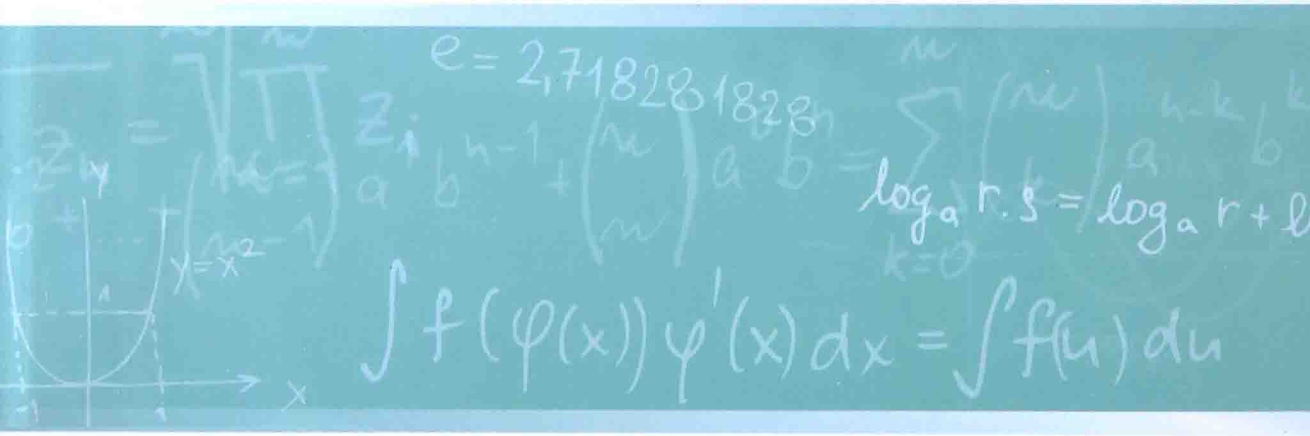
高等院校经济管理核心课程精品教材

高等数学

ADVANCED MATHEMATICS

第三版



黄振耀 编著

- 本书内容编排合理，重点突出，由浅入深，通俗易懂
- 充分体现了本课程的系统性、科学性和实用性的要求
- 例题丰富，并且免费随书赠送习题集，便于学生练习

上海财经大学出版社

高等院校经济管理核心课程精品教材

高等数学

（第三版）

黄振耀　编著

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/黄振耀编著．—3 版．—上海：上海财经大学出版社，2015.2

(高等院校经济管理核心课程精品教材)

ISBN 978-7-5642-2100-3/F・2100

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①黄…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 016272 号

□ 责任编辑　王　芳
□ 封面设计　钱宇辰
□ 责任校对　王从远

GAODENG SHUXUE
高　等　数　学
(第三版)

黄振耀　编著

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路 321 号乙　邮编 200434)
网　　址：http://www.sufep.com
电子邮箱：webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
启东市人民印刷有限公司印刷装订
2015 年 2 月第 3 版　2015 年 2 月第 1 次印刷

787mm×1092mm　1/16　13.5 印张　345 千字
(习题集 10 印张　256 千字)
印数：16 001—21 000　　定价：40.00 元

第三版前言

本书是为了适应财经管理类专业的实际需要而编写的经济数学系列教材之一，介绍从事经济管理和经济理论研究所需要的高等数学微积分部分的基础知识。

本书是以上海财经大学出版社出版的李国勤、黄振耀编写的《高等数学》为基础修订编写而成的。在编写过程中，编者根据近几年教学实践和继续教育的特点，充分考虑微积分学的系统性和科学性，在教学大纲范围内，适当调整了部分内容的顺序和部分例题，力求做到重点突出、通俗易懂、循序渐进。

本书还新配有习题集，以帮助读者更好地掌握高等数学中的基本概念和方法。

本书可作为本科和高职财经管理类专业经济数学中微积分课程的教材或教学参考书，也可以作为高等教育自学考试财经类《高等数学(一)》的自学参考书。

本书在编写过程中，得到了学院领导和兄弟部门的大力支持和关心，在此谨表谢意。另限于编者水平，对书中不妥之处，恳请同仁与广大读者不吝赐教。

编　者

2015年1月

目 录

第一章

函　数

函数是高等数学中最基本的研究对象，微积分学研究函数限于实数范围。本章主要介绍一元函数的概念及其性态讨论、反函数的求法，并给出复合函数与初等函数的概念。

第一节　变量及其变化范围

一、常量与变量

在考察自然现象、进行科学实验或各种经济活动时，常常会遇到各种各样的量，其中有的量在过程中不变化，也就是保持一定的数值，这种量叫作**常量**；还有一些量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，这种量叫作**变量**。

例如，某工厂工人的月工资分为两部分：基本工资和效益工资，基本工资是根据工人的技术等级等因素决定的，通常在一个时期(如一年内)是不变的，也就是常量。而效益工资是根据工人每月的产品产量和质量来决定的，所以它就是个变量。

当然，一个量是常量还是变量，要根据具体情况作具体分析，同一个量在某一过程中是常量，而在另一过程中完全有可能是变量。例如，在某一个时段内，基本工资是常量，但在一个比较长的时段里，由于有晋级等因素，基本工资则是变量。

通常以 x,y,z,u,t 等表示变量；以 a,b,c,x_0,x_1,y_0 等表示常量。

在数轴上，每一点都唯一地代表一个实数，而任一实数也都对应数轴上唯一的一点。正因为全体实数与数轴上的点的这种一一对应关系，故常量可以用数轴上的定点表示，变量可以用动点表示，并可以把“实数 a”也说成“数轴上的点 a”或“点 a”.

二、区间与邻域

区间是最常见的一类数集，分为两种：

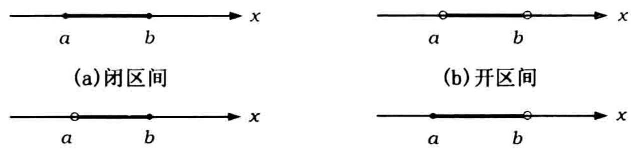
1. 有限区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$，则称数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 为**闭区间**，记作 $[a,b]$；称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记作 (a,b)；称数集 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 和 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 为**半开半闭区间**，分别记为 $(a,b]$ 和 $[a,b)$；并称 a 为区间的左端点，b 为区间的右端点，以上有限区间的长度均为 $b-a$.

开区间 (a,b) 表示数轴上介于 a 与 b 两点之间的所有点的全体；闭区间 $[a,b]$ 比开区间多两个端点；而 $(a,b]$ 只比 (a,b) 多了一个右端点，$[a,b)$ 只比 (a,b) 多了一个左端点(见图 1－1)。

2. 无限区间

设 a 为实数，满足不等式 $x\geqslant a$ 的全体实数 x，可用区间 $[a,+\infty)$ 表示。其中，记



(a)闭区间　(b)开区间　(c)左开右闭区间　(d)左闭右开区间

图 1—1　数轴的区间表示法

号“$+\infty$”读作“正无穷大”。

满足不等式 $x>a$ 的全体实数 x，可用区间 $(a,+\infty)$ 表示。

类似地，可以定义：区间 $(-\infty,a]=\{x\mid x\leqslant a\}$；区间 $(-\infty,a)=\{x|x<a\}$. 其中，记号“$-\infty$”读作“负无穷大”。

全体实数 $\{x|-\infty<x<+\infty\}$ 也可以用区间形式表示为：$(-\infty,+\infty)$.

以后，我们还经常要用到与区间有关的邻域概念。

定义　设 a 与 δ 都是实数，且 $\delta>0$，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体叫作**点 a 的 δ 邻域**。点 a 叫作该邻域的中心，δ 叫作该邻域的半径。

由于上述绝对值不等式与

$$-\delta<x-a<\delta$$

等价，因此有：

$$a-\delta<x<a+\delta$$

从而，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$（见图1—2）。所以，点 a 的 δ 邻域，也就是以点 a 为中心，而长度为 2δ 的开区间。

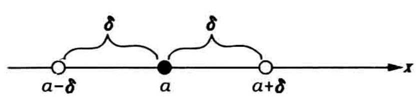


图 1—2　领域示意图

例如，“点 $x_0=5$ 的 $\frac{1}{10}$ 邻域”就是指满足不等式

$$|x-5|<\frac{1}{10}$$

的全体实数，即开区间：(4.9,5.1)。

第二节　函　数

一、函数概念

在某个变化过程中，往往同时有几个变量在变化着，这些变量往往是相互联系的，并且遵循着一定的变化规律。下面我们先考察几个例子。

［**例 1**］　某种商品的售价为每千克 10 元，则销售收入 R 与销售量 q 之间由公式

$$R=10q \quad (q>0)$$

联系着，销售量 q 的值确定了，销售收入 R 也就随之唯一确定了。

［例 2］ 某企业上半年甲种零件的月产量统计表如表 1－1 所示。

表 1－1 某企业上半年甲种零件的月产量统计表

t(月序)	1	2	3	4	5	6
产量 y(万个)	2.4	3.2	2.8	2.7	2.0	2.9

该统计表体现了月序 t 自 1 至 6 的任何一个值都有唯一确定的产量 y 与之对应。

［例 3］ 图 1－3 中的曲线 l 表达了某种商品的销售成本。对于销售量 x 在$[0,b]$上的任一取值 Q，都能从图上找到相应的成本值 $y=c$.

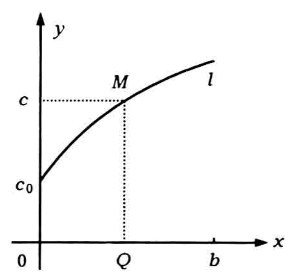


图 1—3

以上三例，如果抽去所考虑的实际意义，那么，它们都表达了两个变量之间的相依关系。这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有唯一确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义 设 D 是非空的实数集合，x 和 y 是两个变量，如果对于 x 的取值范围 D 内的每一个值，按照某一个确定的对应法则 f，变量 y 有唯一确定的值与之对应，则称 y **是确定在 D 上的 x 的函数**，记作：

$$y=f(x),x\in D$$

x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，x 的取值范围 D 称为函数的**定义域**。

这类一个自变量的函数称为一元函数。

对于函数 $y=f(x)$，当自变量 x 取 D 中某个定值 x_0 时，因变量 y 的相应值称为 $x=x_0$ 时的**函数值**，记作：

$$f(x_0)\text{或 } y|_{x=x_0},f(x)|_{x=x_0}$$

此时，也称**函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义**。当自变量 x 在定义域上取值时，其相应的函数值的全体，称为函数 $y=f(x)$的**值域**。

常用的函数表示法有三种：

1. 解析法

用数学算式(公式)表示一个函数，称这种表示函数的方法为**解析法**，也称为公式法。如例 1中的函数：

$$R=10q \quad (q>0)$$

还有像指数函数、对数函数等，如

$$y=5^x,x\in(-\infty,+\infty)$$
$$y=\log_2 x,x\in(0,+\infty)$$

都是用解析法表示的函数。

2. 列表法

把自变量所取的值和对应的函数值列成表格来表示函数的方法，称为**列表**法，也称为**表格**法。如例 2，还有，我们使用的各种数学用表等，都是用列表法来表示函数的例子。

3. 图像法

由图像给出函数的对应法则的方法称为**图像**法，也称为**图示**法。如例 3 实质上由图 1－3 表示了销售成本函数：$y=C(x)$。因为当自变量 x 在$[0,b]$上任意取定值 Q 时，即有成本曲线 l 上相应的点 M 的纵坐标为 C（即因变量 y 的值），反过来也可以说函数 $y=C(x)$ 的图像（图形）是曲线 l.

函数的这三种表示法各有所长：用表格法表示的函数，查阅方便；用图像法表示的函数，直观、便于考察函数的变化规律；用解析法表示的函数，便于进行各类运算和理论研究。本课程中讨论的函数大多由解析法表示。当然，在讨论函数时，往往并不局限于用一种方法。例如，我们经常对解析法表示的函数借助于函数的图像加以分析、研究。

对于用解析法表示的函数，其定义域如果没有作特别指明，那么，它的存在域就是它的定义域，即此时函数的定义域就是使解析式有意义的自变量值的全体。

例如，函数：

$$y=x^2$$

也就是函数：

$$y=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$$

又如，函数：

$$y=\log_2 x$$

也就是函数：

$$y=\log_2 x,x\in(0,+\infty)$$

由函数定义可知，定义域和对应法则是构成函数的两大要素。当且仅当定义域相同、对应法则也相同的函数才认为是相同的函数。值得注意的是，两个相同的函数，其相应的对应法则的表达形式可能不同。例如，函数：

$$f(x)\equiv 1,x\in(-\infty,+\infty)$$

与函数：

$$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$$

实质上是相同的。

[**例 4**] 下列 $f(x)$和 $g(x)$是相同函数的为(　　)。

A. $f(x)=x$，　　$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

B. $f(x)=\sqrt{x^2}$，　　$g(x)=|x|$；

C. $f(x)=\log_3 x^2$，　　$g(x)=2\log_3 x$；

D. $f(x)=\log_3\sqrt{x}$，　　$g(x)=\dfrac{1}{2}\log_3|x|$.

解 应选 B.

因为在 A,C,D 中，$f(x)$的定义域和 $g(x)$的定义域都不相同；在 B 中，$f(x)$和 $g(x)$既有相同的定义域$(-\infty,+\infty)$，又有实质相同的对应法则，所以，B 中的 $f(x)$和 $g(x)$是同一个函数。

［例 5］ 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$；

(2) $y=\dfrac{1}{x-3}+\log_5(x-2)$.

解 (1)因为偶次根号内的被开方式必须非负，分式的分母不能为零，从而当 $\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\ \sqrt{2x-1}\neq 0\end{cases}$ 即 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 才有意义。所以，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 的定义域为：$\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)因为分式 $\dfrac{1}{x-3}$ 只有当 $x-3\neq 0$ 时才有意义，而 $\log_5(x-2)$ 当真数 $(x-2)>0$ 时有意义。

由 $\begin{cases}x-3\neq 0\\ x-2>0\end{cases}$，解得：$x>2$ 且 $x\neq 3$.

所以，函数 $y=\dfrac{1}{x-3}+\log_5(x-2)$ 的定义域为：$(2,3)\cup(3,+\infty)$.

二、分段函数

在用解析法表示的函数中有一种函数称为**分段函数**，它在定义域的不同部分用不同的算式来表示变量间的对应法则，即对于其定义域内自变量的不同值，函数不能用一个相同的解析式表达，而要用两个或两个以上不同的解析式来按段表达。

例如，$y=f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ 2, x=0\\ -x, x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数，此函数的对应法则是：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，按 $y=x^2$ 来确定函数 y 的值；当 $x=0$ 时，函数 y 的对应值为 2；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，按 $y=-x$ 来确定函数 y 的值。

应该明白，一个分段函数只是在定义域的不同部分需要用相应的解析式计算函数值，不能看作是几个函数。分段函数的定义域是各分段定义域的并集。例如，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0\\ 2, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域为：$(-\infty,+\infty)$. 函数图像见图 1－4。

又如，函数

$$y=g(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$$

的定义域为：$[0,+\infty)$. 函数图像见图 1－5。

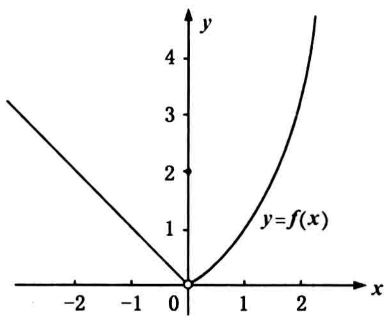


图 1—4

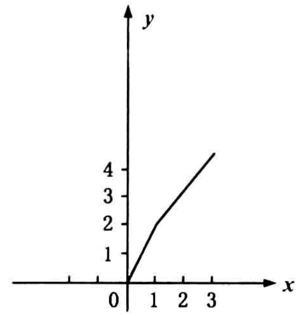


图 1—5

[**例 6**] 求下列函数值:

(1)$y=x^2+x+3$.求:$y|_{x=-4}$,$y|_{x=0}$,$y|_{x=2}$;

(2)$f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<-1 \\ x^3, -1<x\leqslant\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{x}, x>\dfrac{3}{2} \end{cases}$,求:$f(-2)$,$f(0)$,$f(6)$.

解 (1)因为 $y=x^2+x+3$,所以:

$$y|_{x=-4}=(-4)^2+(-4)+3=15$$
$$y|_{x=0}=0^2+0+3=3$$
$$y|_{x=2}=2^2+2+3=9$$

(2)因为 $f(x)$是分段函数,$x=-2$ 属于 $x<-1$ 的范围内,故 $f(-2)$的值按第一段公式来求;$x=0$ 在$-1<x\leqslant\dfrac{3}{2}$的范围内,故 $f(0)$的值按第二段公式来求;而 $x=6$ 在 $x>\dfrac{3}{2}$的范围内,故 $f(6)$按第三段解析式来求。所以:

$$f(-2)=(-2)^2-1=3$$
$$f(0)=0^3=0$$
$$f(6)=\frac{1}{6}$$

第三节 函数的几个主要性质

本节介绍以后常见的一些特殊类型的函数:有界函数、单调函数、奇函数与偶函数以及周期函数。

一、函数的有界性

设函数 $f(x)$在区间 D 上有定义,若存在某个正数 M,对一切 $x\in D$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$在 D 上**有界**,也称 $f(x)$为 D 上的**有界函数**。否则,称$f(x)$在 D 上**无界**或称 $f(x)$为 D 上的**无界函数**。

若在$[a,b]$上$|f(x)|\leqslant M$,则 $y=f(x)$图像的特征是,在区间$[a,b]$上,它完全落在两条水

平直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间的范围内(见图1－6)。

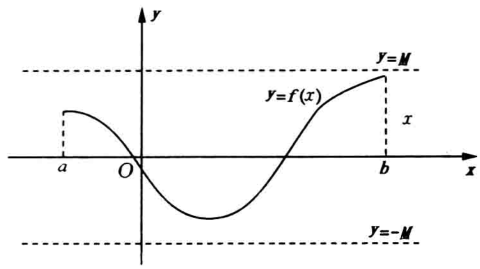


图 1－6

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\cos x$ 在整个数轴上都是有界的,这是因为对任意的实数 x,都有:

$$|\sin x|\leqslant 1, |\cos x|\leqslant 1$$

它们的图像夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间。

函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间[1,2]上有界(因为 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1$),但在(0,1)内无界(因为不存在这样的正数 M,能使 $y\leqslant M$)。

二、函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义。若对于 D 中任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,总有:

(1) $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**严格单调递增**或称 $f(x)$ 在 D 上**严格单调增加**;

(2) $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上**严格单调递减**或称 $f(x)$ 在 D 上**严格单调减少**。

在定义域上严格单调递增或严格单调递减的函数统称为严格单调函数,在本书中,以后均简称为单调函数。

[**例 1**] 讨论函数 $y=\dfrac{x}{3}$ 的单调性。

解 $y=\dfrac{x}{3}$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为对于任意的实数 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,当 $x_1<x_2$ 时就有 $y(x_1)-y(x_2)=\dfrac{x_1}{3}-\dfrac{x_2}{3}=\dfrac{1}{3}(x_1-x_2)<0$,即:

$$y(x_1)<y(x_2)$$

所以,$y=\dfrac{x}{3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上递增,$y=\dfrac{x}{3}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调递增函数。

同样,利用单调性定义,我们可以判定函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在 $(0,+\infty)$ 内单调递增,从而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数。

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内递增,则它在 (a,b) 内的图像沿 x 轴正向上升(如图 1－7所示)。如果 $y=g(x)$ 在区间 (a,b) 内递减,则其在 (a,b) 内的图像沿 x 轴正向下降(如图 1－8 所示)。

对大多数函数而言,按定义判定函数的单调性比较困难,以后我们可以借助导数来判定函数的单调性。

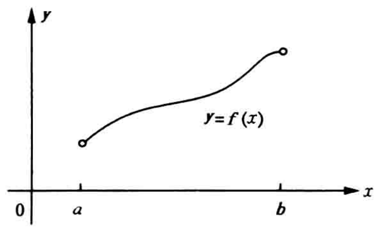


图 1—7

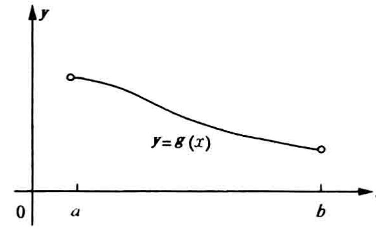


图 1—8

三、函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$ 在一个关于原点对称的区间 D 上有定义，且对任意的 $x\in D$，恒有：

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的**偶函数**。

例如，由于对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有：

$$\sin(-x)=-\sin x$$

$$\cos(-x)=\cos x$$

因此，$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 分别是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数和偶函数。

又如函数 $y=x^3$，$y=x^2+1$，由于在 $(-\infty,+\infty)$ 上：

$$(-x)^3=-(x)^3$$

$$(-x)^2+1=x^2+1$$

因此，$y=x^3$ 为奇函数，其图像如图 1—9 所示；$y=x^2+1$ 为偶函数，其图像如图 1—10 所示。

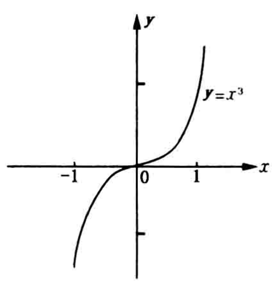


图 1—9

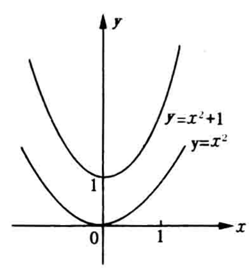


图 1—10

一般地，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于纵轴对称。

[例 2] 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，判别函数

$$F(x)=f(x)-f(-x)$$

的奇偶性。

解 因为：

$$F(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]$$
$$=-F(x)$$

所以，$F(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数。

[例 3] 判别 $f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)(a>0,a\neq1)$ 的奇偶性。

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

因为：

$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\log_a[\sqrt{1+(-x)^2}-x]\\
&=\log_a(\sqrt{1+x^2}-x)\\
&=\log_a\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)\cdot(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\
&=\log_a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)^{-1}\\
&=-\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)
\end{aligned}
$$

所以，$f(x)=\log_a(\sqrt{1+x^2}+x)$为奇函数。

应该明白，并非任何函数都具有奇偶性。例如，$y=2^x$ 既不是奇函数，也不是偶函数，为非奇非偶函数。

四、函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，若存在常数 $T>0$，使对任意的 x 均有：

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $f(x)$为**周期函数**，T 是 $f(x)$的一个**周期**。

显然，如果 T 是 $f(x)$的一个周期，那么，$2T,3T,\cdots$也都是$f(x)$的周期。若 $f(x)$的所有周期中有一个最小周期 T_0，则称 T_0 为 $f(x)$的基本周期。通常说的函数的周期，指的就是基本周期。

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是周期为 2π 的周期函数。$y=\tan x$、$y=\cot x$都是周期为 π 的周期函数。

如果 $f(x)$是以 T 为周期的周期函数，则它的图形可以由任一个长度为 T 的区间$[a,a+T]$上的图形沿 x 轴平移而得。

［**例 4**］ 设 ω,φ 为常数，且 $\omega>0$，求下列函数的周期：

(1)$y=\sin(\omega x+\varphi)$；

(2)$y=\tan(\omega x+\varphi)$.

解 (1)因为：

$$
\begin{aligned}
y&=\sin(\omega x+\varphi)=\sin(\omega x+\varphi+2\pi)\\
&=\sin[\omega(x+\frac{2\pi}{\omega})+\varphi]
\end{aligned}
$$

所以，$y=\sin(\omega x+\varphi)$的周期为$\frac{2\pi}{\omega}$.

(2)因为：

$$
\begin{aligned}
y&=\tan(\omega x+\varphi)=\tan(\omega x+\varphi+\pi)\\
&=\tan[\omega(x+\frac{\pi}{\omega})+\varphi]
\end{aligned}
$$

所以，$y=\tan(\omega x+\varphi)$的周期为$\frac{\pi}{\omega}$.

若 $f(x)$是周期为 T 的周期函数，则 $f(ax+b)$(常数 $a>0$，b 为常数)是以$\frac{T}{a}$为周期的周期

函数。

第四节 反函数与复合函数

一、反函数

在某些变化过程中，自变量与因变量的关系往往是相对的。例如，经营售价为 10 元/千克的商品，销售收入 R 是销售量 q 的函数，即：

$$R=10q\quad(q>0)$$

其中，q 是自变量，R 是因变量。

而如果知道了总收入 R，则可以由

$$q=\frac{1}{10}R$$

求出销售量 q，此时，R 为自变量，q 为因变量。

由 $R=10q$ 与 $q=\frac{1}{10}R$ 这对函数，即引出如下反函数的概念。

定义 1 设已知函数

$$y=f(x),x\in D$$

其值域为 F，若对于值域 F 中的每个值 y_0，D 中只有一个值 x_0 按照

$$x=\varphi(y)[\text{由 } f(x)=y \text{ 解析得出}]$$

与之对应，则称函数 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作：

$$x=f^{-1}(y),y\in F$$

由反函数的定义可知，若 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数。$y=f(x)$ 的定义域是 $x=\varphi(y)$ 的值域，而 $x=\varphi(y)$ 的定义域是 $y=f(x)$ 的值域。

由于习惯上通常以 x 表示自变量，以 y 表示因变量，因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)=\varphi(y)$ 可改写为：

$$y=f^{-1}(x)=\varphi(x),x\in F$$

应该指出，$y=f^{-1}(x),x\in F$ 和 $x=f^{-1}(y),y\in F$ 是同一个函数，因为定义域都是 F，对应法则都是 f^{-1}，值域均为 D，只是表示自变量与函数的字母互相调换了而已。它们的几何特征是：在同一坐标系下，$y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是同一条曲线，而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称（如图 1－11所示）。

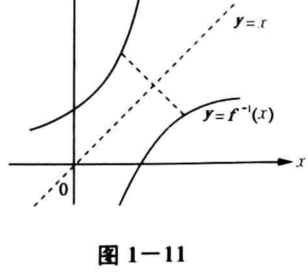


图 1－11