考研数学大纲配套系列用书推荐

高教版
2016

考研数学
复习教程（数学三适用）

主　编　王莉
副主编　方浩　姜浩　张新军

送精讲导学课程

登录官方微博 http://weibo.com/wl1966
或中国教育考试在线 http://www.eduexam.com.cn 分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

2016 KAOYAN SHUXUE
FUXI JIAOCHENG (SHUXUE SAN SHIYONG)

高教版
2016

考研数学
复习教程（数学三适用）

主　编　王莉
副主编　方浩　姜浩　张新军

送精讲导学课程

登录官方微博 http://weibo.com/wl1966
或中国教育考试在线 http://www.eduexam.com.cn 分享资源、课程和冲刺密卷

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

2016 考研数学复习教程(数学三适用)包括以下部分：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分试题的难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

2016 考研数学复习教程(数学三适用)适用于考研数学的数学三。

图书在版编目(CIP)数据

2016 考研数学复习教程/王莉主编. --北京：高等教育出版社，2014.9

数学三适用

ISBN 978-7-04-040549-1

Ⅰ.①2… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 183745 号

策划编辑 张耀明　　责任编辑 张耀明　　封面设计 王 洋　　版式设计 于 婕

责任校对 胡美萍　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	29	版　　次	2014 年 9 月第 1 版
字　　数	710 千字	印　　次	2014 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	53.00 元

物 料 号　40549-00

前　言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了**《考研数学复习教程》(包括数学一和数学二适用、数学三适用两本)《考研数学基础过关500题》《考研数学大纲配套1000题》**以及**《考研数学冲刺模拟5套卷》**等系列丛书。其中**《考研数学基础过关500题》**适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；**《考研数学复习教程》**与**《考研数学大纲配套1000题》**适宜于复习前期基础阶段和中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；**《考研数学冲刺模拟5套卷》**适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书**《考研数学复习教程(数学三适用)》**的结构及特点如下：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，不是"定义""定理"的简单罗列，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。在体系上也不同于一般教材，注重各部分内容的有机联系，普遍采用表格将相近的内容列在一起，便于读者类比把握。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分按照考研试卷"选择题""填空题""解答题"的题型顺序精选编排了适量的经典习题，其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题，难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的数学三。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。另外，吴振奎先生百忙之中审阅了书稿，刘舒强先生也提出了一些建设性意见，在此一并致谢！

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

编者
2014年8月于北京

阅读手记

数学不仅在各级教育中举足轻重，它也是各类统考中主要科目之一。

考研数学问题有其自身特点，它与通常在校学习数学时所遇的问题不尽相同，乍看熟悉但又陌生，这些问题往往是概括、总结、凝练了数学的精华，巧妙而不繁琐，深刻而不艰涩，处处蕴含凝聚着拟题专家的劳动和汗水。

倘若没有扎实的数学功底，没有经过恰当的训练，往往较难应付——有些题目你会觉得无从下手（正如数学竞赛，即便是小学竞赛问题，往往也会难住不少"大家"）。由此看来，参加考前训练是必须的，也是重要的。

现实告诉人们：老一辈考研专家已渐失魅力，这也是自然规律，历史的必然。当然这也是希望与未来所在，人们也期待新人的出现与成才。

王莉教授是全国年轻的数学考研辅导的希望，也是领军人物之一，颇受考研学子的爱戴。他的讲课更有特点：首先适应潮流，与考研试题更贴近，与年轻人鲜有"代沟"；再者是思路清晰、讲解细微、推理流畅，做到有分析、有过程、有总结、有练习。

本书正是他多年授课经验的积累与汇聚，也是他呕心沥血之所创、匠心立意之所在。

不同风格、不同思路、不同写法考研辅导书籍的出版，无疑给考研学子提供了更多的选择。

与传统"大家"的此类书籍不同，他的书中无哗众取宠的章节，例题乃至字句、内容更为贴近当下学生的水平，又不拘于此，读起来亲切、生动、易懂。更不似某些考研书十几年不修，始终一副老面孔。

本书的出版为考研图书市场吹来一股暖暖的春风，对广大考研学子来讲实乃一大幸事。

吴振奎

2014 年 8 月于天津

目 录

第一篇 微 积 分

第一章 函数、极限与连续 …… 1
§1.1 函数 …… 1
一、考核内容要点 …… 1
二、补充公式与结论 …… 5
三、典型问题与方法技巧 …… 5
1. 考查函数各种特性问题 …… 5
2. 函数复合问题 …… 6
§1.2 极限 …… 7
一、考核内容要点 …… 7
二、补充公式与结论 …… 11
三、典型问题与方法技巧 …… 12
1. 考查极限概念及性质问题 …… 12
2. 求极限问题 …… 13
3. 关于无穷小阶的问题 …… 24
§1.3 函数的连续性与间断点 …… 26
一、考核内容要点 …… 26
二、典型问题与方法技巧 …… 27
1. 判断函数 $f(x)$ 在某点 x_0 处连续与间断问题 …… 27
2. 利用闭区间上连续函数性质证明问题 …… 29
强化训练(一) …… 31
第二章 一元函数微分学 …… 35
§2.1 导数与微分 …… 35
一、考核内容要点 …… 35
二、补充公式与结论 …… 39
三、典型问题与方法技巧 …… 40
1. 考查导数、微分概念的问题 …… 40
2. 导数与微分的计算问题 …… 43
3. 求高阶导数问题 …… 46
4. 利用导数求平面曲线的切线方程、法线方程问题 …… 49
§2.2 微分中值定理 …… 51
一、考核内容要点 …… 51
二、典型问题与方法技巧 …… 53
1. 利用罗尔定理证明中值问题 …… 54
2. 利用拉格朗日中值定理证明中值问题 …… 57
3. 利用柯西中值定理证明中值问题 …… 59
4. 利用泰勒公式证明中值问题 …… 60
5. 综合题 …… 61
§2.3 导数应用 …… 63
一、考核内容要点 …… 63
二、典型问题与方法技巧 …… 66
1. 函数的单调性、单调区间及极值问题 …… 66
2. 函数曲线的凹凸区间、拐点及渐近线问题 …… 70
3. 方程实根(函数零点,两曲线交点)问题 …… 73
4. 不等式的证明问题 …… 74
5. 导数在经济中的应用问题 …… 77
强化训练(二) …… 78
第三章 一元函数积分学 …… 84
§3.1 不定积分 …… 84
一、考核内容要点 …… 84
二、典型问题与方法技巧 …… 89
1. 关于原函数与不定积分的基本概念性问题 …… 89
2. 不定积分的计算问题 …… 90
3. 综合题 …… 91
§3.2 定积分 …… 93
一、考核内容要点 …… 93
二、补充公式与结论 …… 96
三、典型问题与方法技巧 …… 97
1. 关于定积分概念及性质的问题 …… 97
2. 关于变限积分的问题 …… 99
3. 利用基本积分公式及积分法计算定积分 …… 101

4. 几种重要类型被积函数的积分 ········ 103
5. 定积分证明问题 ········ 105
6. 反常积分问题 ········ 107
§3.3 定积分应用 ········ 108
一、考核内容要点 ········ 108
二、典型问题与方法技巧 ········ 110
1. 求平面图形面积问题 ········ 110
2. 求旋转体的体积问题 ········ 111
强化训练(三) ········ 112
第四章 多元函数微分学 ········ 117
§4.1 多元函数的极限与连续、偏导数与全微分 ········ 117
一、考核内容要点 ········ 117
二、典型问题与方法技巧 ········ 119
1. 关于多元函数连续性、可导性及可微性问题 ········ 119
2. 求多元复合函数的偏导数或全微分问题 ········ 122
3. 求方程确定的隐函数的偏导数、全微分问题 ········ 125
§4.2 多元函数的极值与最值 ········ 127
一、考核内容要点 ········ 127
二、典型问题与方法技巧 ········ 128
1. 求多元函数无条件极值问题 ········ 128
2. 求多元函数条件极值问题 ········ 130
3. 求多元函数在闭区域上的最值问题 ········ 131
强化训练(四) ········ 132
第五章 二重积分 ········ 136
一、考核内容要点 ········ 136
二、典型问题与方法技巧 ········ 140
1. 交换积分次序问题 ········ 140
2. 利用基本方法计算二重积分 ········ 142
3. 被积函数为分段函数及隐含分段函数的二重积分问题 ········ 144
4. 综合题 ········ 145
强化训练(五) ········ 147
第六章 无穷级数 ········ 150
§6.1 数项级数 ········ 150
一、考核内容要点 ········ 150
二、补充公式与结论 ········ 152
三、典型问题与方法技巧 ········ 153
1. 判定数项级数收敛性问题 ········ 153
2. 数项级数求和问题 ········ 157
§6.2 幂级数 ········ 158
一、考核内容要点 ········ 158
二、典型问题与方法技巧 ········ 163
1. 求幂级数的收敛半径、收敛区间与收敛域问题 ········ 163
2. 求函数的幂级数展开式问题 ········ 164
3. 求幂级数的和函数与数项级数求和问题 ········ 166
强化训练(六) ········ 169
第七章 常微分方程与差分方程 ········ 173
一、考核内容要点 ········ 173
二、典型问题与方法技巧 ········ 176
1. 求解一阶微分方程问题 ········ 176
2. 一阶常系数线性差分方程问题 ········ 182
3. 求解高阶常系数线性微分方程问题 ········ 182
强化训练(七) ········ 186

第二篇 线性代数

第一章 行列式 ········ 190
一、考核内容要点 ········ 190
二、补充公式与结论 ········ 195
三、典型问题与方法技巧 ········ 197
1. 关于余子式、代数余子式问题 ········ 197
2. 数值型行列式的计算问题 ········ 198
3. 抽象型行列式的计算问题 ········ 202
4. 克拉默法则应用问题 ········ 205
强化训练(一) ········ 207
第二章 矩阵 ········ 210
一、考核内容要点 ········ 210
二、补充公式与结论 ········ 216
三、典型问题与方法技巧 ········ 218
1. 有关矩阵基本运算的问题 ········ 218
2. 求数值型矩阵的逆矩阵问题 ········ 220
3. 求抽象型矩阵的逆矩阵问题 ········ 222

4. 讨论(证明)矩阵可逆性问题 …… 223
5. 解矩阵方程问题 …… 224
6. 有关初等变换和初等矩阵问题 …… 226
7. 有关矩阵秩的问题 …… 228
强化训练(二) …… 232
第三章　向量 …… 236
一、考核内容要点 …… 236
二、补充公式与结论 …… 239
三、典型问题与方法技巧 …… 240
1. 判别数值型向量组的线性相关性问题 …… 240
2. 判别抽象型向量组的线性相关性问题 …… 242
3. 考查数值型向量(组)的线性表示及等价性问题 …… 245
4. 考查抽象型向量(组)的线性表示问题 …… 249
5. 向量组的极大无关组与秩的问题 …… 251
强化训练(三) …… 253
第四章　线性方程组 …… 257
一、考核内容要点 …… 257
二、补充公式与结论 …… 263
三、典型问题与方法技巧 …… 263
1. 考查线性方程组解的判定、性质与结构问题 …… 263
2. 有关基础解系的论证问题 …… 267
3. 数值型线性方程组求解问题 …… 269
4. 抽象型线性方程组求解问题 …… 273
5. 求两个线性方程组的公共解的问题 …… 276
6. 讨论两个线性方程组解的关系问题 …… 279
强化训练(四) …… 281
第五章　矩阵的特征值和特征向量 …… 287
一、考核内容要点 …… 287
二、补充公式与结论 …… 292
三、典型问题与方法技巧 …… 292
1. 求数值型矩阵的特征值、特征向量问题 …… 292
2. 求抽象型矩阵的特征值、特征向量问题 …… 295
3. 特征值、特征向量的逆问题 …… 297
4. 矩阵相似对角化问题 …… 299
5. 矩阵相似的判定问题 …… 302
6. 实对称矩阵的特征值、特征向量及相似对角化问题 …… 305
7. 特征值和特征向量的应用问题 …… 307
强化训练(五) …… 311
第六章　二次型 …… 317
一、考核内容要点 …… 317
二、补充公式与结论 …… 320
三、典型问题与方法技巧 …… 320
1. 考查二次型的秩及正、负惯性指数等基本概念性问题 …… 320
2. 化二次型为标准形问题 …… 322
3. 考查二次型或对称矩阵的正定性问题 …… 328
强化训练(六) …… 329

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件与概率 …… 333
一、考核内容要点 …… 333
二、补充公式与结论 …… 336
三、典型问题与方法技巧 …… 337
1. 考查随机事件的关系与运算及其逆问题 …… 337
2. 利用四种概型求概率问题 …… 339
3. 利用概率的公式、性质求概率问题 …… 343
强化训练(一) …… 345
第二章　随机变量及其分布 …… 348
一、考核内容要点 …… 348
二、补充公式与结论 …… 352
三、典型问题与方法技巧 …… 353
1. 考查随机变量概率分布(分布函数、概率密度、分布律)的概念性问题及确定其中未知参数的问题 …… 353
2. 求随机变量的概率分布问题 …… 355
3. 利用已知概率分布求概率问题 …… 358

4. 求随机变量函数的分布问题 ………… 361
强化训练(二) ……………………………… 367
第三章 多维随机变量及其分布 ……………… 372
一、考核内容要点 ………………………… 372
二、补充公式与结论 ……………………… 379
三、典型问题与方法技巧 ………………… 379
1. 求二维随机变量的概率分布(联合分布、边缘分布、条件分布)及其中未知参数问题 ……………………… 379
2. 利用二维概率分布求概率问题 ……… 388
3. 求二维随机变量函数的分布问题 …… 393
强化训练(三) ……………………………… 398
第四章 随机变量的数字特征 ………………… 404
一、考核内容要点 ………………………… 404
二、补充公式与结论 ……………………… 406
三、典型问题与方法技巧 ………………… 406
1. 求随机变量的数学期望与方差问题 … 406
2. 求随机变量函数的数学期望与方差问题 ……………………………………… 409
3. 求协方差、相关系数及讨论随机变量相关性问题 ……………………………… 415
4. 数字特征应用题 ………………………… 419
强化训练(四) ……………………………… 420
第五章 大数定律与中心极限定理 …………… 424
一、考核内容要点 ………………………… 424
二、典型问题与方法技巧 ………………… 426
1. 利用切比雪夫不等式估算概率问题 … 426
2. 考查大数定律的问题 …………………… 427
3. 考查中心极限定理的问题 ……………… 428
强化训练(五) ……………………………… 430
第六章 数理统计 ……………………………… 433
一、考核内容要点 ………………………… 433
二、典型问题与方法技巧 ………………… 437
1. 求统计量的分布问题 …………………… 437
2. 求统计量的数字特征问题 ……………… 439
3. 求参数的点估计问题 …………………… 442
强化训练(六) ……………………………… 447

第一篇　微　积　分

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函　　数

一、考核内容要点

1. 函数的概念及其表示法

设数集 $D\subset R$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数,记为 $y=f(x)$,$x\in D$. 其中 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为定义域.

函数的表示法有公式法、列表法、图像法等.

2. 函数的几种特性

单调性	设区间 $I\subset D$,若对 $\forall x_1,x_2\in I$,$x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少).
奇偶性	设 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数).
周期性	若 $\exists l>0$,使对 $\forall x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为 D 上的周期函数,其周期为最小正周期.
有界性	若存在常数 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对 $\forall x\in I(I\subset D)$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界;否则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

注 1) 对上述函数的几种特性要从几何直观上理解把握. 如奇(偶)函数的图形关于原点(y 轴)对称;周期函数的图形在自变量 x 间隔整数倍周期的区间上相同,等等.

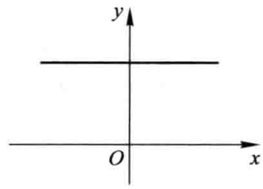
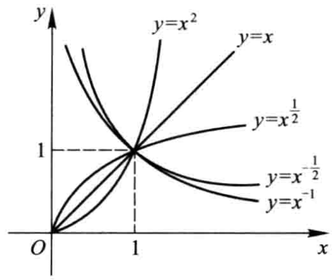
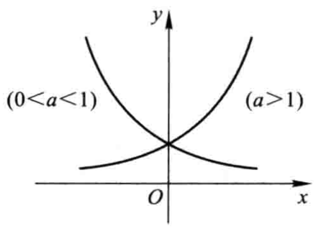
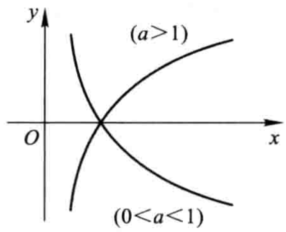
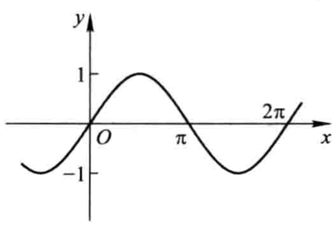
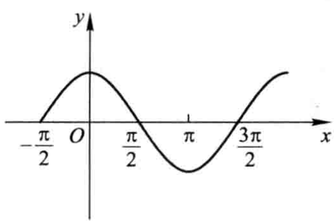
2) 了解常见的周期函数. 如,$\sin x$,$\cos x$ 的周期为 2π;$|\sin x|$,$|\cos x|$,$\sin 2x$,$\cos 2x$,$\tan x$,$\cot x$,$|\tan x|$,$|\cot x|$ 的周期为 π,等等.

3) 了解常见的有界函数. 注意,函数的有界性是针对某个区间而言的. 如,在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上,有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$,$0<\operatorname{arccot} x<\pi$,等等.

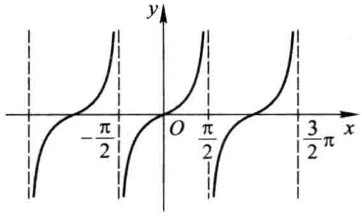
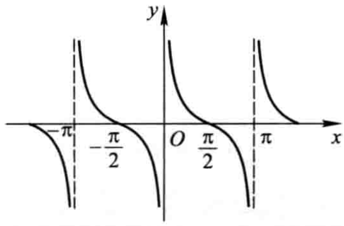
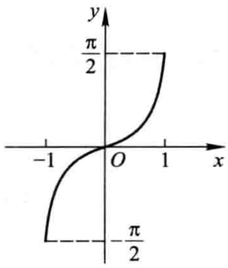
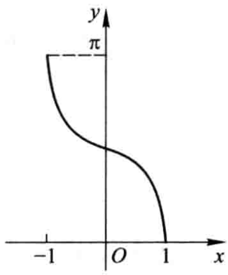
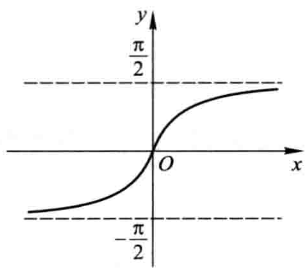
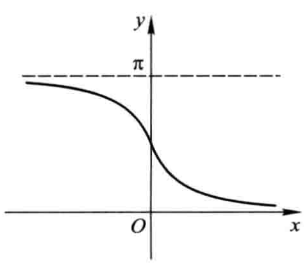
4) 了解奇偶性、周期性的基本运算性质. 如,奇(偶)函数的代数和仍是奇(偶)函数;偶函数之积为偶函数;一个奇函数与偶函数之积为奇函数. 两个周期为整数的周期函数的代数和仍是周期函数,等等.

3. 常见函数类型

(1) 基本初等函数

名称	表达式	定义域	图形	特性
常数函数	$y=C$	$(-\infty,+\infty)$		
幂函数	$y=x^{\mu}$ $(\mu\neq 0)$	随 μ 不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义.		经过点 $(1,1)$. 在第一象限内，当 $\mu>0$ 时，x^{μ} 为增函数；$\mu<0$ 时，x^{μ} 为减函数. 值域依赖于 μ.
指数函数	$y=a^{x}$ $(a>0,a\neq 1)$	$(-\infty,+\infty)$		经过点 $(0,1)$. 图像在 x 轴上方. 当 $0<a<1$ 时，a^{x} 是减函数；当 $a>1$ 时，a^{x} 是增函数. 值域：$y\in(0,+\infty)$.
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$	$(0,+\infty)$		经过点 $(1,0)$. 图像在 y 轴右侧. 当 $0<a<1$ 时，$\log_a x$ 是减函数；$a>1$ 时，$\log_a x$ 是增函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的奇函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$. 值域：$y\in[-1,1]$.
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的偶函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$. 值域：$y\in[-1,1]$.

续表

名称	表达式	定义域	图　形	特　性
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$		以 π 为周期的奇函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$		以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内是减函数. 值域：$y\in(-\infty,+\infty)$.
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		单调增加的奇函数. 值域：$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减少. 值域：$y\in[0,\pi]$.
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		单调增加的奇函数. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$. 值域：$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$		单调减少. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界 $0<\operatorname{arccot} x<\pi$. 值域：$y\in(0,\pi)$.

注 对上述基本初等函数,一定要从表达式、定义域、值域、图形以及各种特性等方面牢牢把握. 这样很多题目不必动笔,便一目了然.

例 1.1.1 设 $I=\iint\limits_D\cos(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$, $J=\iint\limits_D\sin(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$, $K=\iint\limits_D\cot(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $x+y=\dfrac{\pi}{4}$ 与 x 轴、y 轴围成的三角形区域,则必有

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.　　(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

解 本题考查二重积分性质中的比较性质. 由于积分区域相同,故只需比较被积函数大小. 显然在区域 D 上,有 $0\leqslant x+y\leqslant\dfrac{\pi}{4}$,由上述基本初等函数图形,容易看出

$$\sin(x+y)<\cos(x+y)<\cot(x+y),$$

故应选(C).

注 本题虽然是二重积分问题,但利用基本初等函数的图形便快速找到了答案,而不必通过计算再比较. 一般地,见到题设条件中有几何意义的客观题,就要想到用图示法求解,通过几何直观“看出”结果.

(2) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 R_f. 若对 $\forall y\in R_f$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,即有 $x=f^{-1}(y)$,称为 $y=f(x)$ 的反函数,一般表示为 $y=f^{-1}(x)$.

注 1) 严格单调的函数必存在反函数.

2) 函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像重合,但与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

3) $f^{-1}[f(x)]=x$, $f[f^{-1}(x)]=x$.

(3) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ. 若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$,则 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 构成的复合函数,u 为中间变量.

(4) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合并可用一个表达式表示的函数称为初等函数.

(5) 分段函数

在自变量的不同变化范围内用不同表达式表示的函数称为分段函数. 注意,分段函数不是多个函数,其一般形式为

$$y=\begin{cases}f_1(x), & x\in I_1,\\ f_2(x), & x\in I_2,\end{cases}\quad\text{或}\quad y=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0,\\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

常见的分段函数有绝对值函数 $|x|$,符号函数 $\operatorname{sgn} x$、取整函数 $[f(x)]$、$\max\{f_1(x),f_2(x)\}$ 及 $\min\{f_1(x),f_2(x)\}$,等等.

(6) 方程确定的隐函数

$F(x,y)=0\to y=y(x)$,或 $x=x(y)$,这是由二元方程确定的一元隐函数.

$F(x,y,z)=0\to z=z(x,y)$,或 $y=y(z,x)$,或 $x=x(y,z)$,这是由三元方程确定的二元隐函数.

注 上述方程确定的隐函数是有条件的,这将在多元函数微分学中介绍.

(7) 参数方程确定的函数

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta\to y=y(x).$$

(8) 幂指函数

$y=f(x)^{g(x)}$,其中 $f(x)>0$.

(9) 变限积分确定的函数

$$y=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \text{或 } y=\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(10) 由极限式确定的函数

$$y=\lim_{n\to\infty} f(x,n), \text{或 } y=\lim_{t\to x} f(t,x).$$

注　在求解由极限式确定的函数的问题时,一般要先求出极限,再作相应的运算.

以上十类函数几乎包括了考研数学所有可能考到的函数类型,对这些函数的各种运算,诸如求极限,确定无穷小的阶,求导数,求单调区间与极值等问题后面将一一介绍.

二、补充公式与结论

1. 设 $f(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 内有定义,则 $f(x)+f(-x)$ 为偶函数,$f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

2. 设 $f(x)$ 可导,若 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数),则 $f'(x)$ 为奇函数(或偶函数);若 $f(x)$ 为周期函数,则 $f'(x)$ 为同周期的周期函数,即 $f'(x+T)=f'(x)$,其中 T 为 $f(x)$ 的周期.

3. 设 $f(x)$ 连续,$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+C$($C$ 为任意常数),即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的全体原函数,则 $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow F(x)$ 为偶函数;若 $f(x)$ 为偶函数,则 $F(x)$ 中只有 $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是奇函数. 如 $f(x)=x^2$ 是偶函数,$F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$ 只有当 $C=0$ 时才是奇函数.

注　周期函数的原函数不一定是周期函数. 如 $f(x)=\cos x+1$ 的周期为 2π,但 $F(x)=\sin x+x$ 不是周期函数.

4. 单调函数的导数和原函数都不一定是单调函数. 请读者自行举例验证.

5. 表达式中含 x^n 因子的一般不是周期函数;含绝对值符号的一般不是单调函数.

三、典型问题与方法技巧

函数是高等数学研究的主要对象,但单独以本节内容命题的试题并不多,主要有以下两个方面.

1. 考查函数各种特性问题

方法提示

考查函数 $f(x)$ 的各种特性,即单调性、奇偶性、周期性、有界性等. 对于单调性,可利用 $f'(x)$ 的符号判定(利用定义判定函数单调性的题目,考研一般不会考). 对于奇偶性和周期性,一般用定义或运算性质及相关的结论进行判定. 对于有界性,简单情形可将函数取绝对值,然后进行放缩;一般是利用函数的连续性和求区间端点处的极限来判定. 当然,若能求出 $f(x)$ 在区间 I 上的最大(小)值,也可知 $f(x)$ 在 I 上有上(下)界.

例 1.1.2　函数 $f(x)=x\cos x\mathrm{e}^{-|\sin x|}$ 是

(A) 奇函数.　　(B) 有界函数.　　(C) 周期函数.　　(D) 单调函数.

解　因表达式中含有 x 因子和绝对值符号,可排除(C),(D). 又 $x\to\infty$ 时,函数表达式中含有"∞"因子而无"0"因子,故此函数必无界,但不一定是无穷大.

对于选项(A),由函数奇偶性定义,

$$f(-x)=-x\cos(-x)\mathrm{e}^{-|\sin(-x)|}=-x\cos x\mathrm{e}^{-|\sin x|}=-f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数,应选(A).

例 1.1.3 函数$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$的有界区间是

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

分析 考查函数$f(x)$在开区间(a,b)内是否有界,只要考查$f(x)$在(a,b)内是否连续,且$f(x)$在区间端点处的极限是否存在即可.

解 因$x\neq 0,1,2$时,$f(x)$连续. 而

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=-\frac{\sin 3}{18},\lim_{x\to 0^-}f(x)=-\frac{\sin 2}{4},\lim_{x\to 0^+}f(x)=\frac{\sin 2}{4},$$
$$\lim_{x\to 1}f(x)=\infty,\lim_{x\to 2}f(x)=\infty,$$

故$f(x)$在$(-1,0)$内有界,应选(A).

注 由连续函数性质可知,若$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则$f(x)$在$[a,b]$上有界;若$f(x)$在开区间(a,b)内连续,且极限$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$都存在,则$f(x)$在$(a,b)$内有界.

例 1.1.4 设函数$f(x)$连续,则下列函数中必为偶函数的是

(A) $\int_0^x f(t^2)\,dt$. (B) $\int_0^x f^2(t)\,dt$.

(C) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\,dt$. (D) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\,dt$.

分析 本题若从函数奇偶性定义出发,则需要用定积分的换元积分法,比较繁琐. 若想到"补充公式与结论"的第2条,则只要把四个选项中的函数逐一求导,看哪个是奇函数即可.

解 将四个选项中的函数分别对x求导,得

(A) $f(x^2)$. (B) $f^2(x)$. (C) $x[f(x)-f(-x)]$. (D) $x[f(x)+f(-x)]$.

显然应选(D).

注 由于题设中有抽象函数$f(x)$,本题也可用赋值法排除. 取$f(u)=1$,显然满足题设条件. 经简单计算可知(A),(B)都是奇函数. 再取$f(u)=u$,选项(C)结果为$\int_0^x u[u-(-u)]\,du=\dfrac{2}{3}x^3$,仍是奇函数;选项(D)结果为0,是偶函数,应选(D). 请读者注意,见到题设条件中有抽象元素(如函数$f(x)$,矩阵$\boldsymbol{A}$,等等)的客观题,就要想到用赋值法求解. 一定要注意,选取的"特殊值"必须要符合题设条件,而且越简单越好.

2. 函数复合问题

方法提示

函数复合包括初等函数复合与分段函数复合,其一般方法是借助变量代换的思想,按部就班,逐步代入替换即可.

例 1.1.5 设$g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则$g[f(x)]=$________.

分析 本题是分段函数的复合问题. 按上述方法,逐步代入替换即可.

解 先将$g(x)$中的所有自变量x都用$f(x)$替换,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0, & ①\\ f(x)+2, & f(x)>0, & ②\end{cases}$$

再把$f(x)$的表达式分别代入①,②中,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-x^2, & x^2\leqslant 0, & x<0, & ③\\ 2-(-x), & -x\leqslant 0, & x\geqslant 0, & ④\\ x^2+2, & x^2>0, & x<0, & ⑤\\ -x+2, & -x>0 & x\geqslant 0 & ⑥\end{cases}$$

分别求解③,④,⑤,⑥中的不等式组(把无解的③,⑥去掉),得

$$g[f(x)]=\begin{cases}x^2+2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

注　上述是求分段函数复合的一般方法.

例 1.1.6　设 $f(x+1)=\ln\dfrac{x-1}{x+1}$,且 $f[\varphi(x)]=2\ln x$,则 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=$ ________.

分析　本题关键是要先求出 $\varphi(x)$,这是初等函数复合问题,作相应的变量代换即可.

解　令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,故有

$$f(t)=\ln\frac{t-1-1}{t}=\ln\frac{t-2}{t},\quad f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}.$$

再由题设条件,得 $\ln\dfrac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=2\ln x=\ln x^2$,

即
$$\frac{\varphi(x)-2}{\varphi(x)}=x^2,\quad \varphi(x)=\frac{2}{1-x^2}.$$

于是
$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln|1+x|-\ln|1-x|+C=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C.$$

§1.2　极　　限

一、考核内容要点

1. 极限的概念、性质及运算法则

(1) 极限的概念

极限包括数列极限和函数极限,其定义见下表.

数列极限	$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$,存在正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$.
函数极限	$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $\lvert x\rvert>X$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.
	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时,有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$. 类似可定义 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

注　1) 所有定义的条件都是充分必要的.

2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(2) 极限的基本性质

唯一性	设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=B$,则 $A=B$.

续表

局部有界性	设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在$\delta>0$和$M>0$,使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时,有$\lvert f(x)\rvert\leqslant M$. 特别地,若数列$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$有界,即$\lvert x_n\rvert\leqslant M$.
局部保号性	设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且$A>0$(或$<0$),则$\exists\delta>0$,使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时,有$f(x)>0$(或$<0$).反之,若$f(x)>0$(或$<0$),且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在,则$A\geqslant 0$(或$\leqslant 0$).例如,$\frac{1}{x^2+1}>0$,但$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$.

注 1) 其他极限过程如$x\to x_0^-,x\to x_0^+,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$也有相同的性质.

2) 数列的极限也满足上述性质.

(3) 极限的运算法则

四则运算法则	设$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;$\lim[f(x)g(x)]=AB$; $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$;$\lim f(x)^{g(x)}=A^B(A>0)$.
复合函数运算法则	设$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A,\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,且在$x_0$的某去心邻域内$\varphi(x)\neq u_0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

注 1) 应用时一定不要忽视上述法则的前提条件.

2) 若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$一个存在,一个不存在,则$\lim[f(x)\pm g(x)]$必不存在.若$\lim f(x)$与$\lim[f(x)\pm g(x)]$都存在,则$\lim g(x)$必存在.若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$都不存在,则$\lim[f(x)\pm g(x)]$可能存在,也可能不存在.

3) 若$\lim f(x)$与$\lim g(x)$一个存在,一个不存在;或者都不存在,则极限$\lim[f(x)g(x)]$可能存在,也可能不存在.

4) 设$\lim f(x)=\infty,\lim g(x)=B$,则$\lim[f(x)\pm g(x)]=\infty$;当$B\neq 0$时,$\lim[f(x)g(x)]=\infty,\lim\frac{g(x)}{f(x)}=0$.

2. 极限定理

定理 1.2.1(函数极限存在与无穷小关系定理)

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\text{其中}\lim_{x\to x_0}\alpha=0.$$

$x\to\infty$情形类似.

定理 1.2.2(单调有界准则) 单调有界数列必有极限.对于函数情形,在$(a,+\infty)$(或$(-\infty,b)$)上,若$f(x)$单调增加(或减小)且有上(下)界,则极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$)存在.

定理 1.2.3(夹逼定理) 设在x_0的某去心邻域内有$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

$x\to\infty$以及数列的情形类似.

定理 1.2.4(洛必达法则)

法则Ⅰ$\left(\frac{0}{0}\text{型}\right)$ 设函数$f(x),g(x)$满足

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;