全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

线性代数

第二版

◎主　编　王希云

高等教育出版社

全国教育科学"十一五"规划课题研

线性代数

Xianxing Daishu

第二版

主　编　王希云

高等教育出版社·北京

内容简介

本书系统地介绍了线性代数的基本概念和理论。全书共 8 章，包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、方阵的特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换及用 MATLAB 做线性代数等内容。书末汇编了 2003 年以来全国硕士研究生入学统一考试中线性代数的部分试题。

本书内容丰富，阐述深入浅出，简明扼要，可作为高等学校非数学类专业线性代数的教材、教学参考书及考研复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／王希云主编. --2 版. --北京:高等教育出版社,2015.2

ISBN 978-7-04-040589-7

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 180628 号

策划编辑	于丽娜	责任编辑	于丽娜	特约编辑	张　卫	封面设计	张申申
版式设计	余　杨	插图绘制	尹文军	责任校对	胡美萍	责任印制	田　甜

出版发行	高等教育出版社	网　址	http://www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787mm×960mm　1/16		
印　张	21	版　次	2010 年 1 月第 1 版
字　数	380 千字		2015 年 2 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　次	2015 年 2 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	29.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40589-00

第二版前言

线性代数是一门重要的基础课,在自然科学、工程技术和经济管理科学等诸多领域有着重要的应用。根据线性代数课程的教学基本要求,编者结合多年来从事线性代数课程教学的体会,在第一版的基础上,编写了《线性代数(第二版)》,其目的是为普通高等学校非数学类专业学生提供一本可读性较强、适用面较宽的线性代数教材,培养学生的自主学习能力和思考能力,提高其实践动手能力。

本书第二版的基本内容及教材体系框架和章节安排基本与第一版一致,保留了原书的风格,主要在概念的引入、定理的证明、习题和实验方面做了较大幅度的修改。第二版的修订特色如下:

1. 修改了部分概念的引入方式。在概念引入、结论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与几何结合的思想,这样可以使学生从几何背景中理解代数概念的来龙去脉,并获得解决问题的启示。如向量线性相关的定义、特征值、特征向量概念的引入,尽量从几何上说明抽象的概念。

2. 丰富了课后习题。为便于学生自学,将课后习题分为三个层次。每节后为基本题,是学生初学完本节内容就能完成的题目。每章的总练习题又分为 A、B 两个层次。总练习题(A)主要是本章学习结束后学生必须掌握的习题,而总练习题(B)主要是为学有余力的学生准备的,其中的题目综合性较强,有部分为历年研究生入学考试试题。

3. 增加了用 MATLAB 解线性代数一章,采取边介绍 MATLAB、边学习、边实践的思路,逐步引导学生学习使用 MATLAB,并用 MATLAB 求解线性代数中的问题。

4. 补充了 2010 ~ 2014 年全国硕士研究生入学统一考试线性代数试题。

第二版前 6 章由王希云修订、编写,第 7 章由黄丽修订、编写,第 8 章由王欣洁与陈培军编写,习题的配置和历年考研试题汇编由赵文彬编写。在第二版的编写过程中,太原科技大学数学系的教师麻晓波、崔学英、王银珠等仔细阅读了全书并提出了许多建设性的建议,在此感谢他们的大力支持。本书第二版也是

在高等教育出版社于丽娜编辑的促进与支持下才顺利与读者见面，在此致以深切的谢意。由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正。

编者

2014 年 6 月

第一版前言

线性代数是大学数学教学中的一门重要基础课程，是学习和掌握其他数学学科及科学技术的基础，其主要内容是讲述线性空间理论和矩阵理论，主要处理线性关系问题。随着数学学科的发展，线性代数的含义也在不断扩大，它的理论不仅渗透到了数学的许多分支中，而且在理论物理、理论化学、工程技术、国民经济、生物技术、航天、航海等领域中都有着广泛的应用。

本书以教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会关于工科类与经济管理类本科数学基础课程教学基本要求为依据，结合编者多年的教学经验编写而成。在编写过程中，借鉴了国内外许多优秀教材的思想和处理方法，内容上突出精选够用，表达上力求通俗易懂。根据非数学类专业学生的需要，以线性变换作为贯穿全书的主线，使线性方法得以充分体现，同时有利于学生理解线性代数课程的基本概念和基本原理。在概念的引入、理论分析和例题演算等环节上尽可能多地反映代数与实际结合的思想，这样可以使学生从实际背景中理解代数概念的来龙去脉，并获得解决问题的启示。本书重视例题和习题的设计与选配，除了在每一节后选配巩固课程内容的基本习题外，每章结束后还选配了总练习题。

全书共分 7 章，各章内容紧密联系又相对独立。全书系统地介绍了行列式、矩阵、向量空间、线性方程组的基础知识，论述了方阵的特征值与特征向量、方阵的对角化和实二次型的化简等问题，讨论了线性空间与线性变换的相关内容。

本书的各章内容编排与现行的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲相一致，其中前 6 章内容覆盖了数学一、数学二、数学三关于线性代数的考试要求。

鉴于信息技术的飞速发展及软件的广泛应用，本书在附录 1 中对 MATLAB 作了简要介绍，为了提高学生数值计算和应用计算机的能力，通过实际计算加深对所学内容的理解，各章(除第 7 章外)都给出了用 MATLAB 进行数学实验的习题；为了使有志于攻读硕士研究生的读者能在学习过程中作适当准备，且使读者了解线性代数课程的基本要求和重点，本书在每章末给出了该章的基本要求，并与考研大纲的基本要求相一致，同时在附录 2 中汇编了 2003 年以来硕士研究生

入学考试中线性代数的部分试题。

本书由王希云任主编,负责审阅全文。前6章由王希云编写,附录及数学实验由王欣洁编写,第7章由董安强编写。

本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)与经济管理学科线性代数课程的教材,也可供报考硕士研究生的人员及工程技术人员参考。考虑到各类专业与各类人员的不同要求,对书中某些章节,不同专业可根据不同情况予以取舍(标注*的部分可舍去)。

本书在编写过程中得到了高等教育出版社、太原科技大学有关领导及太原科技大学印刷厂同志们的大力支持,太原科技大学数学系的老师们对本书提出了许多建设性的意见。编者在此向他们表示衷心的感谢!

由于时间仓促,加之编者水平有限,书中内容、体系、结构不当之处在所难免,恳请读者和使用本教材的老师不吝赐教。

编 者

2009年6月

目录

第 1 章

行　列　式

行列式理论是线性代数的重要组成部分,是研究线性方程组的重要工具.它不仅在数学中有广泛的应用,而且在物理学、力学等其他学科的研究中也经常用到.特别是在本门课程中,它是研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章首先以二元和三元线性方程组的求解为背景引进行列式的概念,然后介绍行列式的一些基本性质和计算方法,最后给出基于行列式求解线性方程组的方法——克拉默(Cramer)法则.

1.1　n 阶行列式的定义

线性代数起源于线性方程组,线性方程组的研究产生出行列式的概念.所谓线性方程组是指未知数的最高次数是一次的方程组.为此我们回顾初等数学中二、三元线性方程组的求解过程,从而引入二、三阶行列式的概念,并在此基础上给出 n 阶行列式的定义.

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,用消元法求解,得其解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

在式(1.2)中,其各自的分母由方程组(1.1)中未知数的系数构成,把这 4 个系数按它们在方程组(1.1)中的位置,排成两行两列(横排称行,竖排称列)的数表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

引入记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为二阶行列式的**元素**. 元素 a_{ij}的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列，常称 a_{ij}是行列式的第 i 行第 j 列的元素.

上述二阶行列式的定义，可用**对角线法则**来记忆. 如图 1.1，把 a_{11}到 a_{22}的实连线称为**主对角线**，a_{12}到 a_{21}的虚连线称为**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

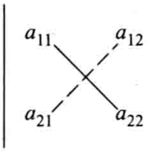

图 1.1

利用二阶行列式的概念，式(1.2)的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1.2)可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

上式为二元线性方程组(1.1)的求解公式，其中 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式，称 D 为方程组的**系数行列式**. 分子 D_1、D_2 则分别是将系数行列式的第一列和第二列换成方程组(1.1)右端的常数列所得到的行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2=3 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-4)=5\neq 0$，所以方程组有解，而

$$D_1=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3-(-2)=5,D_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-6=-5$$

因此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=-1$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

类似地,为求解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\tag{1.4}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

可以证明,当 $D\neq0$ 时,方程组(1.4)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}\tag{1.5}$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

D 称为**三阶行列式**,等式右端称为三阶行列式的展开式.

上述三阶行列式的定义可按图 1.2 的**对角线法则**来记忆.其遵循的规律为:三条实线看作是平行于主对角线的连线,实线上连结的三个元素的乘积取正号;三条虚线看作是平行于副对角线的连线,虚线上连结的三个元素的乘积取负号;然后取这六项之和即为三阶行列式 D 的值.类似可用对角线法则求 D_1,D_2,D_3 的值.由方程组(1.4)的系数构成的行列式 D 称为方程组(1.4)的**系数行列式**.

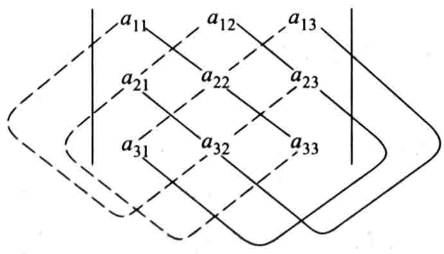

图 1.2

例 1.2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 \qquad\quad +x_3=1\\ x_1-4x_2\ -x_3=0\\ -x_1+8x_2+3x_3=0\end{cases}$$

解 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&-1\\-1&8&3\end{vmatrix}$$

按照对角线法则,得

$$D=-24+8-4+16=-4$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-4&-1\\0&8&3\end{vmatrix}=-4,D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&-1\\-1&0&3\end{vmatrix}=-2,D_3=\begin{vmatrix}2&0&1\\1&-4&0\\-1&8&0\end{vmatrix}=4$$

因此方程组的解为 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=1,x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{1}{2},x_3=\dfrac{D_3}{D}=-1.$

在实际问题中,往往会遇到未知数多于三个的线性方程组.那么对于四元及四元以上的线性方程组是否有类似的结果?其相应的行列式如何定义?

思考:仿照三阶行列式的定义(对角线法则)及解的形式(1.5),求下列四元线性方程组的解,并验证解的正确性:

$$\begin{cases}x_1+3x_2 \qquad\quad +x_4=1\\ 3x_1 \qquad\quad +x_3+4x_4=0\\ x_1\ +x_2+2x_3\ +x_4=1\\ \qquad x_2\ +x_3 \qquad =0\end{cases}$$

读者可以发现,利用对角线法则计算四阶行列式并按照(1.5)的形式得到的解并不是上述方程组的解.此例说明,要使四元线性方程组的解仍保持(1.5)的形式,则四阶行列式不能利用对角线法则求.对角线法则仅适用于二阶与三阶行列式,为了研究四阶及四阶以上行列式的定义,下面先介绍排列的有关知识,然后分析三阶行列式的结构,在此基础上引入 n 阶行列式的定义.

1.1.3 全排列及其逆序数

把 n 个不同的元素按一定顺序排成一列,称为这 n 个元素的一个**全排列**(简称排列).n 个不同元素的所有排列的种数,通常用 P_n 表示.

例 1.3 写出元素 1,2,3 的所有全排列.

解 三个元素 1,2,3 的全排列的种数 $P_3=3!=6$,其全排列依次为 123,132,213,231,312,321.

在上面的全排列中,除了 123 是按自然顺序排列以外,其他排列中都可找到一个大数排在一个小数前面的情况,这样的排列顺序与自然顺序相反.例如,在排列 132 中,3 排在 2 的前面;在排列 321 中,2 排在 1 的前面,3 排在 1 和 2 的前面.一般地,在一个排列中,若一个大数排在一个小数之前,就称这两个数构成一个**逆序**.在一个排列里出现的逆序总数称为该排列的**逆序数**.逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.排列的奇偶性是定义 n 阶行列式的基础,为了方便,引进一个符号:如果 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 元排列,其逆序数记作 $\sigma(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

例 1.4 确定排列 4321 和 1324 以及 $n(n-1)\cdots 21$ 的奇偶性.

解 在排列 4321 中,2 在 1 之前构成一个逆序,3 在 1,2 之前构成两个逆序,4 在 1,2,3 之前构成三个逆序,此排列的逆序数 $\sigma(4321)=1+2+3=6$,所以排列 4321 是偶排列.

在排列 1324 中,3 在 2 之前构成一个逆序,此排列的逆序数 $\sigma(1324)=1$,所以排列 1324 是奇排列.

在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中,2 在 1 之前构成一个逆序,3 在 1,2 之前构成两个逆序,…,n 在 $n-1,\cdots,2,1$ 之前构成 $n-1$ 个逆序,所以

$$\sigma(n(n-1)\cdots 21)=1+2+\cdots+(n-1)=n(n-1)/2$$

当 $n=4k$ 或者 $n=4k+1$ 时,它是偶排列;而当 $n=4k+2$ 或者 $n=4k+3$ 时,它是奇排列,其中 k 为正整数.

在一个排列中,对调其中的两个数,而其他数字不动,就可得到一个新的排列.对排列所作的上述变换称为**对换**.**一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性**.在这里我们不证明这个结论,仅用例子说明它,如在例 1.4 中排列 4321 是偶排列,4 与 1 对换得排列 1324,它是奇排列.另外,关于奇排列和偶排列还有另一个重要结论:

n 个不同元素($n>1$)共有 $n!$ 种全排列,其中奇偶排列各占一半.

1.1.4 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义,先来研究三阶行列式的结构.

根据三阶行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.6}$$

容易看出:

(1) 三阶行列式的展开式共有 3!=6 项;

(2) (1.6)式右边的每一项都是三个元素的乘积,且这三个元素位于不同的行不同的列. 因此,(1.6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$. 这里第一个下标(行标)排成自然顺序 123,而第二个下标(列标)排成 $j_1j_2j_3$,它们是 1,2,3 三个数的某个排列. 这样的排列共有 3!=6 种,而对应(1.6)式右端恰含 6 项;

(3) 各项的正负号与列标的排列相对应:

带正号的三项列标排列是:123,231,312;带负号的三项列标排列是:132,213,321. 易知前三个排列都是偶排列,而后三个排列都是奇排列,因此各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$所带的正负号可以表示为$(-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)}$.

经以上分析可知,三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\sigma(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

仿此,可以把行列式推广到一般情形.

定义 1.1 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

其中 $a_{ij}(i, j=1,2,\cdots,n)$表示第 i 行第 j 列的元素,仍然规定横排为行,竖排为列. 作出表中位于不同行与不同列的 n 个数的乘积,并冠以正负号. 这种乘积的一般项可以写成如下形式

$$(-1)^{\sigma(j_1\, j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\, a_{2j_2}\cdots\, a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $j_1\, j_2\cdots j_n$是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,由于这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(1.7)的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1\, j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\, a_{2j_2}\cdots\, a_{nj_n}$$

称为 **n 阶行列式**,记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\sigma(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列求和.

n 阶行列式有时简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|_n$. 当 $n=1$ 时,一阶行列式只有一个元素,则认为 $|a_{11}|=a_{11}$,注意不要与数的绝对值混淆.

由行列式的定义可知,行列式是一个数,它等于位于不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. **如果行列式有一行元素全为零,则行列式等于零.**

思考:三阶行列式能否表示成下列形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2i_3} (-1)^{\sigma(i_1i_2i_3)} a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33}$$

事实上,利用对换的性质可证明 n 阶行列式也可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\sigma(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}\, a_{i_22}\cdots\, a_{i_nn}$$

例 1.5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 根据定义 1.1, D 共有 $4!=24$ 项. 然而,在这 24 项里,除了 $acfh$, $adeh$, $bdeg$, $bcfg$ 这四项外,其余项均含有零因子,因而等于零. 与上面 4 项对应的列标的排列依次是 1234,1324,4321,4231. 其中第一个和第三个是偶排列,第二个和第四个是奇排列. 因此