Б·П·吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八七年·济南

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（五）

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版

山 东 省 新 华 书 店 发 行

山 东 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米32开本 24.375印张 520千字

1980年7月第1版 1987年3月第4次印刷

印数：164,101—175,600

ISBN 7—5331—0103—0

O·9

书号 13195·21 定价 4.65 元

出版说明

吉米多维奇(Б.П.ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易

查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　　录

第六章　多变量函数的微分法

§1.　多变量函数的极限.连续性

1° 多变量函数的极限　设函数 $f(P)=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon>0$ 存在有 $\delta=\delta(\varepsilon, P_0)>0$，使得只要 $P\in E$ 及 $0<\rho(P, P_0)<\delta$〔其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离〕，则

$$|f(P)-A|<\varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

2° 连续性　若

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续，则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的.

3° 一致连续性　若对于每一个 $\varepsilon>0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta>0$，使得对于域 G 中的任何点 P'，P''，只要是

$$\rho(P', P'')<\delta,$$

便有不等式

$$|f(P')-f(P'')|<\varepsilon$$

成立，则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的.

确定并绘出下列函数存在的域:

3136. $u=x+\sqrt{y}$.

解 存在域为半平面,

$y\geqslant 0$,

如图 6·1 阴影部分所示,包括整个 Ox 轴在内.

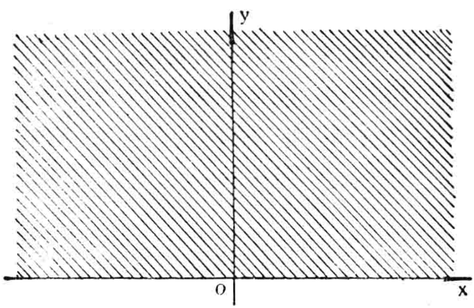

图 6·1

3137. $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不等式

$|x|\leqslant 1, |y|\geqslant 1$

的点集,如图 6·2 阴影部分所示,包括边界(粗实线)在内.

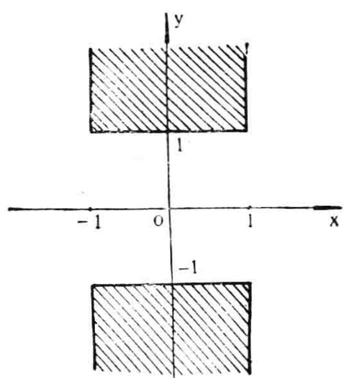

图 6·2

3138. $u=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

$x^2+y^2\leqslant 1$,

如图 6·3 阴影部分所示，包括圆周在内.

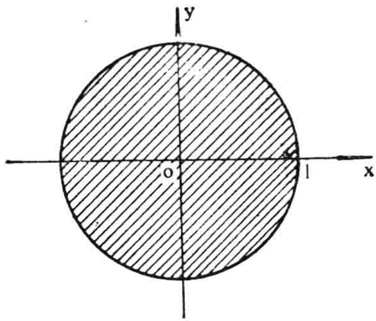

图 6·3

3139. $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$.

解 存在域为满足不等式

$x^2+y^2>1$

的点集，即圆 $x^2+y^2=1$ 的外面，如图6·4 所示，不包括圆周（虚线）在内.

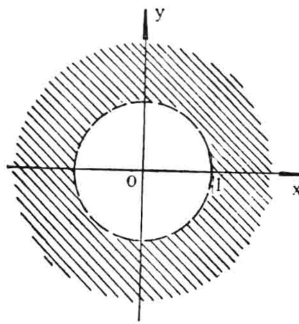

图 6·4

3140. $u=\sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

解 存在域为满足不等式

$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$

的点集，如图6·5所示的环，包括边界在内.

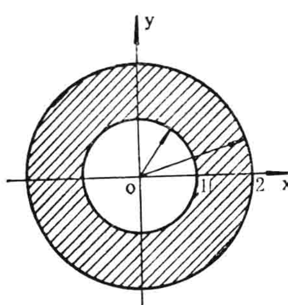

图 6·5

3141. $u=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

解 存在域为满足不等式

$x\leqslant x^2+y^2<2x$

的点集．由 x^2+y^2

$\geqslant x$得出

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2+y^2<2x$ 得出

$(x-1)^2+y^2<1$，两者组成一月形，如图 6·6 阴影部分所示。

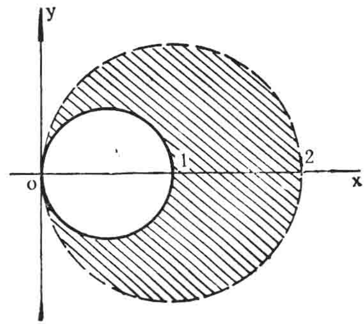

图 6·6

3142. $u=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1\leqslant x^2+y\leqslant 1$$

的点集，如图 6·7 阴影部分所示，包括边界在内。

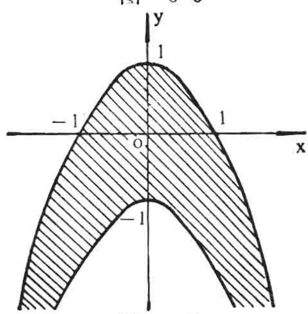

图 6·7

3143. $u=\ln(-x-y)$.

解 存在域为半平面

$$x+y<0,$$

如图 6·8 阴影部分所示，不包括直线 $x+y=0$ 在内。

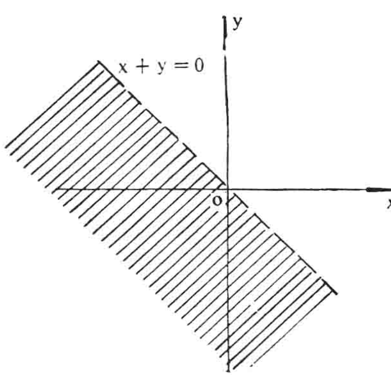

图 6·8

3144. $u=\arcsin\dfrac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left|\frac{y}{x}\right| \leqslant 1$$

或 $|y| \leqslant |x|$ $(x \neq 0)$ 的点集，这是一对对顶的直角，如图 6·9 阴影部分所示，不包括原点在内。

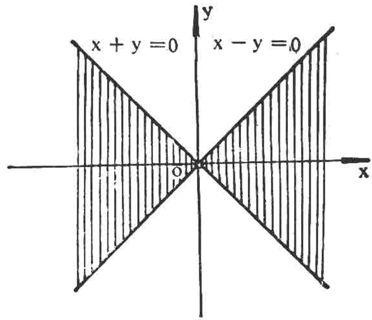

图 6·9

3145. $u = \arccos\frac{x}{x+y}$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$$

的点集. 由 $\left|\frac{x}{x+y}\right| \leqslant 1$ 得 $|x| \leqslant |x+y|$ $(x \neq -y)$，

即 $x^2 \leqslant x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geqslant 0$，也即

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ y \geqslant -2x, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} y \leqslant 0, \\ y \leqslant -2x. \end{cases}$$

但 x，y 不能同时为零. 这是由直线：$y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角，如图 6·10 阴影部分所示，包括边界在内，但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

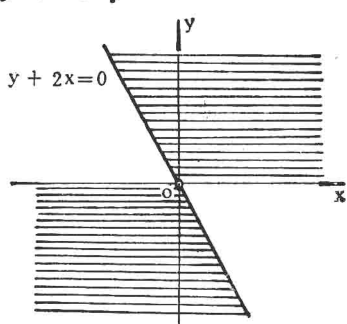

图 6·10

3146. $u=\arcsin\frac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$.

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{x}{y^2}\right|\leqslant 1 \text{ 及 } |1-y|\leqslant 1 \ (y\neq 0)$$

的点集，即

$$\begin{cases} y^2\geqslant x, \\ 0<y\leqslant 2 \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} y^2\geqslant -x, \\ 0<y\leqslant 2. \end{cases}$$

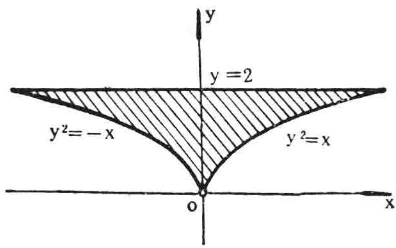

图 6·11

这是由抛物线：$y^2=x$，$y^2=-x$ 和直线$y=2$所围成的曲边三角形，如图6·11阴影部分所示，不包括原点在内。

3147. $u=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$.

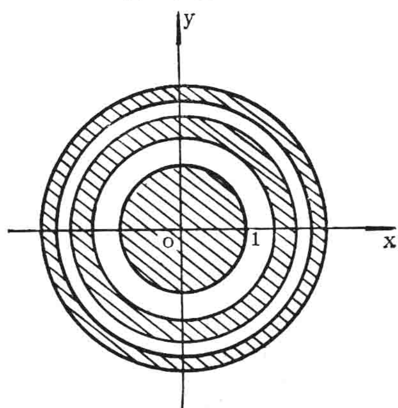

图 6·12

解 存在域为满足不等式

$\sin(x^2+y^2)\geqslant 0$

或$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi$ ($k=0,1,2,\cdots$) 的点集，如图6·12所示的同心环族。

3148. $u=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

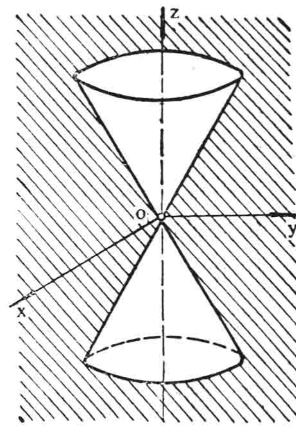

图 6·13

解 存在域为满足不等式

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1$$

(x, y 不同时为零)

或

$$x^2+y^2-z^2\geqslant 0$$

(x, y 不同时为零)

的点集，这是圆锥 $x^2+y^2-z^2=0$ 的外面，如图 6·13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点.

3149. $u=\ln(xyz)$.

解 存在域为满足不等式

$$xyz>0$$

的点集，即

$$x>0,\ y>0,z>0;\ 或 x>0,y<0,z<0;$$

$$x<0,y<0,z>0;\ 或\ x<0,y>0,z<0.$$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面. 由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明.

3150. $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解 存在域为满足不等式

$$-x^2-y^2+z^2>1$$

的点集．这是双叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=-1$ 的内部，如图6·14阴影部分所示，不包括界面在内．

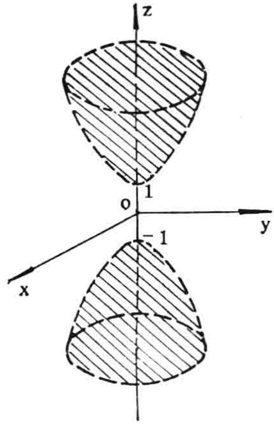

图 6·14

作出下列函数的等位线：

3151. $z=x+y$.

解 等位线为平行直线族

$$x+y=k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示．

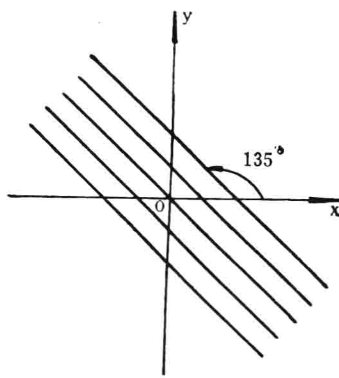

图 6·15

3152. $z=x^2+y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2+y^2=a^2$$

$$(a\geqslant 0).$$

当$a=0$时为原点；当$a>0$时，等位线为以原点为圆心的同心圆族．

3153. $z=x^2-y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2-y^2=k.$$

当 $k=0$ 时为两条互相垂直的直线：$y=x, y=-x$.

当 $k\neq 0$ 时为以 $y=\pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k>0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k},\ 0)$，$(\sqrt{k},\ 0)$，当 $k<0$ 时顶点为 $(0,-\sqrt{-k})$，$(0,\ \sqrt{-k})$.

3154. $z=(x+y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x+y)^2=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 为直线 $x+y=0$. 当 $a\neq 0$ 时为与直线 $x+y=0$ 平行的且等距的直线 $x+y=\pm a$.

3155. $z=\dfrac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y=kx\ (x\neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内.

3156. $z=\dfrac{1}{x^2+2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2+2y^2=a^2\ (a>0).$$

长半轴为 a，短半轴为 $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$，焦点为 $\left(-a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$ 及 $\left(a\sqrt{\dfrac{3}{2}},0\right)$.

3157, $z=\sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy=a^2\ (a\geqslant 0).$$

当 $a=0$ 时为坐标轴 $x=0$ 及 $y=0$. 当 $a>0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为 $(-a,-a)$ 及 $(a,\ a)$.

3158. $z=|x|+y$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+y=k,$$

其中 k 为一切实数. 当 $x\geqslant 0$ 时为 $x+y=k$；当 $x<0$ 时为 $-x+y=k$. 这是顶点在 Oy 轴上两支互相垂直的射线所构成的折线族，如图6·16所示.

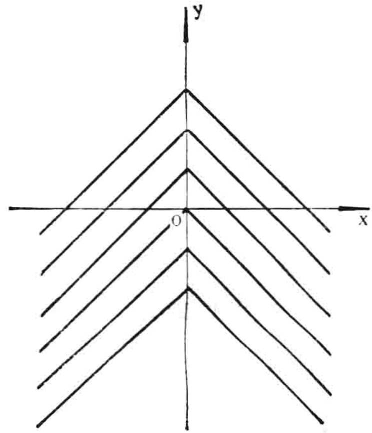

图 6·16

3159. $z=|x|+|y|-|x+y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x|+|y|-|x+y|=a.$$

因为恒有 $|x|+|y|\geqslant|x+y|$，所以 $a\geqslant 0$.

当 $a=0$ 时，由 $|x|+|y|=|x+y|$ 两边平方即得

$$xy\geqslant 0,$$

即为整个第一、第三象限，包括两坐标轴在内.

当 $a>0$ 时，$xy<0$，分下面四组求解：

(1) $x>0, y<0$，$x+y\geqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $y=-\frac{a}{2}$；

(2) $x>0, y<0, x+y\leqslant 0$，$|x|+|y|-|x+y|=a$，解之得 $x=\frac{a}{2}$；

(3) $x<0$, $y>0, x+y\geqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$, 解之得 $x=-\frac{a}{2}$;

(4) $x<0$, $y>0, x+y\leqslant 0$, $|x|+|y|-|x+y|=a$, 解之得 $y=\frac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x+y=0$ 上的两支互相垂直的折线族，它的各射线平行于坐标轴，如图 6·17 所示.

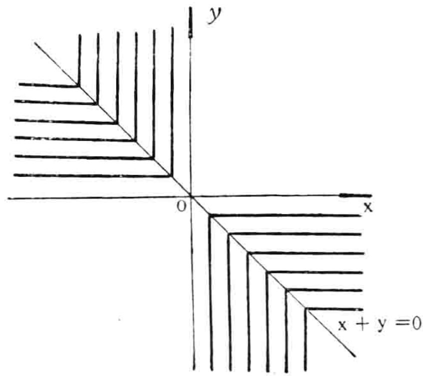

图 6·17

3160. $z=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2+y^2}=k \text{（}x, y\text{不同时为零）},$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x-\frac{1}{k}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k\neq 0).$$

当 $k=0$时，即得 $e^{\frac{2x}{x^2+y^2}}=1$,从而等位线为$x=0$即Oy轴，但不包括原点.