看不懂, 是因为在微积分教学中, 大量的是计算, 有现成的公式可套, 真正逻辑推理问题并不多, 而在 “实分析与泛函分析” 的教学中, 大量的是逻辑推理问题, 它的前提就是要求对基本概念的理解和掌握, 这恰好是初学者所欠缺的。为了帮助初学者克服这些困难, 我们在 “绪论” 中力图揭示该课程与微积分、拓扑学, 以及工程技术之间的深刻联系, 并利用 “实分析与泛函分析” 这种强有力的工具回过头去处理微积分中的困难问题。

作者感谢高等教育出版社出版本书, 感谢李蕊、赵天夫、李华英、李鹏等编辑的热情帮助和为本书的出版所付出的辛勤劳动。作者感谢湖南师范大学出版基金的资助。作者还要感谢家人长期的理解和支持。

匡继昌

《实分析与泛函分析》序言

多年来我先后在四所大学从事数学教学和科研工作, 在与同事们和研究生们广泛接触的过程中, 获得一个总的印象, 凡是在经典分析、泛函分析、概率理论、微分方程及计算数学诸分支领域能胜任且愉快地进行教学和科研工作的, 几乎无例外地都具有坚实的 "实分析" (又名 "实变函数论") 基础。我也曾不止一次地讲授过实变函数论课程, 发现大多数学生学习这门课程成绩的高低, 往往反映出他们的数学思维能力素质的高低。

后来读了一点数学史, 才理解上述现象是很自然的。事实上, 实分析的大部分理论模式及其构造方法是在微积分发明 200 年后, 通过人们不断对数学基础问题的反思, 才逐步发展成型的。实分析自然是一门极精致的数学, 具有很高的抽象度, 所以按照现代认知心理学和知识建构的规律来看, 初学者需要不断提升自己的抽象思维素质, 才能将实分析的理论模式在头脑中完成相应的 "建构过程"。这样说来, 初学者即使感到实分析中的概念和理论不易很快领悟或精通, 也就不足为怪了。

20 世纪 50 年代至 60 年代, 国内曾广泛采用俄罗斯数学家那汤松的《实变函数论》作教材, 我也用过这本教材, 认为它的习题编选得很好, 颇能培育人的分析解题能力。只可惜教材分量太重, 要占用学生的时间精力也太多。20 世纪 70 年代以来, 国内各地已出版了多种属于实分析范围的教材, 大多数比较精简扼要, 能符合实际教学需要。

1996 年, 我见到了湖南师范大学匡继昌教授的《实分析引论》, 发现它居然以很小的篇幅讲述了实变函数论中所有基本重要的题材, 确实是一大特色。《实分析引论》具有这一特色的原因是, 它自始至终采用了现代数学著作中经常使用的 "半形式主义" 的表述法。这种表述法, 使得数学论述及推理, 表现得简捷、明晰而严谨, 而又不致于像 "纯形式主义的表述法" (如同数理逻辑中的纯符号形式表示法) 那样会令初学者感到索然无味或者望而生畏。当然,《实分析引

论》之所以能做到篇幅小而内容多, 也和作者运用了数学方法论中的 “RMI 原则” (关系映射反演原则) 有关, 因为这一方法原则的使用能使得传统的题材内容得到化繁为简、化难为易的处理。

该书各章都包含一些精选的例题和习题, 大多数例题都富于启发性。这对学生们特别是自学者无疑是极有帮助的。

该书的另一特色是, 它还介绍了国内外的一些新成果。例如, 第 6 章 “微分论” 中, 给出了 Hardy-Littlewood 球形极大函数的概念及其基本性质, 还提到了高维球域上的 Lebesgue 微分定理不能扩充到任意域上的情形等问题, 这些都是十分引人入胜的题材。

现代国外数学教育工作者已经提出了 “让学生们学会数学地思维” 作为教育目标的主张。我是很赞成这种见解的, 并认为一本好的实分析教材应该有助于学生去学会 “数学地思维”, 我相信这本简明教材对学生们学到 “数学地思维” 的能力和习惯必能起到积极作用。

上述《实分析引论》于 1996 年出版后, 作者又根据新的教学实践和教育部教学改革立项的要求, 将该书全部改写后, 增加了泛函分析的基础部分, 因而更名为《实分析与泛函分析》。实际上这构成了一部 “现代分析” 基础的完整教材。此教材的主要特点是, 始终贯彻使用 “集论与映射” 观点处理一切题材, 又利用了调和分析、逼近论等新成果与新技巧处理重要定理的论证方法, 从而实现了 “教改” 中所提出的 “化繁为简、化难为易、以简御繁” 的目标。

本书论述了现代 “实分析与泛函分析” 中一系列基本而重要的成果。理论分析与技术处理均极精致, 且能深入浅出, 足见作者是具有精博的学术素养与卓越的专业水平的。而且作者的实际教学经验, 促使本教材留有较大的弹性空间, 使得师生和自学者都有选择余地。据我所知, 本书通过不同层次的教学实践表明, 它确实是一部改革力度大的优秀教材, 故我乐愿期望这本新教材的出版能在更大范围内对推动教材革新起到积极作用。

大连理工大学数学科学研究所名誉所长, 博士生导师,
《数学研究与评论》主编,《逼近论及其应用》(ATA) 主编:
徐利治 2002–03–26 于北京寓所

目录

第 6 章

微分论

§1 覆盖与极大函数

一、内容提要

(一) Vitali 型覆盖引理

定理 1.1 设 $E \subset R^n$, 球族 $\{B_\alpha\}$ 覆盖 E, 即 $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \supset E$, 且球族 $\{B_\alpha\}$ 的直径 $\{d(B_\alpha)\}$ 有界, 则 $\{B_\alpha\}$ 中存在互不相交的可数球列 $\{B_k\}$, 使得

$$\mu^*(E) \leqslant c\sum_{k=1}^{\infty} v(B_k), \tag{1.1}$$

式中常数 $c = c(n)$ 与 R^n 的维数有关, 例如可取 $c = 5^n$, $v(B_k)$ 表示球 B_k 的体积.

注 定理 1.1 中的集 E 不要求是可测的. 若进一步要求 E 可测, 就有以下推论:

推论 1 设 $E \subset R^n$, $\mu(E) < \infty$, 球族 $\{B_\alpha\}$ 覆盖 E, 即 $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha \supset E$, 则 $\forall\varepsilon > 0$, $\{B_\alpha\}$ 中存在有限个互不相交的球 $\{B_k\}_{k=1}^m$, 使得

$$5^{-n}\mu(E) - \varepsilon \leqslant \sum_{k=1}^{m} v(B_k).$$

定义 1.1 设 $E \subset R^n$, 方体族 $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 覆盖 E, 即 $\bigcup_{\alpha\in I} Q_\alpha \supset E$, 若 $\forall x \in E, \forall\delta > 0$, 存在 Q_α, 使得 $x \in Q_\alpha$, 且 $v(Q_\alpha) < \delta$, 则称 $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E **在 Vitali**

意义下的覆盖, 简称为 E **的 V 覆盖**. (它表明 E 中的每一点 x 都属于 $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中某个体积任意小的方体.)

例 1.1 设 $E=[0,1], Q=\{r_k\}$ 是 E 中有理数集. 令 $B_{k,n}=\left[r_k-\dfrac{1}{n}, r_k+\dfrac{1}{n}\right]$, 则 $\{B_{k,n}\}$ 就是 E 的一个 V 覆盖. 事实上, $\forall x\in E, \forall\delta>0$, 由 Q 在实数集 R^1 中的稠密性, 存在 $r_k\in Q$, 只要取 $n>\dfrac{2}{\delta}$, 就有 $x\in\left[r_k-\dfrac{1}{n}, r_k+\dfrac{1}{n}\right]=B_{k,n}$, 且 $\mu(B_{k,n})=\dfrac{2}{n}<\delta$.

定理 1.2 设 $E\subset R^n$, $\mu^*(E)<\infty$, 方体族 $\{Q_\alpha\}$ 是 E 的 V 覆盖, 则 $\forall\varepsilon>0, \{Q_\alpha\}$ 中存在有限个互不相交的方体 $\{Q_k\}_{k=1}^m$, 使得

$$\mu^*\left(E-\bigcup_{k=1}^m Q_k\right)<\varepsilon, \tag{1.3}$$

从而

$$\mu\left(E-\bigcup_{k=1}^\infty Q_k\right)=0. \tag{1.4}$$

注 从 (1.4) 不能推出 $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^\infty Q_k$. 但从该定理的证明中可看出, $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^\infty(5Q_k)$, 式中 $Q_k^*=5Q_k$ 表示与 Q_k 同心而其边长为 Q_k 的 5 倍的方体.

推论 2 设 E 是 R^n 中有界可测集, 方体族 $\{Q_\alpha\}$ 是 E 的 V 覆盖, 则 $\forall\varepsilon>0, \{Q_\alpha\}$ 中存在有限个内部不相交的方体 $\{Q_k\}_{k=1}^m$, 使得

$$\sum_{k=1}^\infty\mu(Q_k)-\varepsilon\leqslant\mu(E)\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^m(E\cap Q_k)\right)+\varepsilon. \tag{1.22}$$

(二) 极大函数

定义 1.2 设 $f\in L_{\rm loc}(R^n)$ (即 f 在 R^n 的每个有界可测子集上都可积, 称 f 是 R^n 上**局部可积函数**), $B(x,r)$ 是以 x 为中心、r 为半径的球, 则

$$M(f,x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy \tag{1.14}$$

称为 f 的 **Hardy-Littlewood (球形) 极大函数**, 简称为 **HL 极大函数**.

注 (1.14) 中的球 $B(x,r)$ 可换成其边平行于坐标轴的方体 Q, 只要求 $x\in Q$.

定理 1.3 设 $f\in L_{\rm loc}(R^n)$, 则

(1) $M(f)$ 是下半连续函数, 即 $\forall\alpha>0, \{M(f)>\alpha\}$ 是开集, 特别, $M(f)$ 是可测函数;

(2) 若 $f \in L^p(R^n), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, 则 $M(f,x)$, *a.e.* 有限;

(3) 若 $f \in L(R^n)$, 则 $\forall \alpha > 0$, 有

$$\mu\{M(f) > \alpha\} \leqslant \frac{c}{\alpha} \|f\|_1, \tag{1.15}$$

式中常数 $c = c(n)$ 与 R^n 的维数有关, (1.15) 称为 $M(f)$ 满足弱 (1,1) 型, 记为

$$M(f) \in W(1,1);$$

(4) 若 $f \in L^p(R^n), 1 < p \leqslant \infty$, 则 $M(f) \in L^p(R^n)$, 且存在与 n, p 有关的常数 $c = c(n,p)$, 使得

$$\|M(f)\|_p \leqslant c \|f\|_p, \tag{1.16}$$

(1.16) 称为 $M(f)$ 满足 (强) (p,p) 型, 记为 $M(f) \in (p,p)$, 式中

$$\|f\|_p = \left(\int_{R^n} |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

二、教材分析与理解

(一) 对覆盖理论的理解

1. 我们先补充有广泛应用的另一个覆盖定理:

定理 1.4 (Sierpinski 覆盖定理) 设区间 $D_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha] \subset R^1$, $\mu(D_\alpha) = b_\alpha - a_\alpha > 0$ $(\alpha \in I)$, 且 $L(D_\alpha) = \{a_\alpha : D_\alpha = [a_\alpha, b_\beta], \alpha \in I\}$ 表示区间 D_α 的左端点集, 并满足 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} L(D_\alpha) \supset E$, E 是有界集, 则 $\forall \delta > 0$, $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 中存在有限个互不相交的区间 $\{D_k\}_{k=1}^n$, 使得

$$\mu^*\left(E - \bigcup_{k=1}^n D_k\right) < \delta.$$

证 记 $A_k = \left\{D_\alpha : \mu(D_\alpha) > \dfrac{1}{k}\right\}$, $E_k = L(A_k) \cap E$, 则 $\{E_k\}$ 递增收敛于 E, 由第 3 章 §2 习题 2.4, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu^*(E_k) = \mu^*(E)$, 即 $\forall \delta > 0$, $\exists k_0$, 使得 $\forall k \geqslant k_0$, 有 $0 < \mu^*(E) - \mu^*(E_k) < \delta/2$. 限制 $0 < \delta < \mu^*(E)$. 记 $a_1 = \inf\{E_k\}$, $b_1 = \sup\{E_k\}$, 则 $a_1 < b_1$. 记 $l = b_1 - a_1$, $\eta = \delta/(2kl+2)$, 则 E_k 与 $[a_1, a_1+\eta)$ 的交点 x_1 就是 A_k 中某个区间 D_1 的左端点. 若 $x_1 + \mu(E_1) \geqslant b_1$, 则 $n = 1$; 否则, $E_k \cap [x_1 + \mu(E_1), b_1]$ 非空. 将该集的下确界记为 a_2, 则 E_k 与 $[a_2, a_2+\eta)$ 的交点 x_2 就是 A_k 中某个区间 D_2 的左端点. $D_1 \cap D_2 = \varnothing$. 如此过程只能进行有限次, 得到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 其中 x_j 就是 A_k 中某个区间 D_j 的左端点, $1 \leqslant j \leqslant n$. 这些 $\{D_j\}$ 互不相交. 令

$D=\bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j, F=\bigcup\limits_{j=1}^{n}[a_j,x_j]$, $B=D\cup F$, 则 $E_k\subset D\cup F=B$. 因为

$$\frac{n-1}{k}<\sum_{j=1}^{n-1}\mu(D_j)<l,$$

故 $n<kl+1\Rightarrow 2n\eta=\dfrac{2n\delta}{2kl+2}<\delta$. 从而 $\mu(F)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j-a_j)\leqslant n\eta<\dfrac{\delta}{2}$. 因为 $E_k\subset E\cap B$, 故 $\mu^*(E_k)\leqslant\mu^*(E\cap B)$, 从而

$$\mu^*(E)-\mu^*(E\cap B)\leqslant\mu^*(E)-\mu^*(E_k)<\delta/2.$$

又由 B 是可测集, 由第 3 章 §2 定理 2.14, 它满足卡氏条件:

$$\mu^*(E)=\mu^*(E\cap B)+\mu^*(E-B),$$

从而有

$$\mu^*(E-B)=\mu^*(E)-\mu^*(E\cap B)<\delta/2.$$

又因为 $E-D\subset(E-B)\cup F$, 故

$$\mu^*(E-D)\leqslant\mu^*(E-B)+\mu^*(F)<(\delta/2)+(\delta/2)=\delta.$$

证毕.

2. 为了分散教学难点, 教材将覆盖理论分三处讲. 本书为了系统归纳小结, 将教材第 2 章 §4 和第 9 章 §7 有关欧氏空间 R^n 和距离空间 (X,d) 中各种开集的覆盖和分解集中放在本书的第 2 章 §4. 本节定理 1.2 (V 覆盖) 只适用于 (L) 测度, 这是因为将一个方体同心地扩大某一倍数 (例如 5 倍), 其结果仅是按比例增大它的 Lebesgue 测度, 但对于一般测度, 这种关系不再成立. 我们下面要补充的 Besicovitch 覆盖则与测度无关, 因而可适用于抽象测度.

定义 1.3 设 K 是 R^n 中其边平行于坐标轴的方体族, 以 x 为中心的方体记为 Q_x. 若存在常数 c, 使得每个 $x\in R^n$, 都至多属于方体族 K 中 c 个方体, 则称 K 有**有界重叠**. 于是,

$$K\text{ 有有界重叠 }\Leftrightarrow\sum_{Q\in K}\varphi_Q(x)\leqslant c, x\in R^n.$$

引理 1.5 设 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是以 $\{x_k\}$ 为中心的方体列, 使得当 $j<k$ 时, 存在 $x_k\notin Q_j$, 而且 $\mu(Q_k)\leqslant 2\mu(Q_j)$. 则 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 有有界重叠且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_{Q_k}\leqslant c$ 中的常数 c 可选择得只依赖于 n.

证 我们只考虑 $n=2$ 的情形. 因为 $n>2$ 的情形是类似的. 设 $Q_{k_m}(m=1,2,\cdots)$ 是 Q_k 中包含原点并且中心在第一象限的那些方体, h_m 表示 Q_{k_m} 的边长, 则 Q_{k_1} 至少覆盖区域

$$A=\left\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}h_1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}h_1\right\}.$$

于是, 所有 Q_{k_m} 的中心都不能在集 $E=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant h_1,0\leqslant y\leqslant h_1\}$ 的外部. 否则, 就会存在某个 m, 使得 $h_m>2h_1\Rightarrow\mu(Q_{k_m})>4\mu(Q_{k_1})$, 但此与假设相矛盾. 所以, 每个 Q_{k_m} $(m\geqslant 2)$ 的中心必位于 A,B,C,D 中的某一个, 其中

$$B=\left\{(x,y):0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}h_1,\frac{1}{2}h_1\leqslant y\leqslant h_1\right\};$$

$$C=\left\{(x,y):\frac{1}{2}h_1\leqslant x\leqslant h_1,\frac{1}{2}h_1\leqslant y\leqslant h_1\right\};$$

$$D=\left\{(x,y):\frac{1}{2}h_1\leqslant x\leqslant h_1,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}h_1\right\}.$$

$Q_{k_m}(m\geqslant 2)$ 的中心不能在 A 内, 否则就会与 $Q_{k_m}(m\geqslant 2)$ 的中心不在 Q_{k_1} 内的假设相矛盾. 若 $Q_{k_m}(m\geqslant 2)$ 的中心在 B 内, 则由于 Q_{k_m} 包含 0, 它必覆盖 B. 因此, 至多存在一个 Q_{k_m}, 它的中心在 B 内. 类似的讨论对于 C,D 也成立. 将相同的论证用于每个象限, 就可看出在 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ 中至多有 16 个方体包含原点. 再通过平移, 该结论就对平面上任意点都成立. 证毕.

定理 1.6 (Besicovitch 覆盖引理) 设 E 是 R^n 中有界子集, K 是覆盖 E 的方体族, 使得对于 $\forall x\in E,K$ 都含有以 x 为中心的方体 Q_x, 则存在 E 中的点列 $\{x_k\}$, 使得

(1) $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}Q_{x_k}$;

(2) $\{Q_{x_k}\}$ 有有界重叠.

此外, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi_{Q_{x_k}}\leqslant c$ 中的常数 c 可选择得只依赖于 n.

证 设

$$\alpha_1=\sup\{\mu(Q_x):x\in E\}.$$

若 $\alpha_1=\infty$, 则存在任意大的 Q_x. 又由于 E 有界, 所以只要选取包含 E 的一个方体 Q_x 就够了. 若 $\alpha_1<\infty$, 则记 $E_1=E$, 且选择 $x_1\in E_1$, 使得 $\mu(Q_{x_1})>\alpha_1/2$. 令

$$E_2=E_1-Q_{x_1},\quad \alpha_2=\sup\{\mu(Q_x):x\in E_2\}.$$

若 $\alpha_2\neq 0$, 则取 $x_2\in E_2$, 使得 $\mu(Q_{x_2})>\alpha_2/2$. 继续这样做下去, 到第 k 步即得

$$E_k=E_{k-1}-Q_{x_{k-1}}=E-\bigcup_{j=1}^{k-1}Q_{x_j},$$

$\alpha_k = \sup\{\mu(Q_x) : x \in E_k\}$, 取 $x_k \in E_k$, 使得 $\mu(Q_{x_k}) > \alpha_k/2$. 只要 $\alpha_k > 0$, 这个过程就可继续下去.

因为 $x_k \in E_k$, 则对于所有的 $j \leqslant k$, 有 $x_k \in E_j$. 所以, 当 $j \leqslant k$ 时, 有

$$\mu(Q_{x_k}) \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha_j < 2\mu(Q_{x_j}).$$

因此, $\{Q_{x_k}\}$ 满足引理 1.5 的假设, 从而有有界重叠. 剩下只要证 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{x_k}$.

若某个 $\alpha_{k_0} = 0$, 则 E_{k_0} 为空集, 而且 $E \subset \bigcup_{j=1}^{k_0-1} Q_{x_j}$. 若 $\forall \alpha_k \neq 0$, 那么就有无限多个 Q_{x_k}. 因为 α_k 递减且 $\alpha_k/2 < \mu(Q_{x_k}) \leqslant \alpha_k$. 因此, 只有两种可能: (1) $\mu(Q_{x_k}) \to 0$; (2) $\exists \delta > 0$, 使得 $\forall k \in N, \mu(Q_{x_k}) \geqslant \delta$. 但 (2) 不可能发生, 否则, E 就会无界. 这是因为 $x_k \in E$ 而且 $\forall j \leqslant k, x_k \notin Q_{x_j}$. 因此, 有 $\mu(Q_{x_k}) \to 0$, 或等价地, 有 $\alpha_k \to 0$. 若 $x \in E - \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{x_k}$, 则 $\forall k \in N \Rightarrow x \in E_k \Rightarrow \mu(Q_x) \leqslant \alpha_k$. 这意味着 $\mu(Q_x) = 0$. 这就证明了 $E - \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{x_k}$ 实际上是空集. 故 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{x_k}$, 于是定理得证.

我们还可以将 Besicovitch 覆盖引理写成另一种形式. 为此, 我们先定义:

定义 1.4 设 $E \subset R^n, F$ 是 R^n 中非空闭球族, 若 $\forall x \in E$, 以 x 为中心的球 $B(x) \in F$, 则称 F 是 E 的 **Besicovitch 覆盖**, 简称为 E 的 **B 覆盖**.

定理 1.7 (Besicovitch 覆盖引理) 设 E 是 R^n 中有界子集, F 是 E 的 B 覆盖, 则存在 E 中的点列 $\{x_k\}$ 和 F 中相应的球列 $B_k = B(x_k, r_k)$, 使得

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

此外, 存在仅与维数 n 有关的正整数 m, 使得 $\{B_k\}$ 可以由至多 m 个子族 $\mathcal{B}_1 = \{B_{k_1}\}, \mathcal{B}_2 = \{B_{k_2}\}, \cdots, \mathcal{B}_m = \{B_{k_m}\}$ 组成, 而每个子族 $\mathcal{B}_j = \{B_{k_j}\}$ 中的球是互不相交的.

3. 推论 2 的证明 由 E 可测, $\forall \varepsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得

$$\mu(G) < \mu(E) + \varepsilon.$$

设 M 是 $\{Q_\alpha\}$ 中所有含于 G 内的方体族, 我们可以从 M 中选取可数个内部不相交的方体列, 记为 $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$. 于是,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(Q_k) \leqslant \mu(G) < \mu(E) + \varepsilon. \tag{1.23}$$

由此得出 (1.22) 中的左边不等式.

再由 (1.23) 可知, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(Q_k)$ 是收敛的无穷级数, 从而它的余项趋于 0, 即对于上述 $\varepsilon>0, \exists m\in N$, 使得

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu(Q_k)<\varepsilon. \tag{1.24}$$

又由

$$\begin{aligned}E&=E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\cap Q_k)\\&=\left(\bigcup_{k=1}^{m}(E\cap Q_k)\right)\cup\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty}(E\cap Q_k)\right),\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\mu(E)&\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}(E\cap Q_k)\right)+\mu\left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty}(E\cap Q_k)\right)\\&\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}(E\cap Q_k)\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu(E\cap Q_k)\\&\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}(E\cap Q_k)\right)+\sum_{k=m+1}^{\infty}\mu(Q_k)\\&\leqslant\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m}(E\cap Q_k)\right)+\varepsilon.\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.8 (Wiener 引理) 设 $\Gamma=\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 R^n 中开球族, 令 $G=\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha$. 若 $\mu(G)>c$, 则 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中必存在有限个互不相交的 $\{G_k\}_{k=1}^m$, 使得

$$\sum_{k=1}^{m}\mu(G_k)>3^{-n}c.$$

证 若 $\mu(G)>c$, 则存在紧集 $K\subset G$, 使得 $\mu(K)>c$. 由有限覆盖定理, 在 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 中必存在有限个开球 $\{G_k\}_{k=1}^m$, 使得

$$K\subset\bigcup_{k=1}^{m}G_k.$$

设 B_1 是 $\{G_k\}_{k=1}^m$ 中最大的 (即选择 B_1 有最大半径), B_2 是 $\{G_k\}_{k=1}^m-B_1$ 中最大的, 这时 B_2 与 B_1 互不相交. B_3 是 $\{G_k\}_{k=1}^m-\{B_1,B_2\}$ 中最大的, 这时 B_3

与 B_2, B_1 互不相交. 如此下去, 直到将所有 $\{G_k\}_{k=1}^m$ 选完. 若 B_i 不是 $\{B_j\}$ 中的某一个, 于是存在 j, 使得 $G_i \cap B_j \neq \varnothing$. 若 j 是具有该性质的最小数, 则 G_i 的半径不会超过 B_j 的半径. 从而 $G_i \subset B_j^*$, 式中 $B_j^* = 3B_j$ 是与 B_j 同心、其半径是 B_j 半径 3 倍的开球. 故 $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^m B_j^*$, 从而

$$c < \mu(K) \leqslant \sum_{j=1}^m \mu(B_j^*) = 3^n \sum_{j=1}^m \mu(B_j).$$

证毕.

(二) HL 极大函数在本质上是对 $|f(y)|$ 在球 $B(x,r)$ 上取平均值后再取上确界, 因而 $M(f)$ 的性质比 f 要好. 例如, 只要 $f \in L_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $M(f)$ 就是下半连续的, 即对于 $\forall \alpha > 0$, $\{M(f) > \alpha\}$ 总是开集. 又从 (1.14) 可得

$$|f(x)| \leqslant M(f,x), \quad a.e.\ x. \tag{1.19}$$

另一方面, (1.16) 表明, $M(f,x)$ 又不比函数 f 本身大得太多, 所以, 可用极大函数的估计来代替函数本身的估计. 事实证明, 这种替代往往是十分有效的. 而且由定理 1.3 中所反映出 $M(f)$ 的性质表明 $L^1(R^n)$ 与 $L^p(R^n)$ $(1 < p < \infty)$ 有本质区别. HL 极大函数 $M(f)$ 也称为 HL 极大算子, 它是现代分析中最基本最重要的算子之一.

定理 1.3 指出, $M(f) \in W(1,1)$, 但 $M(f) \notin (1,1)$, 即当 $f \in L^1(R^n)$, f 有紧支集且不恒等于 0 时, $M(f) \notin L^1(R^n)$. 事实上, 有

定理 1.9 设 E 是 R^n 中有界可测集, 则存在仅依赖于 E 的正常数 C_1, C_2, γ, 使得

$$C_1 |x|^{-n} \leqslant M(\varphi_E, x) \leqslant C_2 |x|^{-n}, \quad \forall x \in R^n : |x| > \gamma, \tag{1.25}$$

式中 φ_E 是 E 的特征函数.

证 记 $B = B(x,r)$. 由定义 1.2, 有

$$M(\varphi_E, x) = \sup_{r>0} \frac{\mu(E \cap B)}{\mu(B)}.$$

因为 E 是 R^n 中有界可测集, 所以, 存在球 B_0, 使得 $E \subset B_0$. 设 d 是由 B_0 中的点到原点的最大距离. 固定 $x \in R^n$, 使得 $|x| \geqslant \dfrac{2d}{\sqrt{n}} = \gamma$. 又设 $B = B(x,r)$ 是中心在 x 且包含 E 的最小球, 则

$$M(\varphi_E, x) \geqslant \frac{\mu(E \cap B)}{\mu(B)} = \frac{\mu(E)}{\mu(B)} = \frac{C_1}{|x|^n}.$$

可类似地证明 (1.25) 右边的不等式.